Cánh Diều

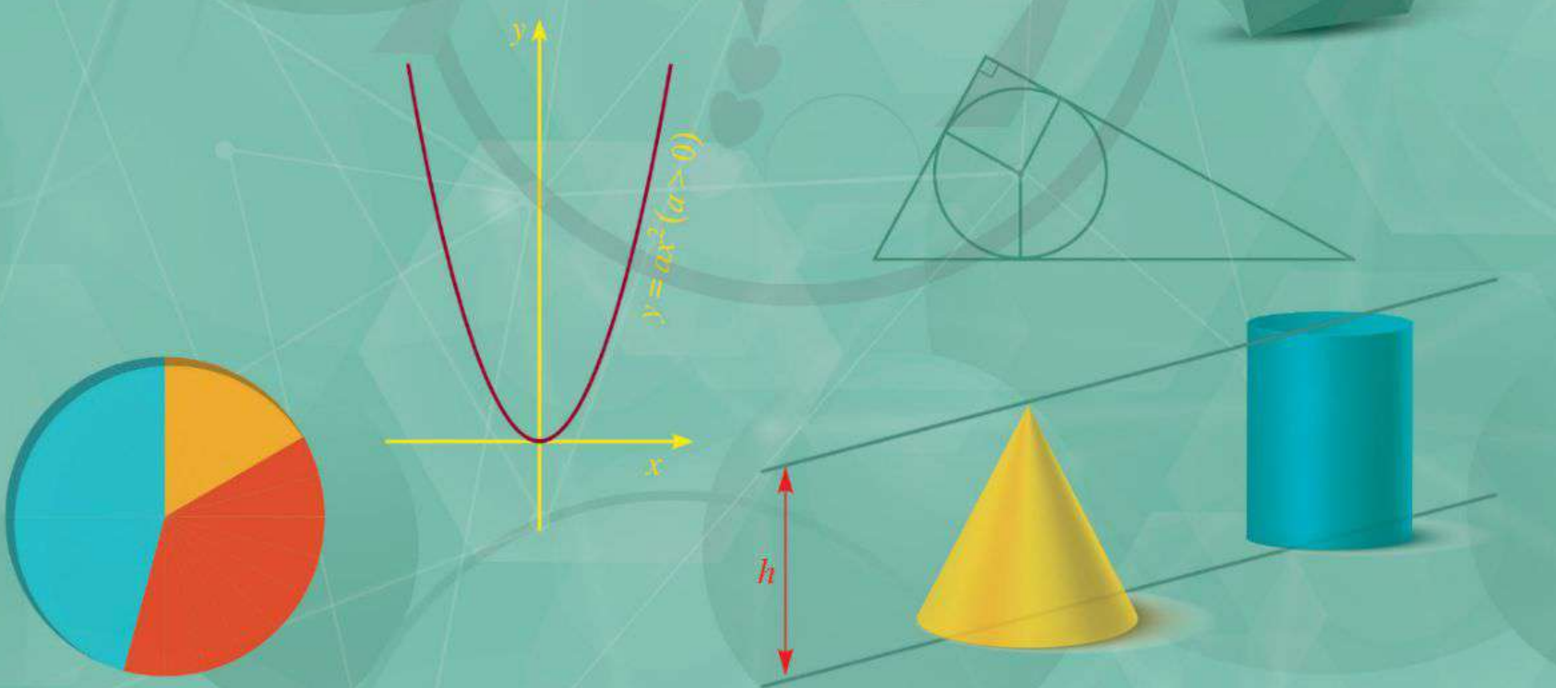
ĐỖ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP Toán 9

TẬP HAI

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$$



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VEPIC CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

ĐỖ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP Toán 9

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

Chương VI
MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

§1 MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG, BIỂU ĐỒ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Biểu diễn dữ liệu trên bảng thống kê, biểu đồ tranh

• Để biểu diễn dữ liệu trên bảng thống kê, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở cột đầu tiên, trong khi tiêu chí thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng đầu tiên hoặc ngược lại

Bước 2. Các số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng (hoặc cột) tương ứng.

• Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ tranh, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Các đối tượng thống kê được biểu diễn ở cột đầu tiên

Bước 2. Chọn biểu tượng để biểu diễn số liệu thống kê. Các biểu tượng đó được trình bày ở dòng cuối cùng

Bước 3. Số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê được biểu diễn bằng các biểu tượng ở dòng tương ứng.

Biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ cột, biểu đồ cột kép

• Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ cột, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Vẽ hai trục vuông góc với nhau

– Trên trục nằm ngang: biểu diễn các đối tượng thống kê

– Trên trục thẳng đứng: xác định độ dài đơn vị để biểu diễn số liệu thống kê và cần chọn độ dài đơn vị thích hợp với số liệu

Bước 2. Tại vị trí các đối tượng thống kê trên trục nằm ngang, vẽ những cột hình chữ nhật: cách đều nhau; có cùng chiều rộng; có chiều cao thể hiện số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê

Bước 3. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên các trục và ghi số liệu tương ứng trên mỗi cột (nếu cần).

- Cách vẽ biểu đồ cột kép tương tự như cách vẽ biểu đồ cột. Nhưng tại vị trí ghi mỗi đối tượng trên trục nằm ngang, ta vẽ hai cột sát nhau thể hiện hai loại số liệu của đối tượng đó. Các cột thể hiện số liệu theo cùng một tiêu chí thống kê của các đối tượng thường được tô cùng màu để thuận tiện cho việc đọc biểu đồ.

Biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ đoạn thẳng

Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ đoạn thẳng, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Vẽ hai trục vuông góc với nhau tại điểm O

– Trên trục nằm ngang: mỗi đối tượng thống kê được đánh dấu bằng một điểm và các điểm này thường được vẽ cách đều nhau

– Trên trục thẳng đứng: xác định độ dài đơn vị để biểu diễn số liệu thống kê và cần chọn độ dài đơn vị thích hợp với số liệu, đánh dấu điểm theo tiêu chí của đối tượng thống kê tương ứng

Bước 2. Với mỗi đối tượng thống kê, ta tiếp tục:

– Xác định điểm A đánh dấu số liệu thống kê trên trục thẳng đứng của đối tượng thống kê đó

– Kẻ bằng nét đứt một đoạn thẳng có độ dài bằng OA, vuông góc với trục nằm ngang và đi qua điểm đánh dấu đối tượng thống kê đó trên trục nằm ngang. Đầu mút trên của đoạn thẳng đó là điểm mốc của đối tượng thống kê

Bước 3. Vẽ đường gấp khúc gồm các đoạn thẳng nối liền liên tiếp các điểm mốc

Bước 4. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên các trục và ghi số liệu tương ứng trên mỗi điểm mốc (nếu cần).

Biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ hình quạt tròn

- Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Vẽ đường tròn tâm O bán kính R

Bước 2. Chuyển đổi số liệu của một đối tượng thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) về số đo cung tương ứng với đối tượng thống kê đó (tính theo độ) dựa theo nguyên tắc sau: $x\%$ tương ứng với $x\% \,.\, 360^{\circ}$

Các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê được cho ở bảng sau:

Đối tượng thống kê	**1**	**2**	…	**k**
Số đo cung tương ứng (đơn vị: độ)	n_1	n_2	…	n_k

Bảng 1

Chú ý: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 360^\circ$

Bước 3. – Vẽ tia gốc OA theo phương thẳng đứng

– Căn cứ vào *Bảng 1*, sử dụng thước thẳng và thước đo độ, vẽ theo chiều quay của kim đồng hồ các cung $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{k-2}A_{k-1}$ lần lượt có số đo là $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$. Khi đó cung $A_{k-1}A$ có số đo là:

$$360^\circ - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1}) = n_k$$

Bước 4. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên đối tượng thống kê vào hình quạt tương ứng; ghi số liệu tương ứng trên mỗi hình quạt; các hình quạt được tô màu khác nhau (nếu cần) và xoá đi những thông tin không cần thiết trong biểu đồ.

• *Nhận xét*

– Biểu đồ hình quạt tròn cho phép nhận biết nhanh chóng mỗi đối tượng thống kê chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

– Bảng thống kê hoặc biểu đồ cột cho phép nhận biết nhanh chóng số liệu thống kê (theo tiêu chí) của mỗi đối tượng thống kê và so sánh các số liệu đó.

– Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn từ bảng thống kê (hoặc từ biểu đồ cột), trước hết từ các số liệu ở bảng đó (hoặc ở biểu đồ cột đó) cần xác định các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Bác An thống kê những khoản chi tiêu trung bình (đơn vị: trăm nghìn đồng) cho học tập và giải trí trong các tháng 1, 2, 3, 4 năm 2023 của gia đình mình lần lượt như sau: 76; 68; 80; 85. Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

Giải

Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 2*):

Tháng	**1**	**2**	**3**	**4**
Số tiền chi tiêu (đơn vị: trăm nghìn đồng)	76	68	80	85

Bảng 2

Ví dụ 2 Khối lượng thóc bán được trong các năm 2020, 2021, 2022, 2023 của một hợp tác xã lần lượt là: 40 tấn; 50 tấn; 55 tấn; 70 tấn.

a) Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

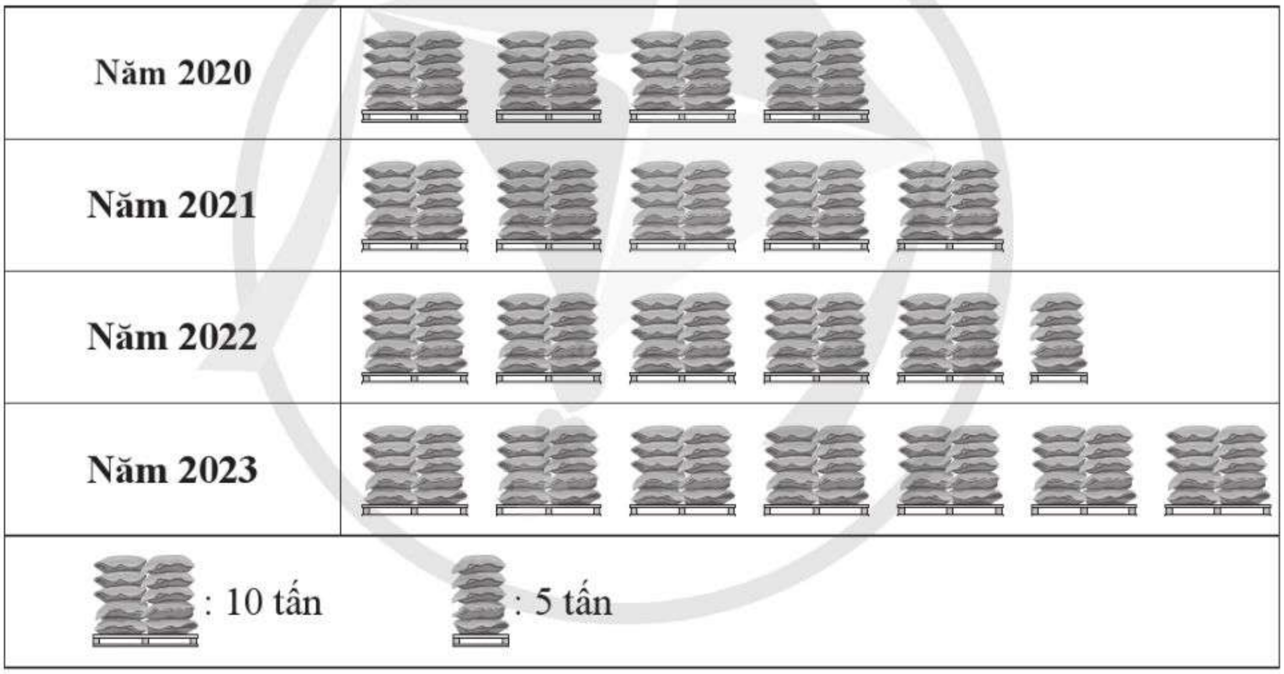
Giải

a) Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 3*):

Năm	2020	2021	2022	2023
Khối lượng thóc bán được (đơn vị: tấn)	40	50	55	70

Bảng 3

b) Biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó như sau (*Hình 1*):



Hình 1

Ví dụ 3 Bạn Hà thống kê diện tích gieo trồng lúa mùa của Việt Nam trong các năm 2019, 2020, 2021, 2022 lần lượt như sau: 1 611,6 nghìn ha; 1 584,6 nghìn ha, 15 412 trăm ha, 1 553,1 nghìn ha. (*Nguồn: http://consosukien.vn*)

a) Nếu vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó thì số liệu nào viết chưa hợp lí?

b) Viết lại dãy số liệu thống kê đó rồi lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

Giải

a) Để vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu, các số liệu đó cần được tính theo cùng một đơn vị. Nếu các số liệu đó tính theo đơn vị nghìn ha thì số liệu 15 412 trăm ha được viết chưa hợp lí.

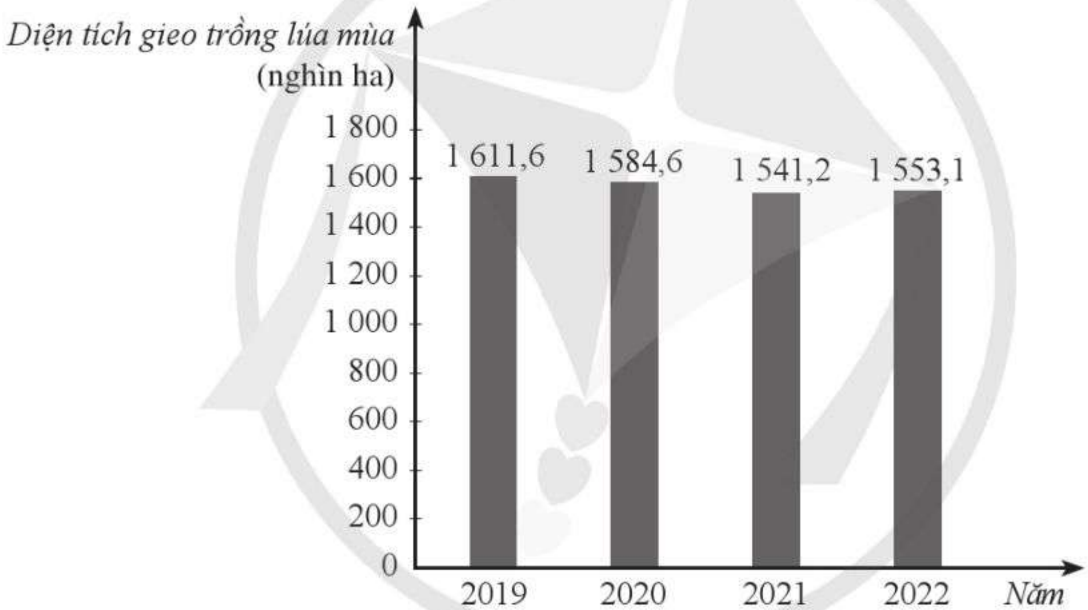
b) Diện tích gieo trồng lúa mùa (đơn vị: nghìn ha) của Việt Nam trong các năm 2019, 2020, 2021, 2022 lần lượt là: 1 611,6; 1 584,6; 1 541,2; 1 553,1.

Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 4*):

Năm	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**
Diện tích gieo trồng lúa mùa (đơn vị: nghìn ha)	1 611, 6	1 584,6	1 541,2	1 553,1

Bảng 4

Biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu đó như sau (*Hình 2*):



Hình 2

Ví dụ 4 Lượng xuất khẩu gạo và cà phê (đơn vị: nghìn tấn) của Việt Nam ở các tháng 7, 8, 9, 10 năm 2022 lần lượt khoảng là: 580 và 125; 700 và 112,5; 578 và 100; 680 và 79,8.

a) Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

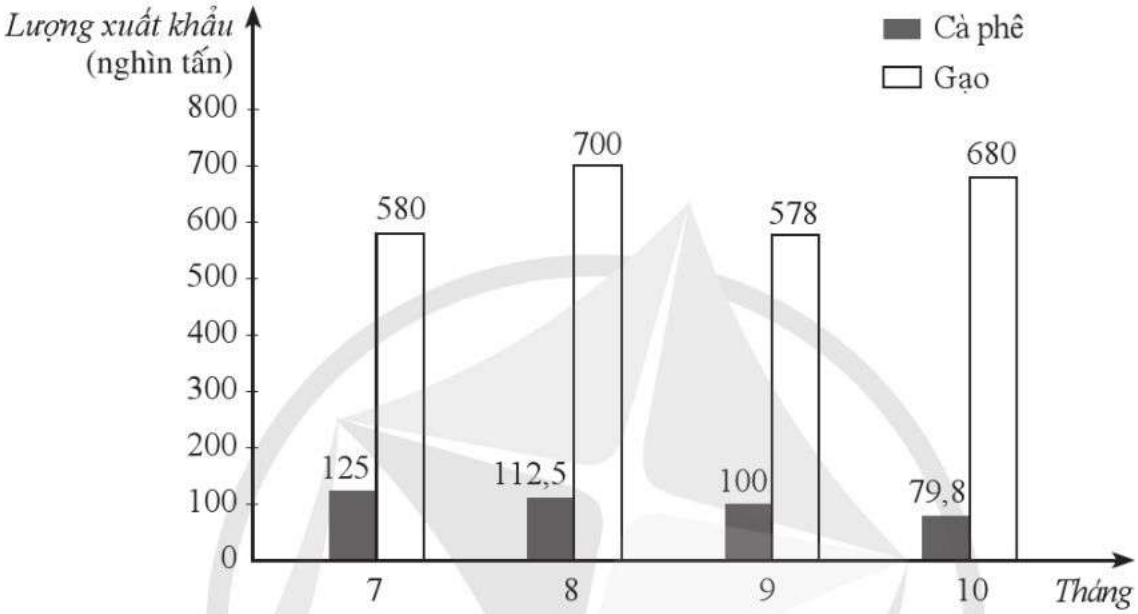
Giải

a) Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 5*):

Tháng	7	8	9	10
Gạo (đơn vị: nghìn tấn)	580	700	578	680
Cà phê (đơn vị: nghìn tấn)	125	112,5	100	79,8

Bảng 5

b) Biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó như sau (*Hình 3*):



Hình 3

Ví dụ 5 Bảng thống kê diện tích bốn cảng biển lớn của Thành phố Hồ Chí Minh như sau (*Bảng 6*):

Tên cảng	Cát Lái	SPCT (Sài Gòn Premier Container Terminal)	Bến Nghé	Tân Cảng – Phú Hữu
Diện tích (đơn vị: ha)	160	40	32	24

Bảng 6

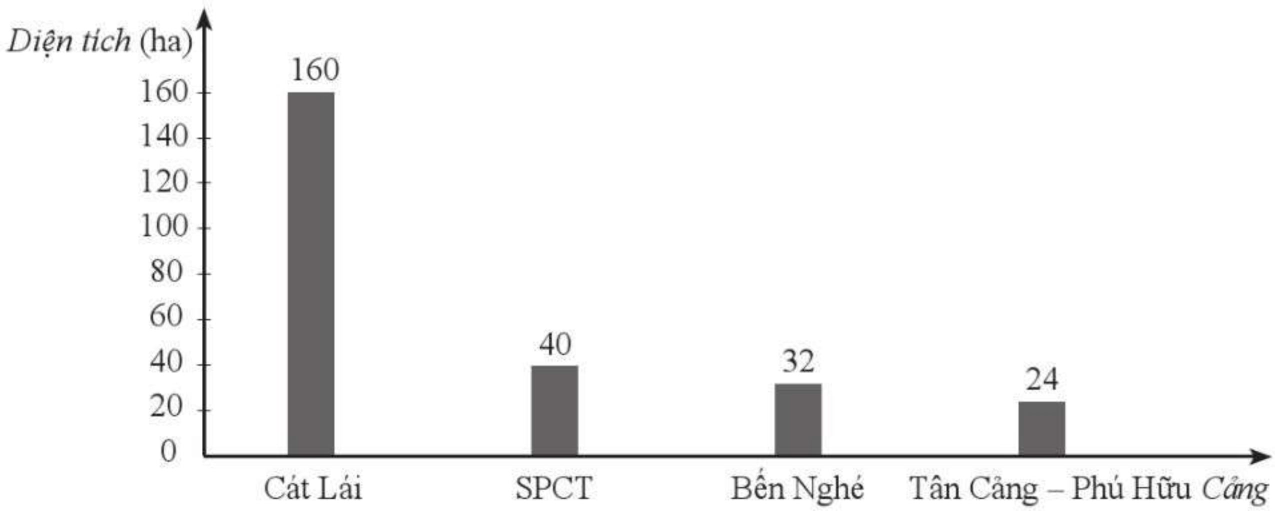
a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

c) Phát biểu "Diện tích cảng Cát Lái gấp 1,8 lần tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng – Phú Hữu" là đúng hay sai? Vì sao?

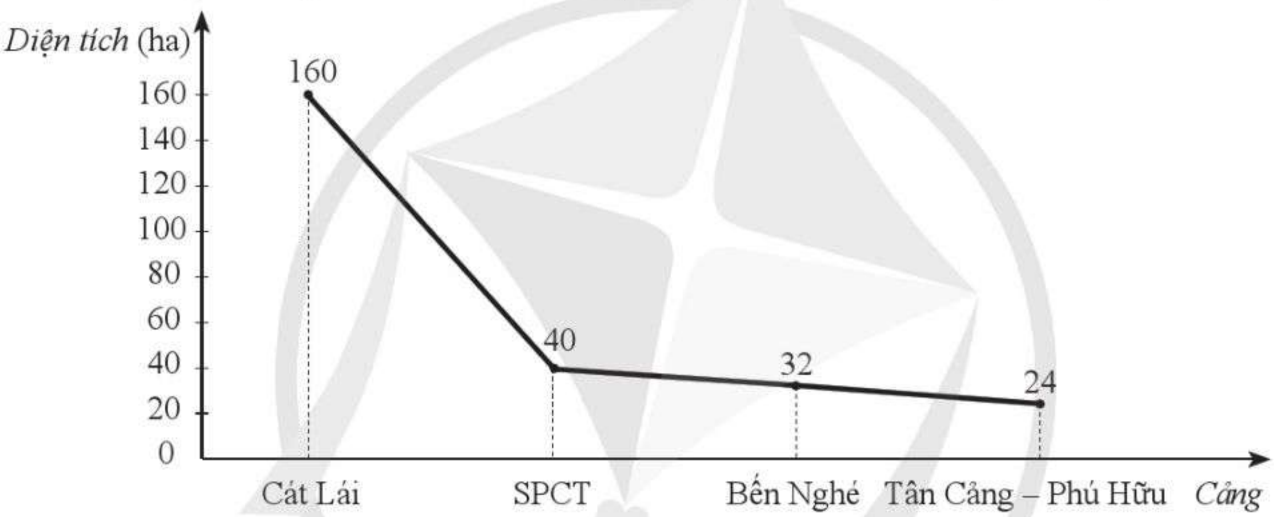
Giải

a) Biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó như sau (*Hình 4*):



Hình 4

b) Biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó như sau (*Hình 5*):



Hình 5

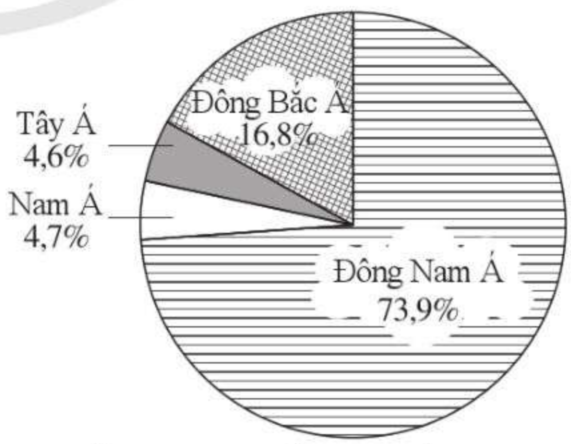
c) Tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng – Phú Hữu là:

$$40 + 32 + 24 = 96 \text{ (ha)}.$$

Ta có: $96 \,.\, 1,8 = 172,8 > 160$.

Vậy phát biểu "Diện tích cảng Cát Lái gấp 1,8 lần tổng diện tích của ba cảng SPCT, Bến Nghé và Tân Cảng – Phú Hữu" là không đúng.

Ví dụ 6 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 6* biểu diễn tỉ lệ phần trăm xuất khẩu của Việt Nam sang các khu vực thị trường châu Á năm 2020.



(Nguồn: Báo cáo xuất nhập khẩu Việt Nam năm 2020, Bộ Công thương)

Hình 6

Hãy hoàn thiện *Bảng 7* để nhận được bảng thống kê biểu diễn các số liệu của biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 6*:

Khu vực	Đông Nam Á	Nam Á	Tây Á	Đông Bắc Á
Tỉ lệ xuất khẩu của Việt Nam (đơn vị: %)	?	?	?	?

Bảng 7

Giải

Từ biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 6*, ta có bảng hoàn thiện của *Bảng 7* là *Bảng 8* sau:

Khu vực	Đông Nam Á	Nam Á	Tây Á	Đông Bắc Á
Tỉ lệ xuất khẩu của Việt Nam (đơn vị: %)	73,9	4,7	4,6	16,8

Bảng 8

Ví dụ 7 *Bảng 9* cho biết tỉ lệ đạt các loại giải Nhất, Nhì, Ba và Không đạt giải trong một cuộc thi viết về biển, đảo Việt Nam của học sinh khối 9 ở một trường trung học cơ sở:

Loại giải	Nhất	Nhì	Ba	Không đạt giải
Tỉ lệ đạt giải (đơn vị: %)	5%	15%	25%	55%

Bảng 9

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn kết quả thống kê trên.

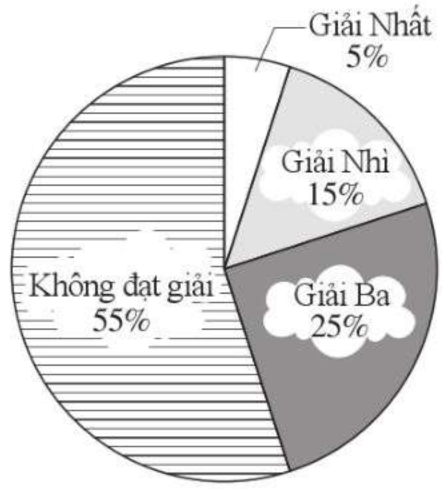
Giải

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm ở *Bảng 9*, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở *Bảng 10* sau:

Loại giải	Nhất	Nhì	Ba	Không đạt giải
Số đo (đơn vị: độ)	18^o	54^o	90^o	198^o

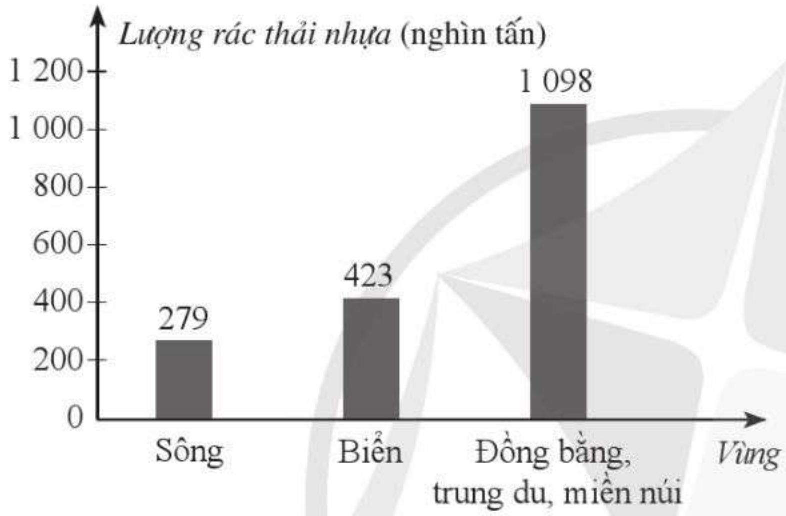
Bảng 10

Căn cứ vào *Bảng 10*, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê được cho ở *Hình 7*.

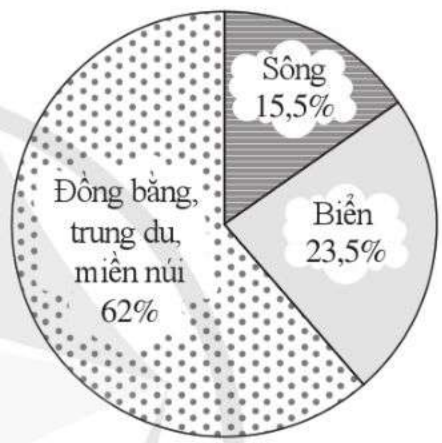


Hình 7

Ví dụ 8 Theo số liệu thống kê từ Bộ Tài nguyên và Môi trường, mỗi năm Việt Nam có khoảng 1,8 triệu tấn rác thải nhựa thải ra môi trường. Biểu đồ cột ở *Hình 8* biểu diễn số liệu về lượng rác thải nhựa mỗi năm của cả nước thải ra sông; biển; đồng bằng, trung du, miền núi.



Hình 8



Hình 9

a) Bạn An đã vẽ biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 9* để biểu diễn các dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở *Hình 8*. Những số liệu mà bạn An nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 9* đó đã chính xác chưa? Vì sao?

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở *Hình 8*.

Giải

a) Trong biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 9*, ta có: 15,5% + 23,5% + 62% > 100%. Vì vậy, những số liệu mà bạn An nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 9* là chưa chính xác.

b) Từ biểu đồ cột ở *Hình 8*, ta có bảng thống kê lượng rác thải nhựa mỗi năm của Việt Nam thải ra sông; biển; đồng bằng, trung du, miền núi như *Bảng 11* sau:

Vùng	**Sông**	**Biển**	**Đồng bằng, trung du, miền núi**
Lượng rác thải nhựa (đơn vị: nghìn tấn)	279	423	1 098

Bảng 11

Chuyển đổi số liệu thống kê ở *Bảng 11* về số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm, ta có *Bảng 12* sau:

Vùng	**Sông**	**Biển**	**Đồng bằng, trung du, miền núi**
Tỉ lệ (đơn vị: %)	15,5	23,5	61

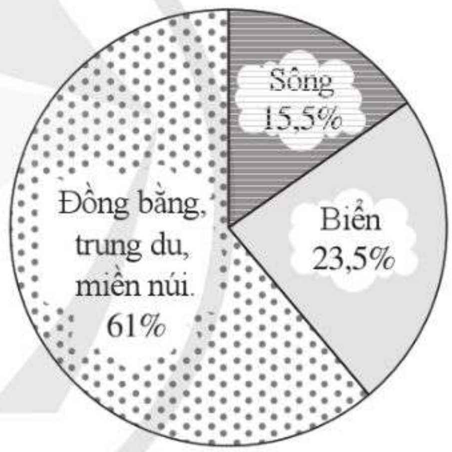
Bảng 12

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm ở *Bảng 12*, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở *Bảng 13* sau:

Vùng	**Sông**	**Biển**	**Đồng bằng, trung du, miền núi**
Số đo (đơn vị: độ)	55°48’	84°36’	219°36’

Bảng 13

Căn cứ vào *Bảng 13*, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở *Hình 8* như *Hình 10*.



Hình 10

C. BÀI TẬP

1. Số vốn đầu tư nước ngoài (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) đăng kí vào Việt Nam trong các năm 2019, 2020, 2021, 2022 lần lượt là: 38,9; 28,53; 31,15; 27,72. (*Nguồn: Tổng cục Thống kê*). Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

2. Cả 6 học sinh Việt Nam tham dự kì thi Toán học quốc tế (IMO) lần thứ 64 năm 2023 tổ chức tại Nhật Bản đều đạt giải. Đoàn học sinh Việt Nam xếp thứ 6 trên 112 nước tham dự. Số huy chương Vàng của 6 nước đứng đầu Trung Quốc, Mỹ, Hàn Quốc, Rumani, Nhật Bản, Việt Nam lần lượt như sau: 6; 5; 4; 5; 2; 2.

(*Nguồn: Việt Nam tại Olympic Toán học quốc tế – Wikipedia*).

Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

3. Cô Lan phụ trách câu lạc bộ bóng bàn thống kê số giờ tham gia luyện tập đấu bóng trong một tuần của 4 học sinh Chi, Đạt, Hà, Hương lớp 9A như *Bảng 14* sau:

Học sinh	**Chi**	**Đạt**	**Hà**	**Hương**
Thời gian luyện tập (đơn vị: giờ)	9	7	8,5	8

Bảng 14

Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

4. Theo số liệu thống kê số khách quốc tế (đơn vị: nghìn lượt người) đến Việt Nam trong các tháng 7, 8, 9, 10, 11 năm 2023 lần lượt như sau: 352,6; 486,4; 431,9; 484,4; 596,9. (*Nguồn: Cục Du lịch Quốc gia Việt Nam*). Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

5. Dựa theo báo cáo xuất khẩu gạo Việt Nam 10 tháng đầu năm 2022 của Bộ Công thương, bạn Bình thống kê tốp 5 thị trường xuất khẩu gạo Việt Nam là Philippines, Trung Quốc, Bờ Biển Ngà, Malaysia, Ghana lần lượt như sau: 2 739 (nghìn tấn), 757 (nghìn tấn), 586 000 (tấn), 396 (nghìn tấn), 393,5 (nghìn tấn).

a) Nếu vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó thì số liệu nào viết chưa hợp lí?

b) Viết lại dãy số liệu thống kê đó rồi lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

6. *Bảng 15* thống kê chiều cao trung bình của nam và nữ (năm 2020) ở các nước Việt Nam, Singapore, Nhật Bản, Hàn Quốc và Lào.

Nước	**Việt Nam**	**Singapore**	**Nhật Bản**	**Hàn Quốc**	**Lào**
Chiều cao trung bình của nam (đơn vị: cm)	162,1	171	172	170,7	160,5
Chiều cao trung bình của nữ (đơn vị: cm)	152,2	160	158	157,4	151,2

(Nguồn: Tạp chí Dân số thế giới)

Bảng 15

Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

7. *Bảng 16* thống kê điểm thi Học kì I bốn môn Ngữ văn, Toán, Ngoại ngữ 1, Khoa học tự nhiên của hai bạn An và Bình.

Môn học	**Ngữ văn**	**Toán**	**Ngoại ngữ 1**	**Khoa học tự nhiên**
Điểm thi của An	8	6	7,5	5
Điểm thi của Bình	6	8	9	8

Bảng 16

Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

8. Calo (Cal hay kcal) là đơn vị năng lượng mà cơ thể chuyển hoá từ thức ăn để duy trì các hoạt động sống. 1 Cal = 1 kcal = 1 000 cal. Lượng Calo trong 100 g trái cây của táo, chuối, nho, xoài, dứa lần lượt như sau: 52; 88; 70; 62; 66. (*Nguồn: Viện Dinh dưỡng Quốc gia*).

a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

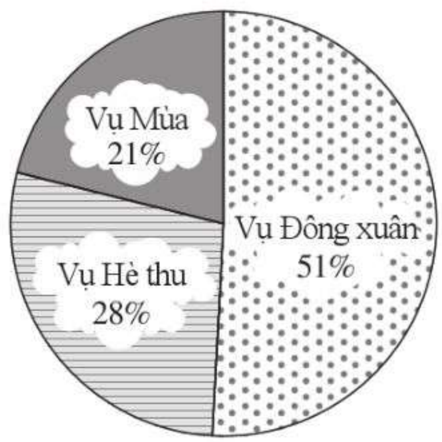
c) Phát biểu "Tổng lượng Calo trong 100 g của trái táo và 100 g trái chuối bằng 65% tổng lượng Calo trong 100 g của trái nho, 100 g trái xoài và 100 g trái dứa" là đúng hay sai? Vì sao?

9. Lúa là cây trồng chủ lực hằng năm ở nhiều địa phương trên cả nước. *Bảng 17* thống kê sản lượng lúa vụ Đông xuân, vụ Hè thu, vụ Mùa năm 2021 của nước ta như sau:

Vụ lúa	**Đông xuân**	**Hè thu**	**Mùa**
Sản lượng (đơn vị: triệu tấn)	20,298	11,144	8,358

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Bảng 17



Hình 11

Phát biểu "Biểu đồ hình quạt tròn *Hình 11* biểu diễn các dữ liệu thống kê ở *Bảng 17*" là đúng hay sai? Vì sao?

10. Bảng thống kê kết quả xếp loại học tập Học kì I của 500 học sinh khối 9 ở một trường trung học cơ sở như sau (*Bảng 18*):

Xếp loại học tập	Tốt	Khá	Đạt	Chưa đạt
Số học sinh	150	200	100	50

Bảng 18

a) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

c) Tính tỉ số giữa số học sinh xếp loại học tập Tốt và số học sinh xếp loại học tập Khá.

11. Số lượng học sinh lớp 9A yêu thích loại hình nghệ thuật văn hoá dân gian Dân ca quan họ Bắc Ninh, Múa rối nước, Hát chèo lần lượt là: 8; 20; 12.

a) Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

§2 TẦN SỐ. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tần số và bảng tần số, biểu đồ tần số

Một tập hợp gồm hữu hạn các dữ liệu thống kê được gọi là một mẫu. Số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước mẫu (hay cỡ mẫu).

- Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu dữ liệu thống kê được gọi là tần số của giá trị đó.
- Để lập bảng tần số ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số của mỗi giá trị đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), Tần số (n)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi giá trị và tần số của giá trị đó

– Cột cuối cùng: Cộng, $N = \ldots$

Chú ý: Bảng tần số ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

- Người ta thường vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng và có thể thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số nhận được ở *Bước 1.*

Tần số tương đối và bảng tần số tương đối, biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn

- Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i của giá trị đó và số lượng N các dữ liệu trong mẫu dữ liệu thống kê: $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

- Để lập bảng tần số tương đối ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), Tần số tương đối (%)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi giá trị và tần số tương đối của giá trị đó

– Cột cuối cùng: Cộng, 100.

Chú ý: Bảng tần số tương đối ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối nhận được ở *Bước 1.*

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó

Bước 2. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối nhận được ở *Bước 1.*

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Thống kê khối lượng rau thu hoạch một vụ (đơn vị: tạ) của mỗi hộ gia đình trong 38 hộ gia đình tham gia chương trình trồng rau theo tiêu chuẩn VIETGAP như sau:

5	5	6	6	6	7	4	4	5	5	7	8	8
9	4	5	7	4	10	7	7	7	6	6	5	7
8	9	8	8	9	9	9	8	7	5	10	8	

a) Trong 38 số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

c) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Giải

a) Trong 38 số liệu thống kê ở trên có 7 giá trị khác nhau là:

$$x_1 = 4; x_2 = 5; x_3 = 6; x_4 = 7; x_5 = 8; x_6 = 9; x_7 = 10.$$

b) Tần số của giá trị $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ lần lượt là:

$$n_1 = 4; n_2 = 7; n_3 = 5; n_4 = 8; n_5 = 7; n_6 = 5; n_7 = 2.$$

c) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên như *Bảng 19* sau:

Số tạ (x)	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	4	7	5	8	7	5	2	$N = 38$

Bảng 19

Ví dụ 2 Tuổi nghề (đơn vị: năm) của 32 giáo viên ở một trường trung học cơ sở được ghi lại như sau:

7	7	10	3	4	4	9	3	3	7	7	10	9	7	10	4
12	4	3	12	9	12	9	10	7	7	12	9	7	10	10	4

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

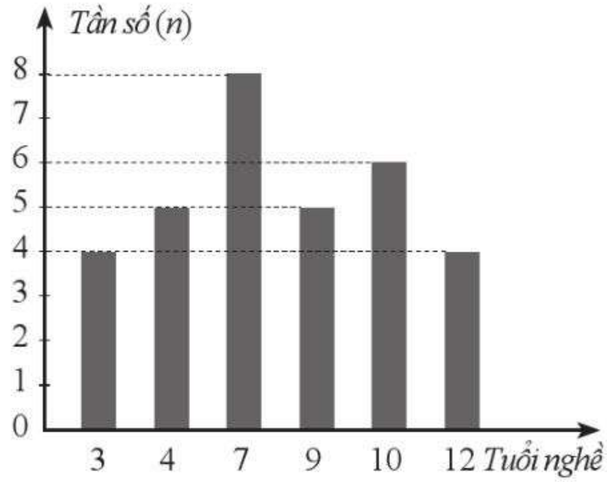
Giải

a) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó như *Bảng 20* sau:

Tuổi nghề (x)	3	4	7	9	10	12	Cộng
Tần số (n)	4	5	8	5	6	4	$N = 32$

Bảng 20

b) Biểu đồ tần số của mẫu số liệu thống kê đó như *Hình 12*.



Hình 12

Ví dụ 3 Trong bài thơ "*Quê hương*" của tác giả Đỗ Trung Quân có hai câu thơ:

"*Quê hương nếu ai không nhớ*

Sẽ không lớn nổi thành người".

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái H; N; G; L lần lượt xuất hiện trong hai câu thơ trên là: H; N; G; N; H; N; G; N; H; H; N; G; L; N; N; H; N; H; N; G. Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Giải

Mẫu dữ liệu thống kê đó có 20 dữ liệu ($N = 20$) và có 4 giá trị khác nhau là H; N; G; L. Các giá trị H; N; G; L lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$n_1 = 6; n_2 = 9; n_3 = 4; n_4 = 1;$

$f_1 = \frac{6 . 100}{20}\% = 30\%;\ f_2 = \frac{9 . 100}{20}\% = 45\%;$

$f_3 = \frac{4 . 100}{20}\% = 20\%;\ f_4 = \frac{1 . 100}{20}\% = 5\%.$

Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó như *Bảng 21* sau:

Chữ cái (x)	H	N	G	L	Cộng
Tần số tương đối (%)	30	45	20	5	100

Bảng 21

Ví dụ 4 Một công ty nông sản xuất khẩu 4 mặt hàng chủ lực là Chè (C), Hạt điều (Đ), Hạt tiêu (T), Sắn (S). 40 container hàng xuất khẩu của công ty được thông quan qua cửa khẩu quốc tế Móng Cái vào tháng 5 năm 2023 như sau:

C C C Đ Đ Đ Đ C C C T T S S S C C C Đ T

T T S Đ Đ C S S S C T T Đ Đ T T T C C T

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Giải

a) Mẫu dữ liệu thống kê đó có 40 dữ liệu ($N = 40$) và có 4 giá trị khác nhau là C, Đ, T, S.

Các giá trị C, Đ, T, S lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$n_1 = 13; n_2 = 9; n_3 = 11; n_4 = 7;$

$f_1 = \dfrac{13 \,.\, 100}{40}\% = 32{,}5\%; f_2 = \dfrac{9 \,.\, 100}{40}\% = 22{,}5\%;$

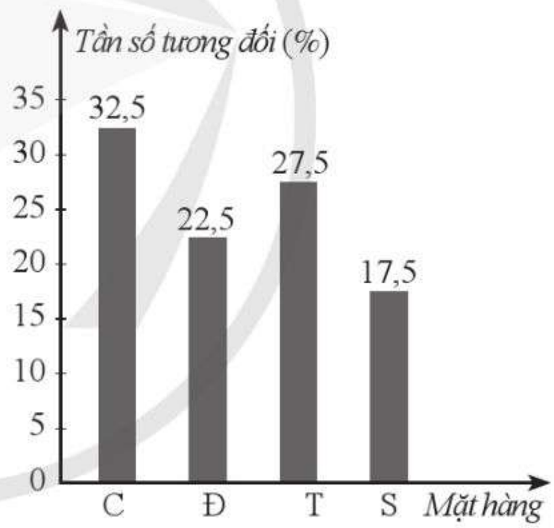
$f_3 = \dfrac{11 \,.\, 100}{40}\% = 27{,}5\%; f_4 = \dfrac{7 \,.\, 100}{40}\% = 17{,}5\%.$

Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó như *Bảng 22* sau:

Mặt hàng (*x*)	C	Đ	T	S	Cộng
Tần số tương đối (%)	32,5	22,5	27,5	17,5	100

Bảng 22

b) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó như *Hình 13*.



Hình 13

Ví dụ 5 Một trường trung học cơ sở thống kê số giờ (trung bình) chơi thể thao trong một tuần của 420 học sinh. Kết quả mẫu số liệu thống kê đó được cho ở bảng tần số sau (*Bảng 23*):

Số giờ chơi thể thao (*x*)	8	9	10	12	Cộng
Tần số (*n*)	147	126	84	63	$N = 420$

Bảng 23

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

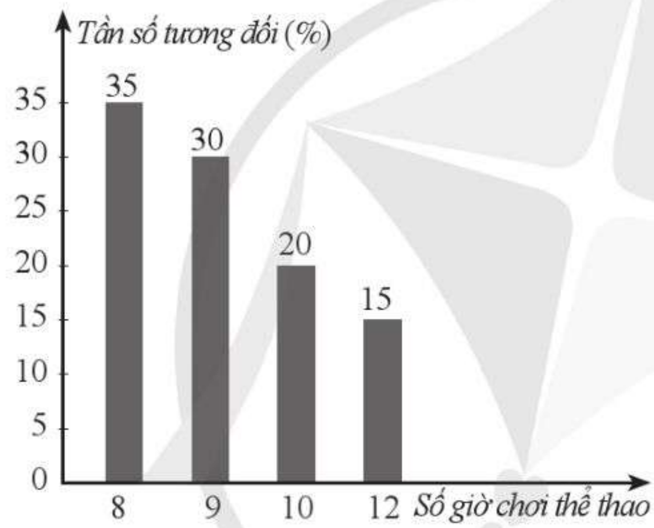
Giải

a) Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó như *Bảng 24* sau:

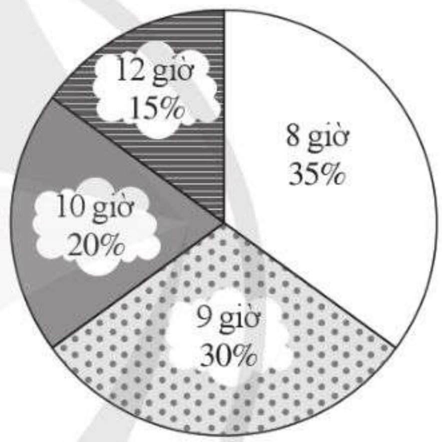
Số giờ chơi thể thao (x)	8	9	10	12	Cộng
Tần số tương đối (%)	35	30	20	15	100

Bảng 24

b) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó như *Hình 14*.



Hình 14



Hình 15

c) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó như *Hình 15*.

C. BÀI TẬP

12. Tổng điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO – hình thức thi trực tiếp) của Việt Nam đạt được trong các năm 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2022, 2023 được thống kê lần lượt như sau: 159; 161; 133; 113; 148; 180; 157; 151; 151; 155; 148; 177; 150; 196; 180. (*Nguồn: https://imo-official.org*)

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết có bao nhiêu số liệu thống kê ở trên.

b) Trong các số liệu thống kê ở trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

13. Thống kê lượng hàng bán được (đơn vị: chiếc) của 39 mặt hàng ở một siêu thị điện máy như sau:

4	7	4	5	7	9	5	10	4	8	5	8	9
9	5	10	8	4	5	7	5	10	9	4	7	4
8	9	8	4	9	8	9	5	10	5	7	10	9

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

14. Bác An ghi lại số cuộc điện thoại bác đã gọi trong mỗi ngày của tháng 2 năm 2023 như sau:

5	5	8	7	8	7	9	10	10	7	7	5	9	5
10	8	8	7	9	7	5	10	8	8	10	9	7	10

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

15. Thống kê số quyển sách quyên góp ủng hộ thư viện nhà trường của 100 học sinh khối 9 như sau:

50	38	35	38	50	38	27	38	47	27	27	35	38	32	38	32	35	32	35	32
38	38	35	32	35	38	38	50	32	47	27	38	35	27	47	35	38	38	32	35
35	35	27	32	38	35	32	32	38	32	38	35	27	38	27	38	27	32	38	38
38	32	38	32	35	27	35	38	32	27	50	32	27	35	47	32	38	27	32	32
38	27	35	38	35	47	35	38	35	38	35	35	35	35	35	27	50	38	32	38

a) Trong 100 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

16. Điểm kiểm tra môn Toán của 200 học sinh khối 9 được thống kê như *Bảng 25* sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	30	40	50	35	25	20

Bảng 25

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

17. Khối lượng thức ăn trung bình (đơn vị: gam) trong một ngày cho mỗi con lợn 50 kg của một số hộ gia đình được thống kê như sau:

2 200	2 100	2 150	2 100	2 100	2 150	2 200	2 100	2 100	2 050
2 100	2 200	2 050	2 050	2 100	2 100	2 150	2 200	2 150	2 200
2 200	2 050	2 150	2 100	2 200	2 200	2 150	2 100	2 150	2 100
2 100	2 200	2 150	2 150	2 100	2 200	2 050	2 100	2 100	2 150
2 100	2 100	2 200	2 150	2 200	2 050	2 050	2 200	2 100	2 150

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối (ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê đó.

18. Trong bài thơ "*Lượm*" nổi tiếng của nhà thơ Tố Hữu có những câu thơ:

"Chú bé loắt choắt
Cái xắc xinh xinh
Cái chân thoăn thoắt
Cái đầu nghênh nghênh…"

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái C; N; H; T; L lần lượt xuất hiện trong những câu thơ trên là:

C;	H;	L;	T;	C;	H;	T;	C;	C;	N;	H;
N;	H;	C;	C;	H;	N;	T;	H;	N;	T;	H;
T;	C;	N;	H;	N;	H;	N;	H;	N;	H.	

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu dữ liệu thống kê đó.

§3 TẦN SỐ GHÉP NHÓM. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Mẫu số liệu ghép nhóm

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện như sau:

– Tìm nửa khoảng [a ; b) sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng [a ; b);

– Ta thường phân chia nửa khoảng [a ; b) thành các nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Chú ý: Khi ghép nhóm số liệu, đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu.

Tần số ghép nhóm, bảng tần số ghép nhóm, biểu đồ tần số ghép nhóm

- Trong một mẫu số liệu ghép nhóm, tần số ghép nhóm (hay tần số) của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, …, nhóm m kí hiệu lần lượt là n_1, n_2, …, n_m.
- Để lập bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các nhóm của mẫu dữ liệu ghép nhóm và tìm tần số của mỗi nhóm đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Nhóm, Tần số (n)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi tên nhóm và tần số của nhóm đó

– Cột cuối cùng: Cộng, $N = \ldots$

Chú ý: Bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

- Để vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu được ghép nhóm đã cho

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số ghép nhóm nhận được ở *Bước 1* (các cột được ghép sát nhau).

Tần số tương đối ghép nhóm, bảng tần số tương đối ghép nhóm, biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

- Tần số tương đối ghép nhóm (hay tần số tương đối) f_i của nhóm i là tỉ số giữa tần số n_i của nhóm đó và số lượng N các số liệu trong mẫu số liệu thống kê: $f_i = \frac{n_i}{N}$. Ta thường viết tần số tương đối ghép nhóm dưới dạng phần trăm.
- Để lập bảng tần số tương đối ghép nhóm ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các nhóm của mẫu dữ liệu ghép nhóm và tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột.

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Nhóm, Tần số tương đối (%)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi nhóm và tần số tương đối của nhóm đó

– Cột cuối cùng: Cộng, 100.

Chú ý: Bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối ghép nhóm nhận được ở *Bước 1*.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho

Bước 2. Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối ghép nhóm nhận được ở *Bước 1*.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Thu nhập bình quân đầu người kí hiệu là GNIPC (Gross national income per capita, tính theo đô la Mỹ) của một số nền kinh tế thuộc khu vực châu Á Thái Bình Dương năm 2021 được thống kê như sau: 102 450, 70 700, 67 580, 55 290, 47 490, 45 440, 44 570, 28 730, 19 170, 18 530, 16 520, 13 790, 12 904, 11 090, 10 440, 9 450, 8 150, 7 220, 6 960, 5 800, 4 430, 4 340, 4 280, 4 230, 2 100.

(*Nguồn: statistica.com*)

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng sau: [1 027 ; 17 931), [17 931 ; 34 835), [34 835 ; 51 739), [51 739 ; 68 643), [68 643 ; 85 547), [85 547 ; 102 451).

b) Từ 01/7/2019, Ngân hàng Thế giới xác định một nền kinh tế ở mức thu nhập dưới trung bình nếu GNIPC từ 1 026 đến dưới 3 996, ở mức thu nhập trên trung bình nếu GNIPC từ 3 996 đến dưới 12 376 và ở mức thu nhập cao nếu GNIPC từ 12 376 trở lên. GNIPC của Việt Nam năm 2021 là 11 040. Nền kinh tế của Việt Nam năm 2021 được xếp ở mức nào và thuộc nửa khoảng nào trong sáu nửa khoảng nêu trên?

Giải

a) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng [1 027 ; 17 931), [17 931 ; 34 835), [34 835 ; 51 739), [51 739 ; 68 643), [68 643 ; 85 547), [85 547 ; 102 451) như *Bảng 26*.

b) GNIPC của Việt Nam năm 2021 là 11 040, vậy nền kinh tế của Việt Nam năm 2021 được xếp ở mức trên trung bình và thuộc nửa khoảng [1 027; 17 931).

Nhóm	**Tần số ghép nhóm (n)**
[1 027 ; 17 931)	15
[17 931 ; 34 835)	3
[34 835 ; 51 739)	3
[51 739 ; 68 643)	2
[68 643 ; 85 547)	1
[85 547 ; 102 451)	1
Cộng	$N = 25$

Bảng 26

Ví dụ 2 Điều tra về số tiền mua sách tham khảo (đơn vị: nghìn đồng) trong 6 tháng của 50 phụ huynh học sinh, người ta thu được kết quả sau:

493	705	568	710	895	983	880	819	580	998
432	906	880	514	996	901	642	787	809	690
987	532	984	710	665	836	873	489	537	609
745	437	948	818	552	927	947	653	406	442
788	732	468	896	435	872	492	668	471	561

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm sau: [400 ; 500), [500 ; 600), [600 ; 700), [700 ; 800), [800 ; 900), [900 ; 1 000).

b) Xét nhóm 20% phụ huynh được điều tra dành tiền để mua sách ít nhất. Người mua nhiều nhất trong nhóm phụ huynh này mua hết bao nhiêu tiền?

Giải

a) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng [400 ; 500), [500 ; 600), [600 ; 700), [700 ; 800), [800 ; 900), [900 ; 1 000) như *Bảng 27*.

b) Dựa vào *Bảng 27*, ta có nhóm 20% phụ huynh dành ít tiền để mua sách nhất là những phụ huynh thuộc nhóm [400 ; 500). Người mua nhiều nhất trong nhóm phụ huynh này mua hết 493 nghìn đồng.

Nhóm	**Tần số ghép nhóm (*n*)**
[400 ; 500)	10
[500 ; 600)	7
[600 ; 700)	6
[700 ; 800)	7
[800 ; 900)	10
[900 ; 1 000)	10
Cộng	$N = 50$

Bảng 27

Ví dụ 3 Số liệu thống kê các điểm số lớn hơn 69 với thang điểm 100 của 40 học sinh lớp 9 dự thi học sinh giỏi môn Tiếng Anh do nhà trường tổ chức được ghi lại như sau:

71	72	90	93	76	87	80	85	96	86
91	77	94	81	70	83	83	90	87	72
80	84	79	77	87	78	85	84	74	89
73	87	82	92	98	88	86	83	97	78

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm sau: [70 ; 75), [75 ; 80), [80 ; 85), [85 ; 90), [90 ; 95), [95 ; 100).

b) Nhà trường dành tặng 20 quyển vở và 10 quyển vở cho mỗi học sinh có điểm lần lượt thuộc các nửa khoảng [95 ; 100) và [90 ; 95). Tính tổng số quyển vở nhà trường thưởng cho các học sinh đã đạt số điểm thuộc các khoảng điểm đó.

Giải

a) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi ghép nhóm theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng: [70 ; 75), [75 ; 80), [80 ; 85), [85 ; 90), [90 ; 95), [95 ; 100) như *Bảng 28*.

b) Tổng số quyển vở nhà trường thưởng cho số học sinh có điểm thuộc các nửa khoảng [95 ; 100) và [90 ; 95) là:

20 . 3 + 10 . 6 = 120 (quyển vở).

Nhóm	**Tần số ghép nhóm (*n*)**
[70 ; 75)	6
[75 ; 80)	6
[80 ; 85)	9
[85 ; 90)	10
[90 ; 95)	6
[95 ; 100)	3
Cộng	$N = 40$

Bảng 28

Ví dụ 4 Một đội công nhân tham gia hội thi tay nghề giỏi. Mỗi công nhân phải hoàn thành bài thi (lí thuyết và thực hành) trong thời gian 120 phút. Thời gian hoàn thành bài thi của các công nhân trong đội đó được cho ở *Bảng 29*.

Thời gian (phút)	[90 ; 95)	[95 ; 100)	[100 ; 105)	[105 ; 110)	[110 ; 115)	[115 ; 120)
Số công nhân	3	5	6	7	9	10

Bảng 29

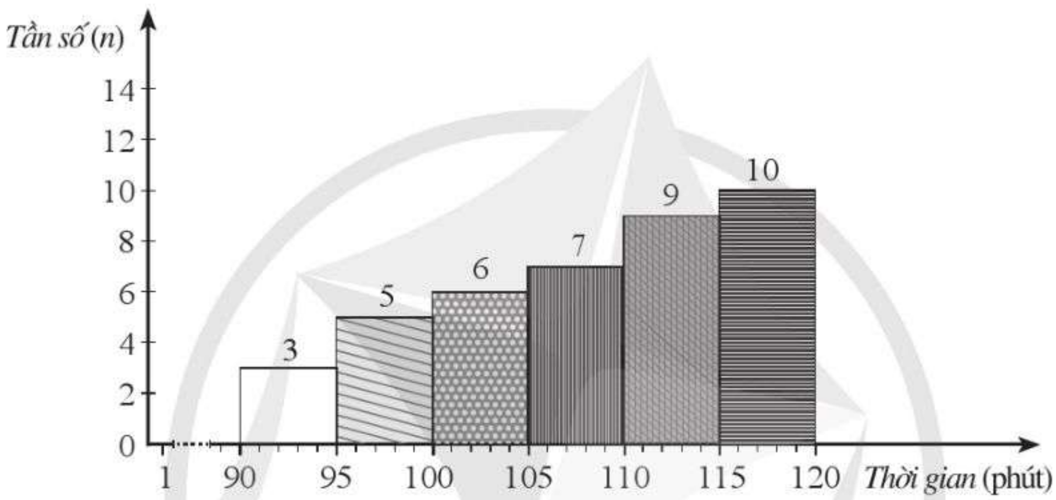
a) Tính số công nhân đã hoàn thành bài thi trước khi hết giờ trên 20 phút.

b) Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở *Bảng 29*.

Giải

a) Dựa vào *Bảng 29*, ta có số công nhân đã hoàn thành bài thi trước khi hết giờ trên 20 phút là: 3 + 5 = 8 (người).

b) *Hình 16* cho biết biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu được ghép nhóm nêu ở *Bảng 29*.



Hình 16

Ví dụ 5 *Bảng 30* cho biết tần số và tần số tương đối ghép nhóm của một mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	Tần số ghép nhóm (n)	Tần số tương đối ghép nhóm (%)
[10 ; 15)	4	f_1
[15 ; 20)	11	27,5
[20 ; 25)	7	17,5
[25 ; 30)	8	20
[30 ; 35)	a	f_5
Cộng	$N = 40$	100

Bảng 30

a) Tìm các giá trị của a, f_1, f_5.

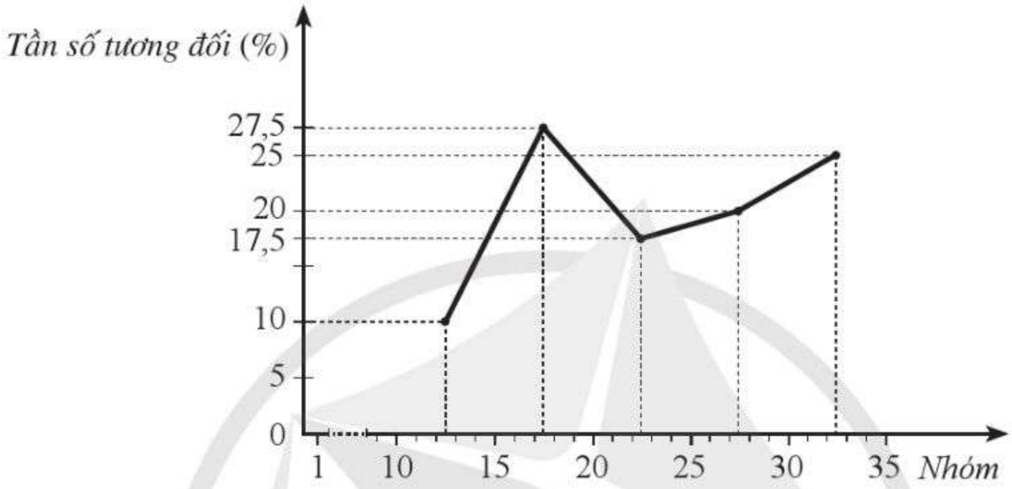
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở *Bảng 30*.

Giải

a) Ta có $4 + 11 + 7 + 8 + a = 40$. Do đó:

$$a = 10;\ f_1 = \frac{4 . 100}{40}\% = 10\%;\ f_5 = \frac{10 . 100}{40}\% = 25\%.$$

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu được ghép nhóm nêu ở *Bảng 30* được cho ở *Hình 17*.



Hình 17

C. BÀI TẬP

19. Một trường trung học cơ sở chọn 39 học sinh nữ khối 9 để đo chiều cao (đơn vị: cm) và thu được mẫu số liệu sau:

160	159	159	158	158	160	161	163	161	161
161	162	162	161	163	164	163	163	163	164
164	165	165	165	164	166	166	167	164	167
169	168	168	167	169	169	159	169	158	

Ghép các số liệu trên thành sáu nhóm theo các nửa khoảng có độ dài bằng nhau, ta được các nhóm đó là:

A. [158 ; 160), [160 ; 163), [163 ; 164), [164 ; 167), [167 ; 168), [168 ; 170).

B. [158 ; 160), [160 ; 162), [162 ; 164), [164 ; 166), [166 ; 168), [168 ; 170).

C. [158 ; 160), [160 ; 162), [162 ; 165), [165 ; 168), [168 ; 169), [169 ; 170).

D. [158 ; 161), [161 ; 164), [164 ; 167), [167 ; 168), [168 ; 169), [169 ; 170).

20. Mẫu số liệu ghép nhóm về lượng rau (đơn vị: tấn) thu được trong một năm của các đội sản xuất ở một hợp tác xã như *Bảng 31* sau:

Nhóm	[5 ; 10)	[10 ; 15)	[15 ; 20)	[20 ; 25)	[25 ; 30)	[30 ; 35)	Cộng
Tần số	2	4	3	5	4	2	$N = 20$

Bảng 31

Mẫu số liệu được chia thành số nhóm là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

21. Số tiền (đơn vị: triệu đồng) chi tiêu cho thực phẩm và đồ uống trong một tháng của 40 gia đình được thống kê như sau:

8,0	6,5	7,3	7,0	7,0	7,8	7,1	7,1	7,4	6,8
7,2	7,7	6,6	8,2	6,8	6,7	6,9	8,4	6,6	7,5
7,3	6,3	6,2	7,4	7,6	7,4	7,8	6,9	7,8	7,2
8,3	8,2	6,0	6,7	6,9	7,2	7,9	7,9	6,1	8,1

a) Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng sau:

[6,0 ; 6,5), [6,5 ; 7,0), [7,0 ; 7,5), [7,5 ; 8,0), [8,0 ; 8,5).

b) Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở câu a.

d) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở câu a.

22. Tìm hiểu thời gian (đơn vị: giờ) truy cập Internet trong tuần đầu tháng 4 của một số cán bộ ở một viện nghiên cứu thu được kết quả như ở *Bảng 32* sau:

Thời gian	[0 ; 5)	[5 ; 10)	[10 ; 15)	[15 ; 20)	[20 ; 25)
Số người	5	20	15	6	4

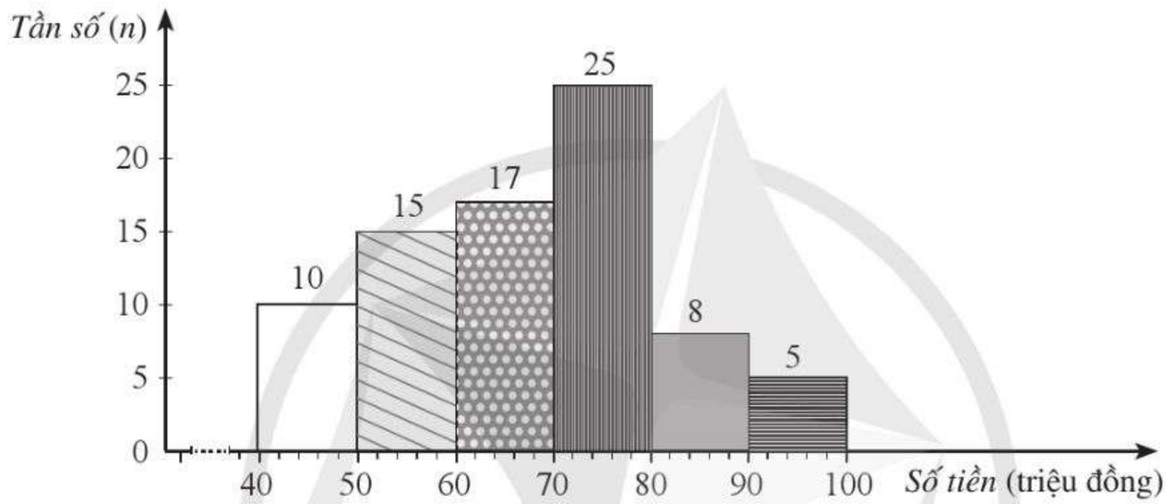
Bảng 32

a) Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

23. Một ngân hàng thống kê số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà 80 hộ gia đình vay để phát triển sản xuất. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm ở *Hình 18*.



Hình 18

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu được ghép nhóm đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

§4 PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

- Có những phép thử mà tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được. Những phép thử như thế gọi là phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) và tập hợp Ω gọi là không gian mẫu của phép thử.

- Các kết quả có thể xảy ra của một phép thử có khả năng xuất hiện như nhau được gọi là đồng khả năng.
- Kết quả thuận lợi cho biến cố A là một kết quả có thể của phép thử làm cho biến cố A xảy ra.

Xác suất của biến cố

- Giả thiết rằng các kết quả có thể xảy ra của một phép thử là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra:

$$P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho } A}{\text{Tổng số kết quả có thể xảy ra}}.$$

- Để tính xác suất của biến cố A, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Kiểm tra tính đồng khả năng đối với các kết quả có thể xảy ra của phép thử

Bước 2. Đếm số kết quả có thể xảy ra, tức là đếm số phần tử của không gian mẫu Ω

Bước 3. Đếm số kết quả thuận lợi cho biến cố A

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Xét phép thử "Gieo một đồng xu hai lần liên tiếp".

a) Nêu các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

Giải

a) Các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu là: NS, SN, NN, SS (trong đó: NS là kết quả lần đầu đồng xu xuất hiện mặt ngửa, lần thứ hai đồng xu xuất hiện mặt sấp; ...).

b) Không gian mẫu của phép thử đó là $\Omega = \{NS; SN; NN; SS\}$.

Ví dụ 2 Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số lớn hơn 70.

a) Tìm số phần tử của tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của biến cố A: "Số tự nhiên được viết ra là bội của 5".

Giải

a) Tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra là: $\Omega = \{71; 72; \ldots; 98; 99\}$. Do đó tập hợp Ω có 29 phần tử.

b) Các số tự nhiên được viết ra là bội của 5 là: 75, 80; 85; 90; 95. Do đó có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A: "Số tự nhiên được viết ra là bội của 5". Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{5}{29}$.

Ví dụ 3 Cho tập hợp $A = \{1; 2\}$ và $B = \{0; 3; 4\}$. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$, trong đó $a \in A$ và $b \in B$.

a) Viết tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của biến cố I: "Số tự nhiên được viết ra là ước của 48".

c) Tính xác suất của biến cố K: "Số tự nhiên được viết ra nhỏ hơn 20".

Giải

a) Tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra là:

$\Omega = \{10; 13; 14; 20; 23; 24\}$. Do đó, tập hợp Ω có 6 phần tử.

b) Số tự nhiên được viết ra là ước của 48 là số 24. Do đó có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố I: "Số tự nhiên được viết ra là ước của 48". Vậy xác suất của biến cố I là $P(I) = \frac{1}{6}$.

c) Các số tự nhiên được viết ra nhỏ hơn 20 là: 10; 13; 14. Do đó có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố K: "Số tự nhiên được viết ra nhỏ hơn 20". Vậy xác suất của biến cố K là $P(K) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4 Một hộp có chứa 3 viên bi vàng lần lượt ghi các số 1; 2; 3 và 2 viên bi nâu lần lượt ghi các số 4; 5. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp đó.

a) Viết tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với hai viên bi được lấy ra.

b) Tính xác suất của biến cố A: "Hai viên bi được lấy ra cùng màu".

Giải

a) Tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với hai viên bi được lấy ra là:

$\Omega = \{\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{1; 5\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\}\}$ (trong đó: $\{1; 2\}$ là kết quả lấy được viên bi ghi số 1 và viên bi ghi số 2, ...). Do đó tập hợp Ω có 10 phần tử.

b) Các trường hợp hai viên bi được lấy ra cùng màu là: $\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{4; 5\}$. Do đó có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố *A*: "Hai viên bi được lấy ra cùng màu". Vậy xác suất của biến cố *A* là $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

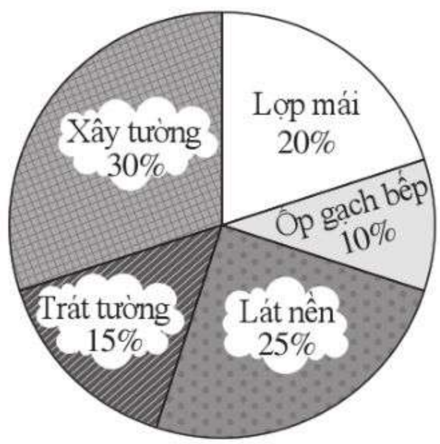
Ví dụ 5 Có 3 phong bì giống nhau lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3 và 3 con tem lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3. Dán 3 con tem đó vào 3 phong bì sao cho không có phong bì nào không có tem. Tính xác suất của biến cố *A*: "Lấy ra được 2 phong bì trong 3 phong bì trên sao cho mỗi phong bì đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó".

Giải

Ta có tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với 3 con tem được dán trên 3 phong bì là $\Omega = \{1\text{-}2\text{-}3; 1\text{-}3\text{-}2; 2\text{-}3\text{-}1; 2\text{-}1\text{-}3; 3\text{-}2\text{-}1; 3\text{-}1\text{-}2\}$ (trong đó: 1-2-3 là kết quả các phong bì ghi số 1, 2, 3 lần lượt được dán bởi các con tem ghi số 1, 2, 3; ...). Do đó, tập hợp Ω có 6 phần tử.

A là biến cố: "Lấy ra được 2 phong bì trong 3 phong bì trên sao cho mỗi phong bì đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó" nên phong bì còn lại cũng có số thứ tự giống với số thứ tự của con tem dán vào nó. Mặt khác, chỉ có một trường hợp như vậy. Do đó chỉ có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố *A*. Vậy xác suất của biến cố *A* là $P(A) = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 6 Mỗi công nhân của một đội xây dựng làm việc ở một trong năm bộ phận của đội đó là: Lợp mái, Ốp gạch bếp, Lát nền, Trát tường, Xây tường. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 19* thống kê tỉ lệ công nhân thuộc mỗi bộ phận. Chọn ngẫu nhiên một công nhân của đội. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:



Hình 19

a) A: "Công nhân được chọn thuộc bộ phận Trát tường";

b) B: "Công nhân được chọn không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái".

Giải

a) Số công nhân thuộc bộ phận Trát tường chiếm 15% tổng số công nhân của toàn đội.
Vậy $P(A) = \frac{15}{100} = 0,15$.

b) Ta có số công nhân thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái chiếm: 25% + 20% = 45% tổng số công nhân của toàn đội. Suy ra số công nhân không thuộc bộ phận Lát nền hoặc Lợp mái chiếm: 100% − 45% = 55% tổng số công nhân của toàn đội. Vậy $P(B) = \frac{55}{100} = 0,55$.

C. BÀI TẬP

24. Một hộp có 30 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 2, 4, 6, …, 60; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp".

a) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra lớn hơn 12 và là ước của 60";

B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra lớn hơn 2 và chia cho 8 dư 2";

C: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra chia hết cho cả 3 và 5".

25. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số không nhỏ hơn 80.

a) Viết tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Số tự nhiên được viết ra có chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị";

B: "Số tự nhiên được viết ra có chữ số hàng chục gấp hai hoặc gấp ba lần chữ số hàng đơn vị".

26. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số nhỏ hơn 400.

a) Tính số phần tử của tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Số tự nhiên được viết ra là lập phương của một số tự nhiên";

B: "Số tự nhiên được viết ra là số tự nhiên nhỏ nhất và khi chia số đó cho 5; 6; 7 có số dư lần lượt là 3; 2; 1".

27. Một đội học sinh gồm 7 bạn tham gia cuộc thi "An toàn giao thông cho học sinh trung học cơ sở" do nhà trường tổ chức. Trong đó có 5 bạn học sinh lớp 9 là: An (lớp 9A), Bình (lớp 9A), Bảo (lớp 9B), Bách (lớp 9D), Lâm (lớp 9E) và 4 bạn học sinh lớp 8 là: Minh (lớp 8A), Hà (lớp 8B), Ngọc (lớp 8C), Lan (lớp 8E). Chọn ngẫu nhiên một thí sinh trong đội học sinh tham gia cuộc thi đó.

a) Liệt kê các cách chọn có thể thực hiện được. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Thí sinh được chọn là học sinh lớp 8";

B: "Thí sinh được chọn là học sinh lớp 9A".

28. Một trường trung học cơ sở có 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ đạt giải cuộc thi viết thư quốc tế UPU. Bốn bạn học sinh đó được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để nhận phần thưởng. Tính xác suất của biến cố *I*: "2 học sinh nữ được xếp không đứng cạnh nhau".

29. Một hộp có chứa ba viên bi vàng lần lượt ghi các số 1; 2; 3 và hai viên bi nâu lần lượt ghi các số 4; 5. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Hai viên bi được lấy ra cùng màu vàng";

B: "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

30. Một hộp có chứa 15 quả cầu màu xanh được đánh số từ 1 đến 15 và 5 quả cầu màu đỏ được đánh số từ 16 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Quả cầu được lấy ra có màu xanh";

b) "Quả cầu được lấy ra ghi số chẵn";

c) "Quả cầu được lấy ra có màu xanh và ghi số lẻ chia cho 3 dư 1";

d) "Quả cầu được lấy ra có màu đỏ hoặc ghi số chẵn".

31. Đối với nhiều quốc gia, cảng biển có vai trò hết sức quan trọng trong phát triển kinh tế của đất nước. Đó là cửa ngõ giao thương hàng hoá xuất, nhập khẩu. 13 cảng biển lớn trên thế giới đã được lựa chọn trong danh sách sau: Thượng Hải (thuộc Trung Quốc), Singapore (thuộc Singapore), Busan (thuộc Hàn Quốc), Hải Phòng (thuộc Việt Nam), Durban (thuộc Nam Phi), Lagos (thuộc Nigeria), Container Kênh Suez (thuộc Ai Cập), Kenya Mombasa (thuộc Kenya), Rotterdam (thuộc Hà Lan), Antwerp (thuộc Bỉ), Hamburg (thuộc Đức), Valencia (thuộc Tây Ban Nha), Piraeus (thuộc Hy Lạp); mỗi nước chỉ có đúng một cảng biển được chọn. Chọn ngẫu nhiên một cảng biển trong 13 cảng biển đó.

a) Viết tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với cảng biển được chọn. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Cảng biển được chọn thuộc châu Á";

B: "Cảng biển được chọn thuộc châu Âu";

C: "Cảng biển được chọn thuộc châu Phi".

32. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có bốn chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố N: "Lấy được vé xổ số không có chữ số 3".

33. Trên mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $OABC$ sao cho $A(0 ; 3)$, $B(4 ; 3)$, $C(4 ; 0)$. Gọi Ω là tập hợp tất cả các điểm $(x ; y)$ với x, y là các số nguyên và nằm bên trong (không kể trên cạnh) của hình chữ nhật $OABC$. Lấy ngẫu nhiên một điểm của tập hợp Ω. Tính xác suất của biến cố M: "Điểm $(x ; y)$ của tập hợp Ω được lấy ra có $x + y < 5$".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

34. Các số liệu thống kê khối lượng (đơn vị: gam) của 24 con cá nuôi thử nghiệm trong ao ở hợp tác xã *A* được ghi lại như sau:

645	650	645	644	650	635	650	654
650	650	650	643	650	630	647	650
645	650	645	642	652	635	647	652

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau: [630 ; 635), [635 ; 640), [640 ; 645), [645 ; 650), [650 ; 655).

a) Tần số ghép nhóm của nhóm [650 ; 655) là:

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

b) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [640 ; 645) là:

A. 12,5%. **B.** 25%. **C.** 27%. **D.** 30%.

35. Một hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 21, 22, 23, …, 39, 40; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xác suất của biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra chia hết cho 2 và 3" là:

A. $\frac{10}{20}$. **B.** $\frac{5}{20}$. **C.** $\frac{7}{20}$. **D.** $\frac{3}{20}$.

36. *Bảng 33* cho biết số tiền bảo dưỡng máy móc của một xưởng sản xuất đồ cơ khí ở bốn tháng cuối năm 2023.

Tháng	9	10	11	12
Số tiền (đơn vị: triệu đồng)	15	24	20	36

Bảng 33

Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn kết quả thống kê trên.

37. Một công ty sản xuất bóng đèn kiểm tra định kì bằng cách thắp thử nghiệm 40 bóng đèn để kiểm tra tuổi thọ (đơn vị: giờ). Kết quả của cuộc thử nghiệm được thống kê như sau:

1 190	1 160	1 200	1 180	1 190	1 180	1 170	1 180	1 170	1 160
1 200	1 190	1 180	1 180	1 180	1 200	1 180	1 180	1 180	1 190
1 180	1 170	1 170	1 170	1 180	1 170	1 190	1 190	1 160	1 180
1 160	1 160	1 170	1 180	1 170	1 190	1 170	1 180	1 190	1 200

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

38. Kết quả điểm thi môn Ngữ Văn của lớp 9C được cho như ở *Bảng 34* sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	1	9	12	14	1	3	$N = 40$

Bảng 34

a) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

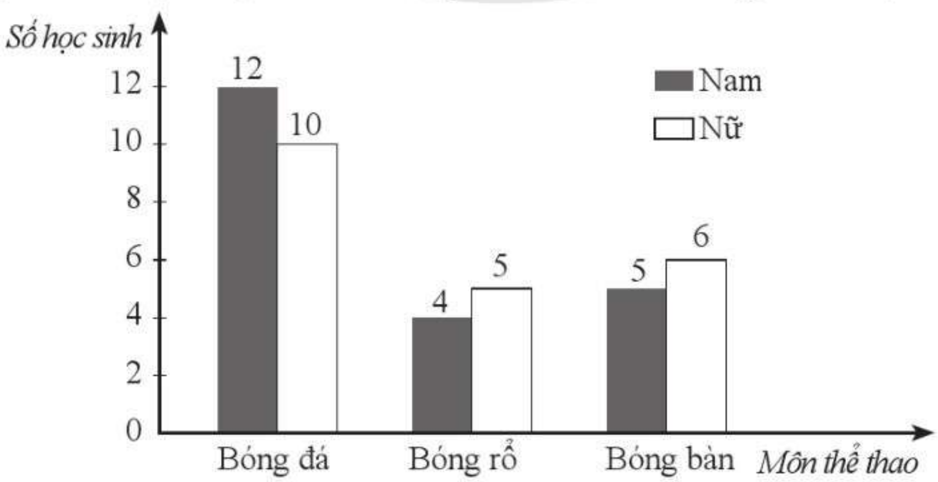
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

39. Thầy Nam điều tra sở thích chơi thể thao của học sinh lớp 9A do thầy phụ trách (mỗi học sinh chỉ nêu một môn thể thao yêu thích nhất). Biểu đồ cột kép ở *Hình 20* biểu diễn số học sinh nam và số học sinh nữ của lớp 9A có sở thích chơi một số môn thể thao: Bóng đá, Bóng rổ, Bóng bàn mà thầy Nam đã điều tra. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 9A tham gia điều tra. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) A: "Học sinh được chọn là nam";

b) B: "Học sinh được chọn là nữ và yêu thích môn Bóng đá";

c) C: "Học sinh được chọn là nam và yêu thích môn Bóng bàn hoặc Bóng rổ".



Hình 20

40. Một đoàn khách quốc tế tham quan vịnh Hạ Long có tỉ lệ khách người châu Âu là 27%. Chọn ngẫu nhiên một hành khách trong đoàn khách quốc tế đó. Tính xác suất của biến cố: "Hành khách được chọn là người châu Âu".

41. Một hộp có chứa 10 quả cầu màu đen được đánh số từ 1 đến 10 và 20 quả cầu màu vàng được đánh số từ 11 đến 30. Lấy ngẫu nhiên một quả trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) A: "Quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1";

b) B: "Quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3".

42. Có năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm và 10 cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Tính xác suất của biến cố E: "Ba đoạn thẳng được lấy ra lập thành ba cạnh của một tam giác".

43. Hai túi A và B chứa các tấm thẻ được đánh số. Túi A chứa 5 tấm thẻ màu đỏ được đánh số 1; 2; 3; 4; 5 và túi B chứa 4 tấm thẻ màu xanh được đánh số 1; 2; 3; 4. Trong mỗi túi A, B, hai tấm thẻ khác nhau được đánh số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên hai tấm thẻ, mỗi túi một tấm. Tính xác suất của biến cố N: "Tổng hai số trên hai tấm thẻ được lấy ra lớn hơn 6".

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

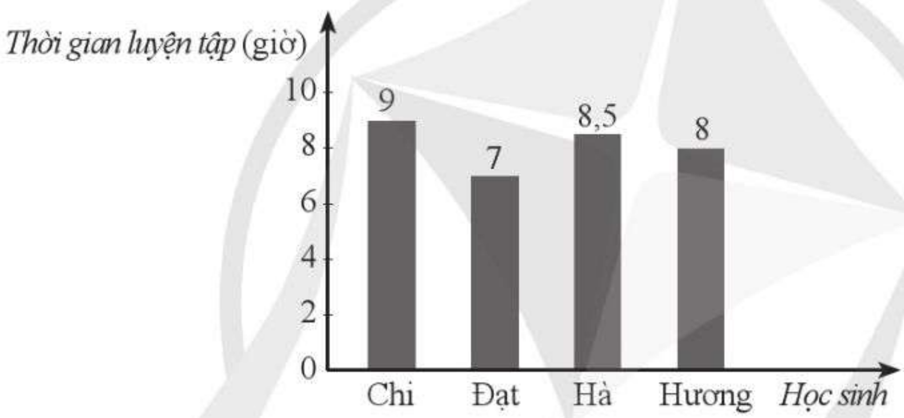
1.

Năm	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**
Số vốn đầu tư (đơn vị: tỉ đô la Mỹ)	38,9	28,53	31,15	27,72

2.

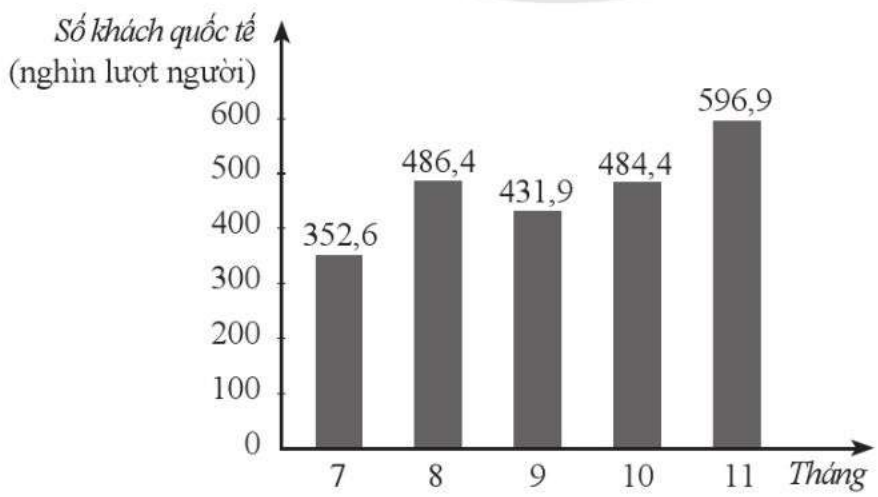
Nước	**Trung Quốc**	**Mỹ**	**Hàn Quốc**	**Rumani**	**Nhật Bản**	**Việt Nam**
Số huy chương Vàng	6	5	4	5	2	2

3.



4.

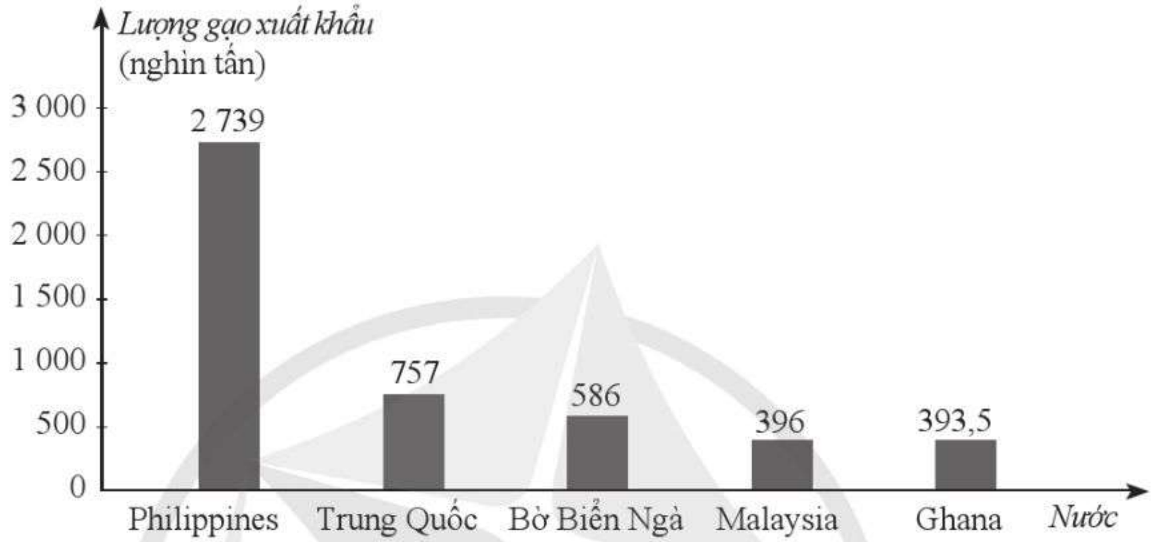
Tháng	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Số khách quốc tế (đơn vị: nghìn lượt người)	352,6	486,4	431,9	484,4	596,9



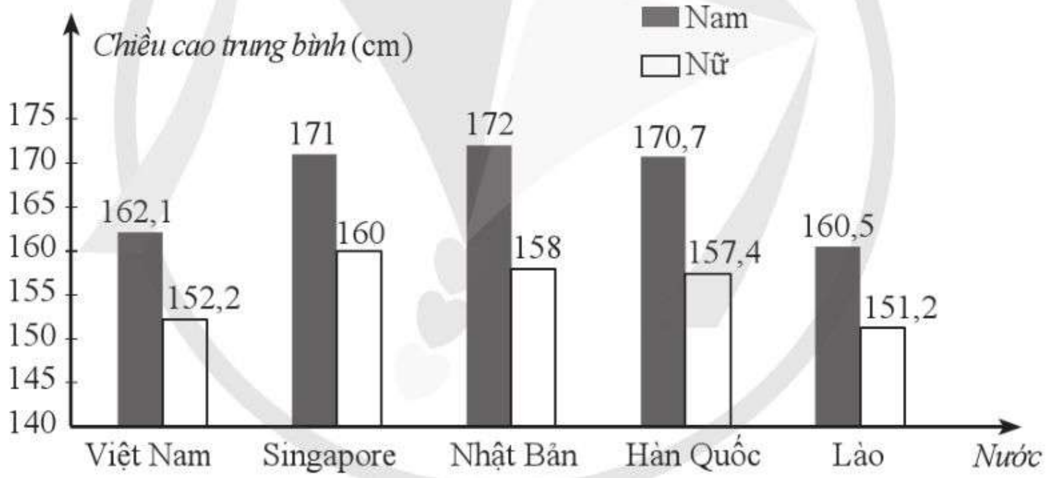
5. a) Số liệu 586 000 tấn được viết chưa hợp lí.

b)

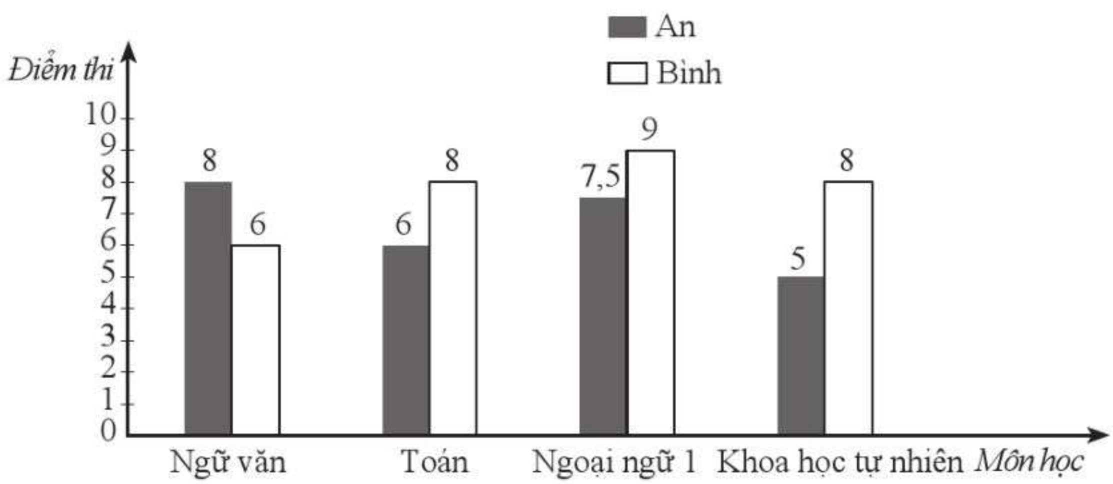
Nước	Philippines	Trung Quốc	Bờ Biển Ngà	Malaysia	Ghana
Lượng gạo xuất khẩu (đơn vị: nghìn tấn)	2 739	757	586	396	393,5



6.

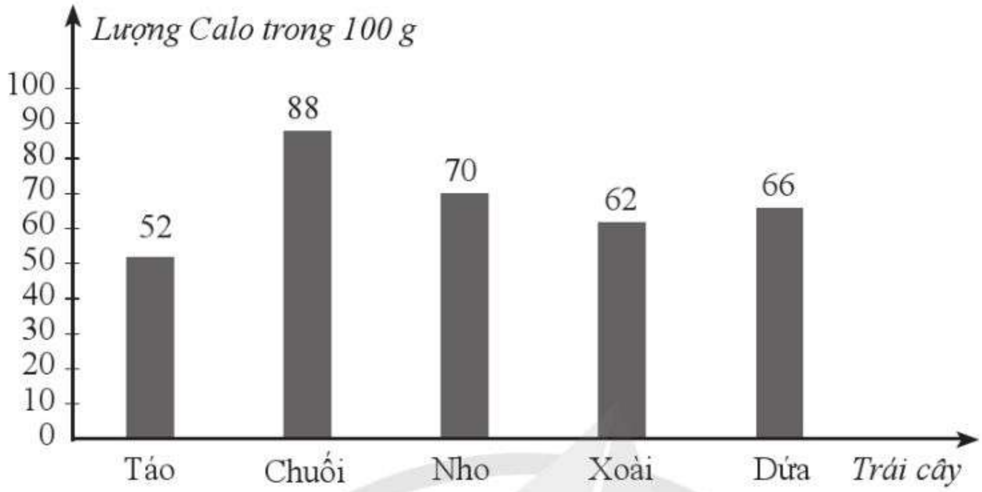


7.

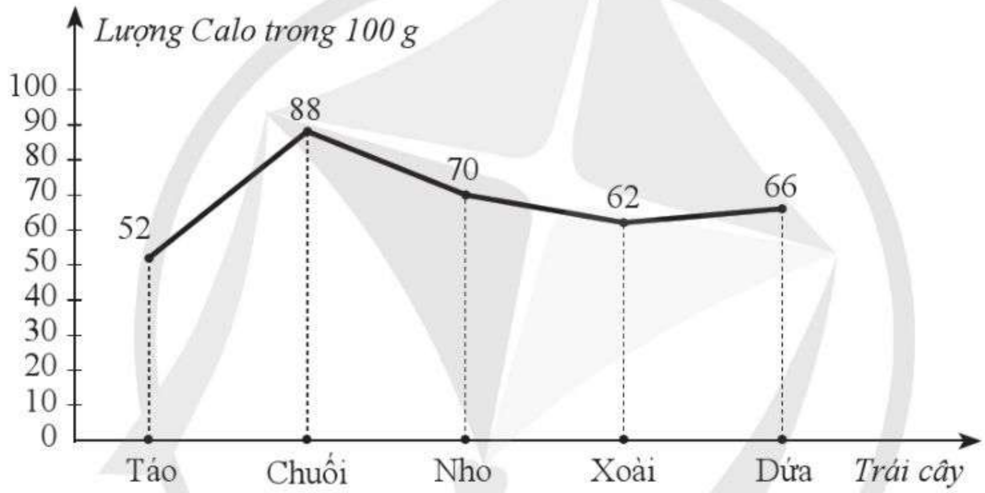


8. a)

Trái cây	Táo	Chuối	Nho	Xoài	Dứa
Lượng Calo trong 100 g	52	88	70	62	66



b)



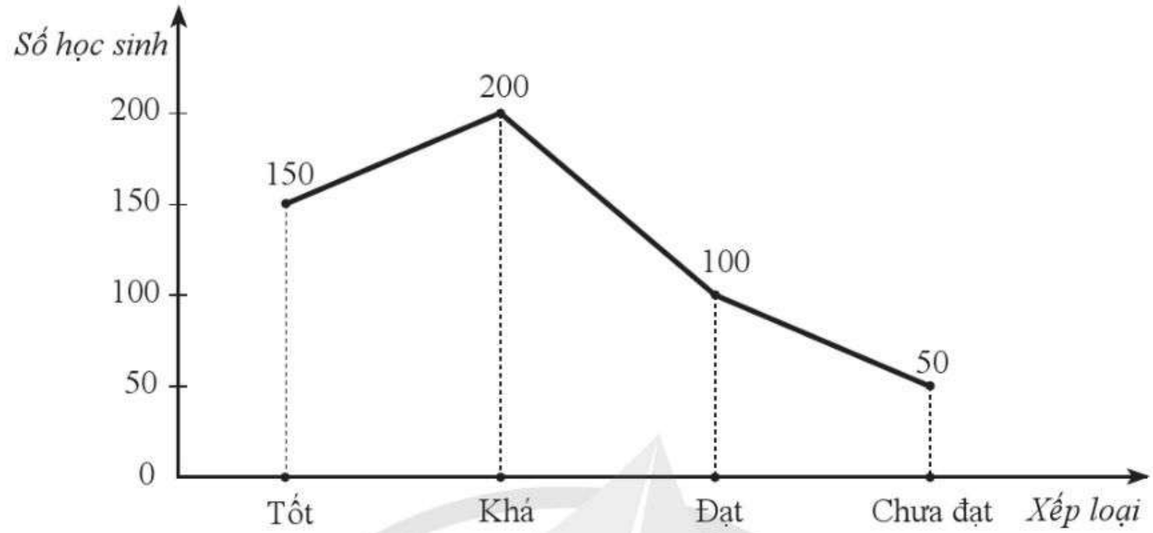
c) Tổng lượng Calo trong 100 g của trái táo và 100 g trái chuối là: $52 + 88 = 140$ (Calo). Tổng lượng Calo trong 100 g của trái nho, 100 g trái xoài và 100 g trái dứa là: $70 + 62 + 66 = 198$ (Calo). Ta có tỉ số phần trăm của 140 và 198 là: $\frac{140\,.\,100}{198}\% \approx 71\%$ và $71\% > 65\%$. Vậy phát biểu "Tổng lượng Calo trong 100 g của trái táo và 100 g trái chuối bằng 65% tổng lượng Calo trong 100 g của trái nho, 100 g trái xoài và 100 g trái dứa" là sai.

9. Tổng sản lượng lúa vụ Đông xuân, vụ Hè thu, vụ Mùa năm 2021 của Việt Nam là: $20{,}298 + 11{,}144 + 8{,}358 = 39{,}8$ (triệu tấn).

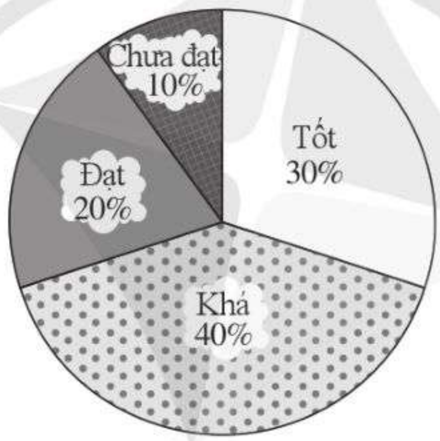
Tỉ số phần trăm của sản lượng lúa vụ Đông xuân, vụ Hè thu, vụ Mùa và tổng sản lượng lúa vụ Đông xuân, vụ Hè thu, vụ Mùa năm 2021 của Việt Nam lần lượt là: $\frac{20{,}298.100}{39{,}8}\% = 51\%$; $\frac{11{,}144.100}{39{,}8}\% = 28\%$; $\frac{8{,}358.100}{39{,}8}\% = 21\%$.

Do đó, ta có phát biểu "Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 11* biểu diễn các dữ liệu thống kê ở *Bảng 17*" là đúng.

10. a)



b)

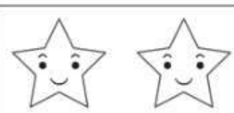


c) $\frac{3}{4}$.

11. a)

Loại hình nghệ thuật văn hoá dân gian	**Dân ca quan họ Bắc Ninh**	**Hát chèo**	**Múa rối nước**
Số học sinh	8	12	20

b)

Dân ca quan họ Bắc Ninh	
Hát chèo	
Múa rối nước	
 : 4 học sinh	

12. a) – Các đối tượng thống kê là: Tổng điểm mà các thành viên đội tuyển Olympic Toán quốc tế (IMO) của Việt Nam đạt được trong các năm 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2022, 2023.

– Có 15 số liệu thống kê.

b) Các số liệu thống kê đó có 12 giá trị khác nhau là:

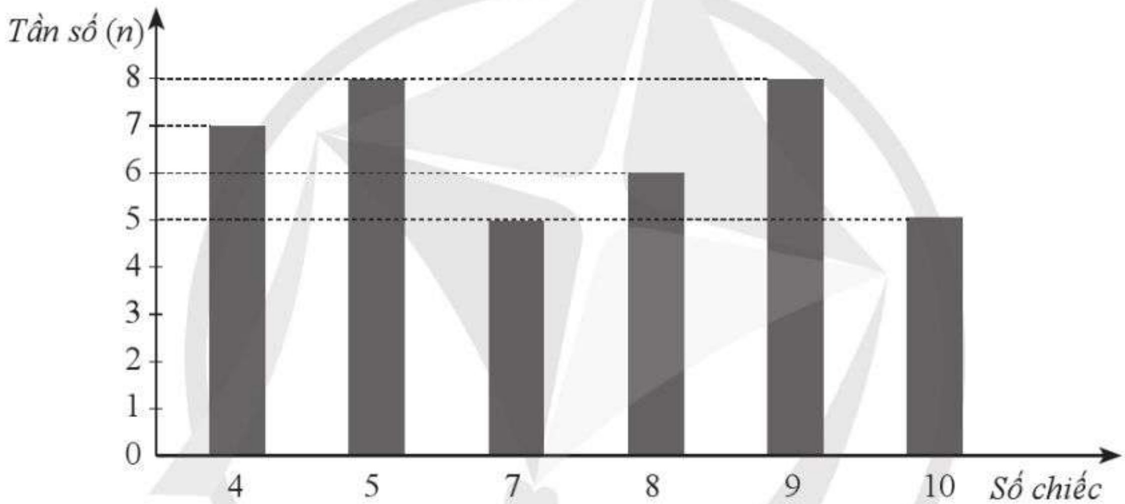
$x_1 = 113; x_2 = 133; x_3 = 148; x_4 = 150; x_5 = 151; x_6 = 155;$

$x_7 = 157; x_8 = 159; x_9 = 161; x_{10} = 177; x_{11} = 180; x_{12} = 196.$

13. a)

Số chiếc (x)	4	5	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	7	8	5	6	8	5	$N = 39$

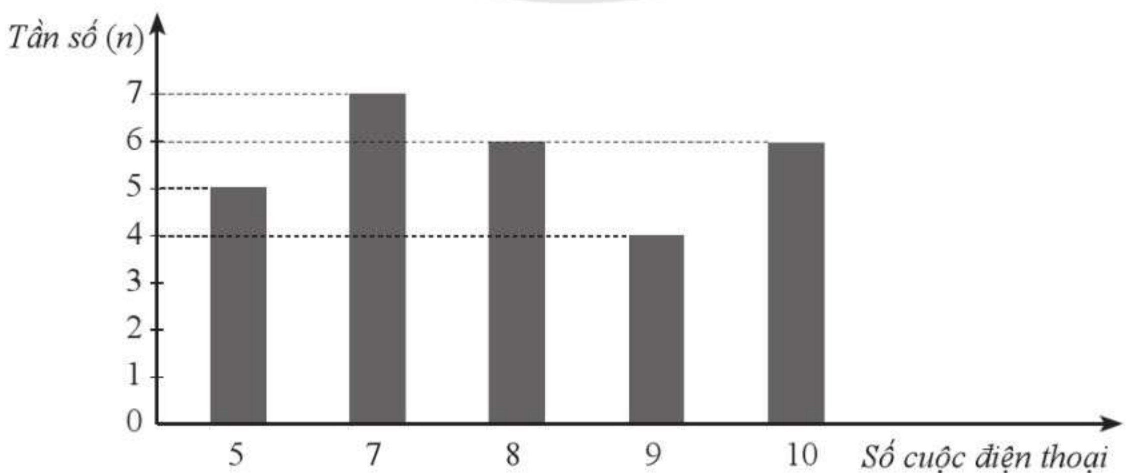
b)



14. a)

Số cuộc điện thoại (x)	5	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	5	7	6	4	6	$N = 28$

b)



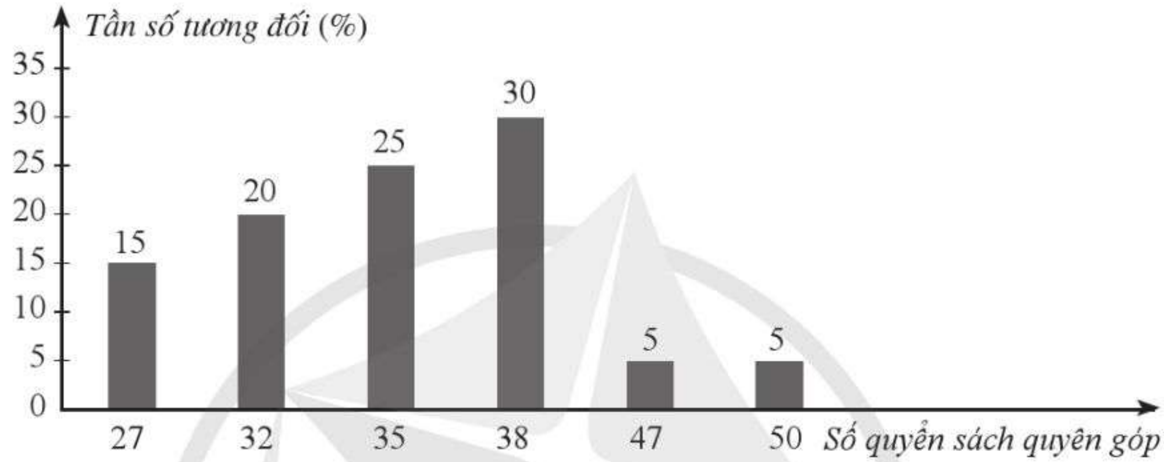
15. a) Trong 100 số liệu thống kê ở trên có 6 giá trị khác nhau là:

$$x_1 = 27; x_2 = 32; x_3 = 35; x_4 = 38; x_5 = 47; x_6 = 50.$$

b)

Số quyển sách quyên góp (x)	27	32	35	38	47	50	Cộng
Tần số tương đối (%)	15	20	25	30	5	5	100

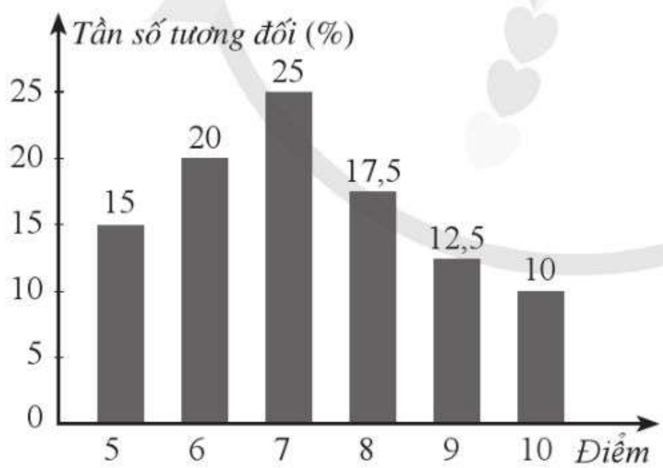
c)

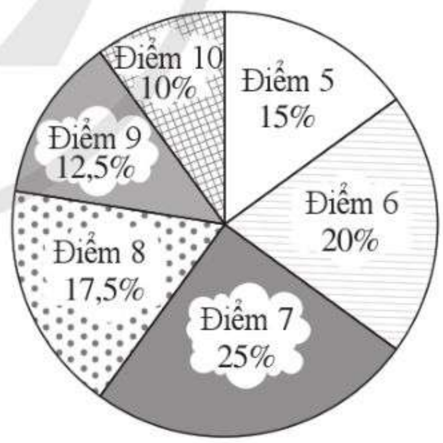


16. a)

Điểm (x)	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số tương đối (%)	15	20	25	17,5	12,5	10	100

b)

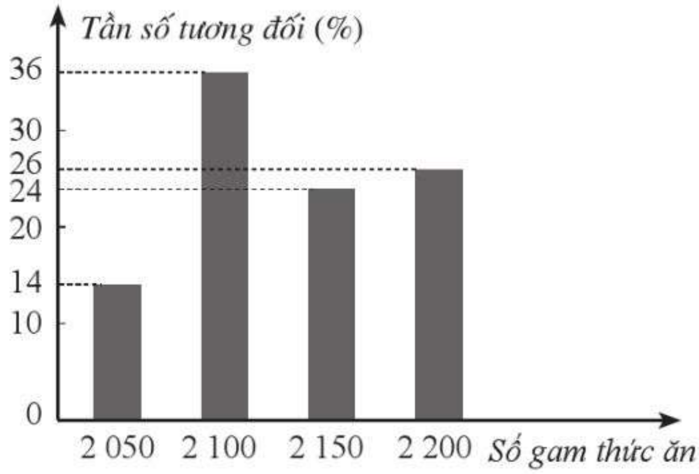


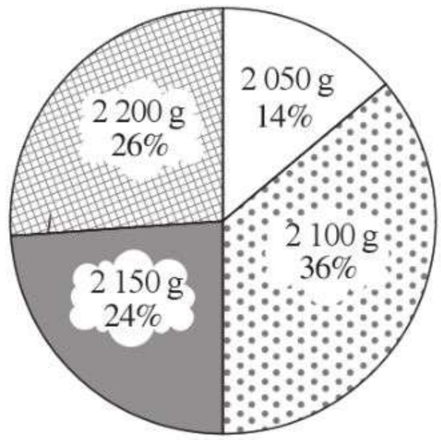


17. a)

Số gam thức ăn (x)	2 050	2 100	2 150	2 200	Cộng
Tần số tương đối (%)	14	36	24	26	100

b)

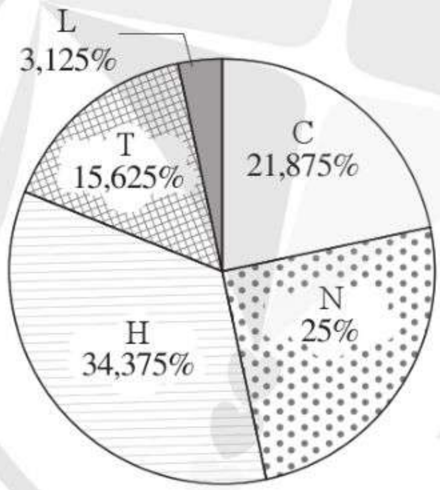




18. a) C; N; H; T; L lần lượt có tần số là: $n_1 = 7$; $n_2 = 8$; $n_3 = 11$; $n_4 = 5$; $n_5 = 1$.

Chữ cái (x)	C	N	H	T	L	Cộng
Tần số tương đối (%)	21,875	25	34,375	15,625	3,125	100

b)



19. B.

20. C.

21. a)

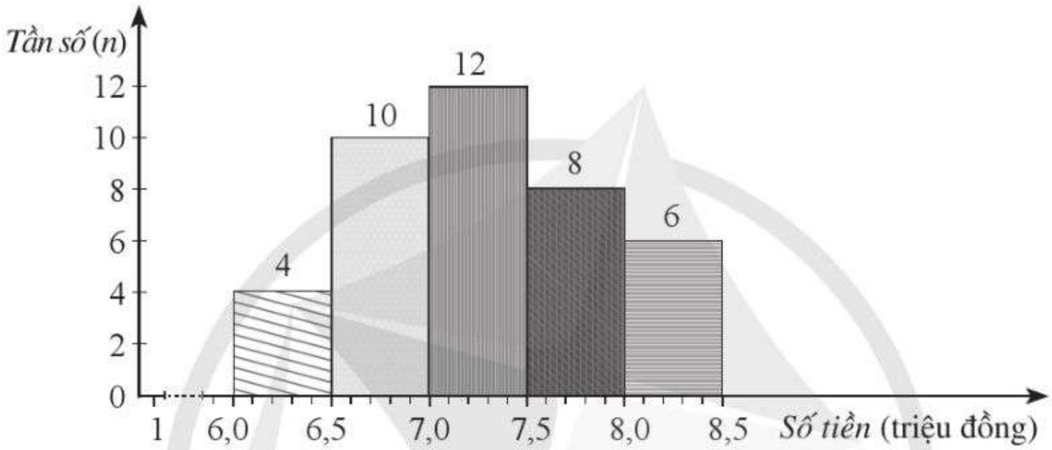
Nhóm	[6,0 ; 6,5)	[6,5 ; 7,0)	[7,0 ; 7,5)	[7,5 ; 8,0)	[8,0 ; 8,5)
Số liệu	6,3; 6,2; 6,0; 6,1	6,5; 6,6; 6,7; 6,8; 6,9; 6,7; 6,9; 6,9; 6,6; 6,8	7,2; 7,3; 7,3; 7,0; 7,4; 7,0; 7,4; 7,2; 7,1; 7,1; 7,4; 7,2	7,7; 7,6; 7,8; 7,8; 7,9; 7,9; 7,8; 7,5	8,0; 8,3; 8,2; 8,2; 8,4; 8,1

b)

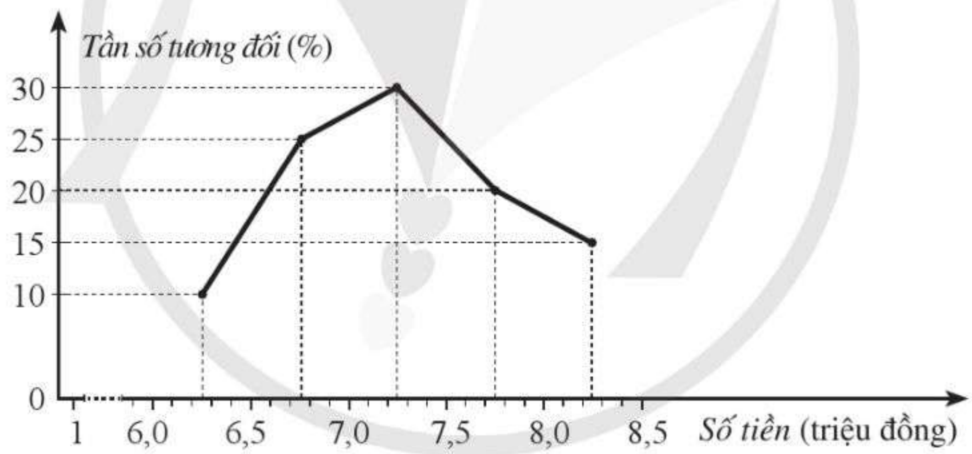
Nhóm	Tần số (n)
[6,0 ; 6,5)	4
[6,5 ; 7,0)	10
[7,0 ; 7,5)	12
[7,5 ; 8,0)	8
[8,0 ; 8,5)	6
Cộng	N = 40

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[6,0 ; 6,5)	10
[6,5 ; 7,0)	25
[7,0 ; 7,5)	30
[7,5 ; 8,0)	20
[8,0 ; 8,5)	15
Cộng	100

c)



d)

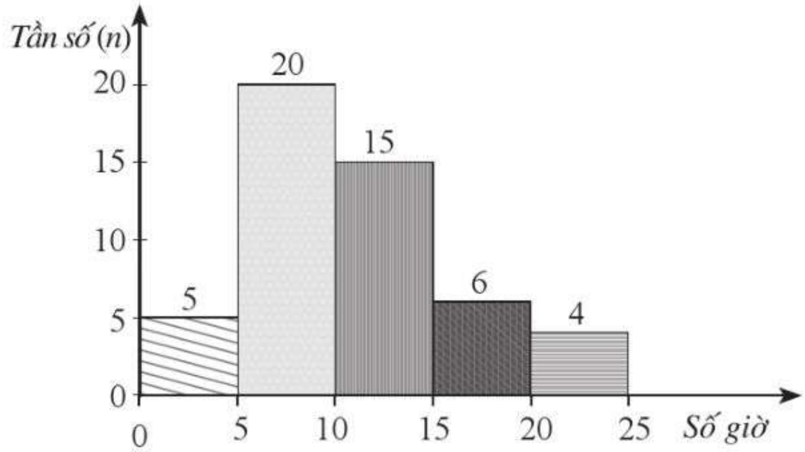


22. a)

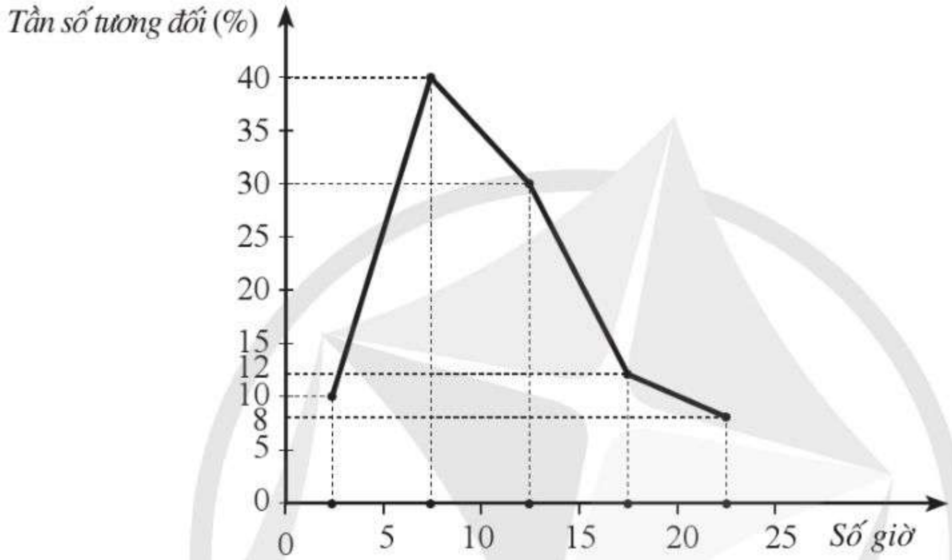
Nhóm	Tần số (n)
[0 ; 5)	5
[5 ; 10)	20
[10 ; 15)	15
[15 ; 20)	6
[20 ; 25)	4
Cộng	N = 50

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[0 ; 5)	10
[5 ; 10)	40
[10 ; 15)	30
[15 ; 20)	12
[20 ; 25)	8
Cộng	100

b)



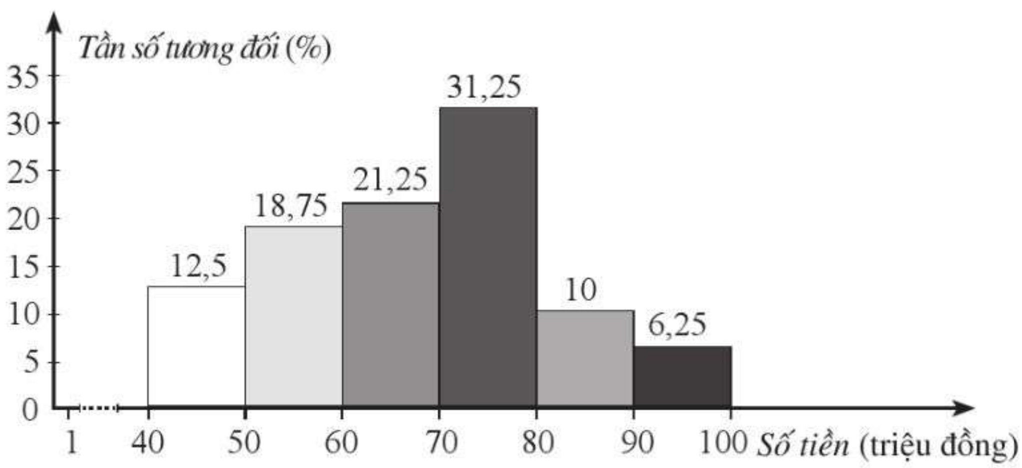
c)



23. a)

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[40 ; 50)	12,5
[50 ; 60)	18,75
[60 ; 70)	21,25
[70 ; 80)	31,25
[80 ; 90)	10
[90 ; 100)	6,25
Cộng	100

b)



24. a) Các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là: 2; 4; 6; ...; 60.

b) – Các số xuất hiện trên thẻ được rút ra lớn hơn 12 và là ước của 60 là: 20; 30; 60.

Vậy $P(A) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.

– Các số xuất hiện trên thẻ được rút ra chia cho 8 dư 2 là: 10; 18; 26; 34; 42; 50; 58. Vậy $P(B) = \frac{7}{30}$.

– Các số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho cả 3 và 5 là: 30; 60.

Vậy $P(C) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

25. a) $\Omega = \{80; 81; ...; 98; 99\}$.

b) – Số tự nhiên được viết ra có chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là: 80; 81; 82; 83; 84; 85; 86; 87; 90; 91; 92; 93; 94; 95; 96; 97; 98.

Vậy $P(A) = \frac{17}{20}$.

– Số tự nhiên được viết ra có chữ số hàng chục gấp hai hoặc gấp ba lần chữ số hàng đơn vị là: 84; 93. Vậy $P(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

26. a) $\Omega = \{100; 101; ...; 399\}$. Vậy số phần tử của Ω là 300.

b) – Số tự nhiên được viết ra là lập phương của một số tự nhiên là: 125; 216; 343.

Vậy $P(A) = \frac{3}{300} = \frac{1}{100}$.

– Gọi số tự nhiên phải tìm là a, theo đề bài ta có $100 \leq a < 400$. Do a chia cho 5 có số dư là 3 nên $a - 3 - 5$ chia hết cho 5. Tương tự $a - 2 - 6$ chia hết cho 6 và $a - 1 - 7$ chia hết cho 7 hay $a - 8$ chia hết cho 5; 6; 7. Do đó, ta có $a - 8 \in BC(5; 6; 7)$. Mặt khác, $a \in \mathbb{N}$ và $100 \leq a < 400$ nên $a - 8 = 210$.

Suy ra $a = 218$. Vậy $P(B) = \frac{1}{300}$.

27. a) Các cách chọn một thí sinh có thể thực hiện được là: An (lớp 9A); Bình (lớp 9A); Bảo (lớp 9B); Bách (lớp 9D); Lâm (lớp 9E); Minh (lớp 8A); Hà (lớp 8B); Ngọc (lớp 8C); Lan (Lớp 8E). Do đó có tất cả 9 kết quả có thể xảy ra.

b) – Các thí sinh lớp 8 có thể được chọn ra là: Minh (lớp 8A); Hà (lớp 8B); Ngọc (lớp 8C); Lan (lớp 8E). Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{9}$.

– Các thí sinh lớp 9A có thể được chọn ra là An (lớp 9A); Bình (lớp 9A). Vậy $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}$.

28. Có 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ xếp thành hàng ngang; do đó có 24 cách sắp xếp (1). Gọi hai học sinh nam là A; B và 2 học sinh nữ là C; D. Ta có 12 cách xếp để hai học sinh nữ C; D đứng cạnh nhau đó là: ACDB; ADCB; BCDA; BDCA; ABCD; ABDC; BACD; BADC; CDAB; CDBA; DCAB; DCBA (2). Từ (1) và (2) ta có số cách xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau là: $24 - 12 = 12$ (cách). Do đó có 12 kết quả thuận lợi cho biến cố I. Vậy xác suất của biến cố I: "2 học sinh nữ được xếp không đứng cạnh nhau" là: $\mathrm{P}(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

29. $\Omega = \{\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{1; 5\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\}\}$. Do đó, tập hợp Ω có 10 phần tử.

– Các khả năng để hai viên bi được lấy ra cùng màu vàng là: $\{1; 2\}$;$\{1; 3\}$;$\{2; 3\}$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$.

– Các khả năng để hai viên bi được lấy ra khác màu là: $\{1; 4\}$; $\{1; 5\}$; $\{2; 4\}$; $\{2; 5\}$; $\{3; 4\}$; $\{3; 5\}$. Vậy $\mathrm{P}(B) = \frac{6}{10}$.

30. a) $\frac{3}{4}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{3}{20}$. d) $\frac{3}{5}$.

31. Học sinh tự làm.

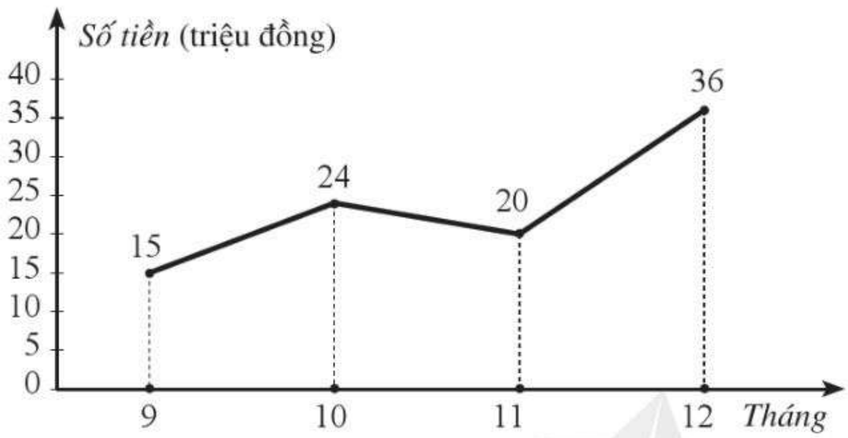
32. Số các vé xổ số có bốn chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9 là 10^4. Số các vé xổ số không có chữ số 3 là 9^4. Do đó có 9^4 kết quả thuận lợi cho biến cố N. Vậy $\mathrm{P}(N) = \frac{9^4}{10^4} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = (0,9)^4 = 0,6561$.

33. Ta có $\Omega = \{A_1(1 ; 1); A_2(2 ; 1); A_3(3 ; 1); A_4(1 ; 2); A_5(2 ; 2); A_6(3 ; 2)\}$. Dễ thấy tập Ω có 6 phần tử. Trong tất cả các điểm của tập Ω, các điểm A_1; A_2; A_3; A_4; A_5 mỗi điểm có hoành độ x và tung độ y thoả mãn $x + y < 5$. Do đó có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố M. Vậy $\mathrm{P}(M) = \frac{5}{6}$.

34. a) **C.** b) **A.**

35. D.

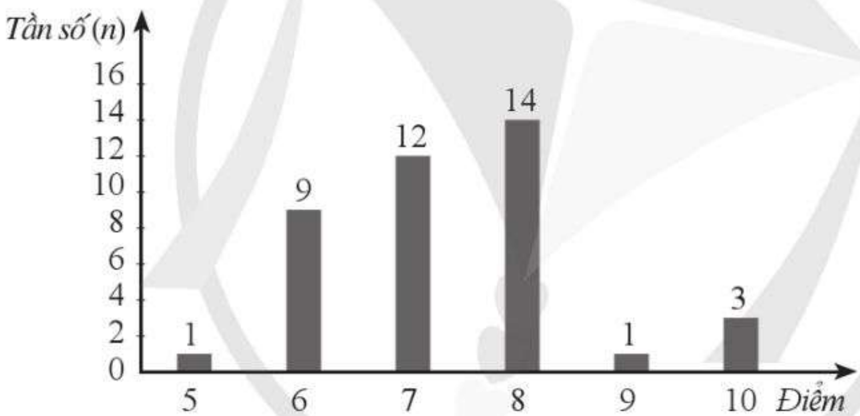
36.



37.

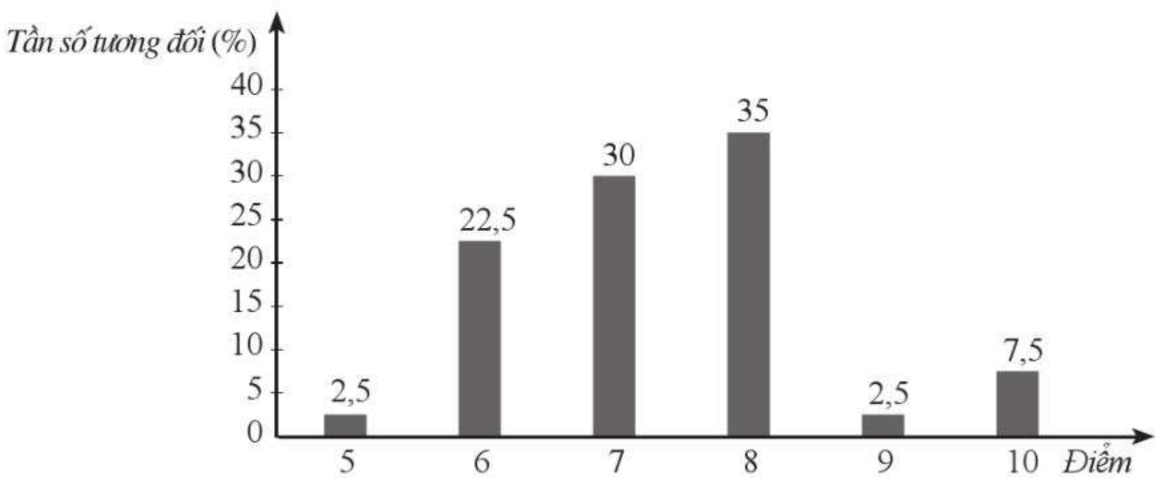
Tuổi thọ bóng đèn (giờ)	1 160	1 170	1 180	1 190	1 200	Cộng
Tần số	5	9	14	8	4	$N = 40$

38. a)



b)

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số tương đối (%)	2,5	22,5	30	35	2,5	7,5	100



39. a) $P(A) = \frac{1}{2}$. b) $P(B) = \frac{5}{21}$. c) $P(C) = \frac{3}{14}$.

40. Học sinh tự làm.

41. Ta có tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với quả cầu được lấy ra từ hộp đó là: Ω = {1; 2; 3; …; 30}. Do đó, tập hợp Ω có 30 phần tử.

a) Các trường hợp quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1 là: 1; 4; 7; 10. Do đó có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố *A*: "Quả cầu được lấy ra có màu đen và ghi số chia cho 3 dư 1". Vậy xác suất của biến cố *A* là: $P(A) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

b) Các trường hợp quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3 là: 5; 7; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; ….; 29; 30. Do đó có 23 kết quả thuận lợi cho biến cố *B*: "Quả cầu được lấy ra có màu vàng hoặc ghi số lẻ lớn hơn 3". Vậy xác suất của biến cố *B* là: $P(B) = \frac{23}{30}$.

42. Có 10 cách lấy ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2 cm; 4 cm; 6 cm; 8 cm và 10 cm. Các cách lấy như sau: {2 cm; 4 cm; 6 cm}; {2 cm; 4 cm; 8 cm}; {2 cm; 4 cm; 10 cm}; {2 cm; 6 cm; 8 cm}; {2 cm; 6 cm; 10 cm}; {2 cm; 8 cm; 10 cm}; {4 cm; 6 cm; 8 cm}; {4 cm; 6 cm; 10 cm}; {4 cm; 8 cm; 10 cm}; {6 cm; 8 cm; 10 cm}. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là 10. Trong 10 bộ ba đoạn thẳng đó có 3 bộ ba các đoạn thẳng lập thành ba cạnh của một tam giác là: {4 cm; 6 cm; 8 cm}; {4 cm; 8 cm; 10 cm}; {6 cm; 8 cm; 10 cm}. Do đó có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố *E*. Vậy $P(E) = \frac{3}{10}$.

43. Ta có Ω = {(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4)}. Tập Ω có 20 phần tử. Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố *N* là: (3; 4); (4; 3); (4; 4); (5; 2); (5; 3); (5; 4). Vậy $P(N) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Chương VII

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1 HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

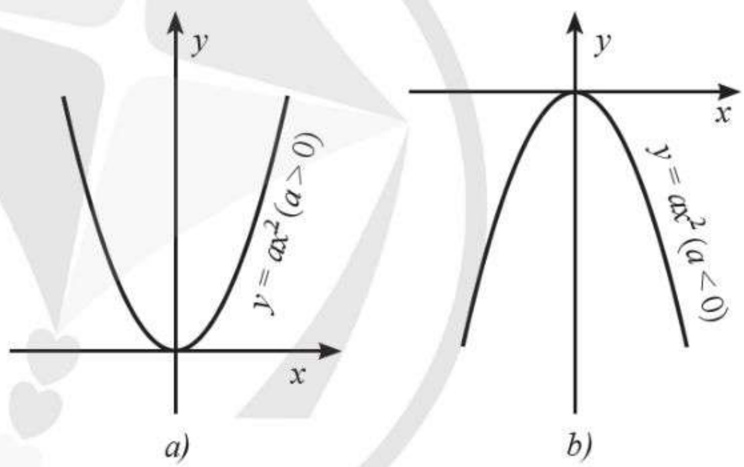
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong được gọi là parabol. Parabol đó luôn đi qua gốc toạ độ và có dạng như ở *Hình 1*.
- Nếu $a > 0$ thì đồ thị đó nằm phía trên trục hoành (*Hình 1a*). Ngược lại, nếu $a < 0$ thì đồ thị đó nằm phía dưới trục hoành (*Hình 1b*).



Hình 1

- Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng giá trị để tìm giá trị của y tương ứng với một số giá trị cụ thể của x

Bước 2. Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm cụ thể thuộc đồ thị của hàm số đó

Bước 3. Vẽ parabol đi qua gốc toạ độ và các điểm đã xác định ở *Bước 2*, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

- Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

a) Chứng tỏ rằng diện tích xung quanh của một hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy và độ dài trung đoạn đều bằng x là hàm số bậc hai của x.

b) Tính diện tích xung quanh của một hình chóp tam giác đều, biết độ dài cạnh đáy và độ dài trung đoạn đều bằng 5 dm.

Giải

a) Gọi diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng x và độ dài trung đoạn bằng x là y. Ta có $y = \frac{1}{2} \cdot (x + x + x) \cdot x$ hay $y = \frac{3x^2}{2}$, đó là một hàm số bậc hai của x.

b) Ta có $x = 5$ (dm) nên $y = \frac{3 \cdot 5^2}{2} = 37{,}5$ (dm^2). Vậy diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó là 37,5 dm^2.

Ví dụ 2 Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 180 m. Quãng đường chuyển động là s (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi hàm số $s = 5t^2$.

a) Tính quãng đường chuyển động của vật rơi đó sau thời gian 2 giây và sau thời gian 4,5 giây.

b) Sau bao lâu vật rơi đó tiếp đất?

Giải

a) Quãng đường chuyển động của vật rơi đó sau thời gian 2 giây là: $s = 5 \cdot 2^2 = 20$ (m).

Quãng đường chuyển động của vật rơi đó sau thời gian 4,5 giây là: $s = 5 \cdot 4{,}5^2 = 101{,}25$ (m).

b) Khi vật rơi đó tiếp đất ta có: $s = 5t^2 = 180$. Do đó $t^2 = 180 : 5 = 36$. Suy ra $t = 6$ (giây). Vậy vật rơi đó tiếp đất sau thời gian là 6 giây.

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = f(x) = -3x^2$. Tính tổng các giá trị của k thoả mãn $f(k) = -12 + 6\sqrt{3}$.

Giải

Do $f(k) = -3k^2$ và $f(k) = -12 + 6\sqrt{3}$ nên $-3k^2 = -12 + 6\sqrt{3}$ hay $k^2 = (\sqrt{3} - 1)^2$.
Suy ra: $k^2 - (\sqrt{3} - 1)^2 = 0$ hay $[k + (\sqrt{3} - 1)] \cdot [k - (\sqrt{3} - 1)] = 0$.

Do đó: $k = -\sqrt{3} + 1$ hoặc $k = \sqrt{3} - 1$. Dễ thấy: $(-\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1) = 0$.

Vậy tổng các giá trị của k thoả mãn $f(k) = -12 + 6\sqrt{3}$ là 0.

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = (m-1)x^2$ $(m \neq 1)$. Tìm m để đồ thị hàm số đó đi qua điểm $K(x\,;\,y)$ với $(x\,;\,y)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = -2 \\ -3x + 2y = 3. \end{cases}$

Giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = -2 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$ được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$. Suy ra: $K(1\,;\,3)$. Đồ thị hàm số $y = (m-1)x^2$ $(m \neq 1)$ đi qua điểm $K(1\,;\,3)$ nên $3 = (m-1) \,.\, 1^2$, suy ra $m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

a) Xác định hệ số a, biết đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(\sqrt{10}\,;\,1)$. Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị a tìm được.

b) Biết O là gốc toạ độ và $B(-\sqrt{10}\,;\,1)$, chứng minh rằng B thuộc đồ thị hàm số tìm được ở câu a và tam giác AOB cân.

Giải

a) – Do đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ đi qua điểm $A(\sqrt{10}\,;\,1)$ nên $1 = a\,.\,(\sqrt{10})^2$. Suy ra $10a = 1$ hay $a = 0{,}1$.

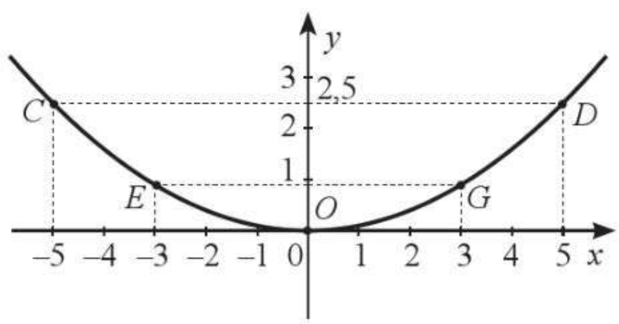
– Vẽ đồ thị của hàm số $y = 0{,}1x^2$:

Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-5	-3	0	3	5
$y = 0{,}1x^2$	2,5	0,9	0	0,9	2,5

Vẽ các điểm: $O(0\,;\,0)$, $C(-5\,;\,2{,}5)$, $D(5\,;\,2{,}5)$, $E(-3\,;\,0{,}9)$, $G(3\,;\,0{,}9)$.

Vẽ đường parabol đi qua 5 điểm O, C, D, E, G nằm phía trên trục hoành, nhận trục Oy làm trục đối xứng ta được đồ thị của hàm số $y = 0{,}1x^2$ như *Hình 2*.



Hình 2

b) Do $1 = 0,1 \,.\, (-\sqrt{10})^2$ nên $B(-\sqrt{10}\,;\,1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 0,1x^2$.

Do hai điểm $A(\sqrt{10}\,;\,1)$ và $B(-\sqrt{10}\,;\,1)$ đối xứng qua trục Oy và $O \in Oy$ nên $OA = OB$.

Vậy tam giác AOB cân tại O.

C. BÀI TẬP

1. Diện tích toàn phần của hình lập phương cạnh a được cho bởi công thức $S = 6a^2$.

a) Tính các giá trị của S rồi hoàn thiện bảng sau:

a **(cm)**	2	2,7	1,22	0,001
$S = 6a^2$ **(cm²)**	?	?	?	?

b) Tính cạnh a của hình lập phương (theo đơn vị centimét và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm), biết diện tích toàn phần của hình lập phương đó bằng 42 cm².

2. Cho hàm số $y = -ax^2$ $(a \neq 0)$. Tìm a, biết khi $x = 1,2$ thì $y = -2,88$.

3. Galileo Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Liên hệ giữa quãng đường chuyển động s (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được cho bởi hàm số $s = 4,9x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao 56 m trên tháp nghiêng Pi-sa xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể).

a) Hỏi sau thời gian 2,5 giây vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Khi vật nặng còn cách mặt đất 17,584 m thì nó đã rơi thời gian bao nhiêu giây?

4. Một viên bi lăn trên mặt phẳng nghiêng. Đoạn đường đi được liên hệ với thời gian bởi hàm số $y = at^2$ (t tính bằng giây, y tính bằng mét). Người ta đo được quãng đường viên bi lăn được ở thời điểm 3 giây là 2,25 m. Hỏi khi viên bi lăn được quãng đường 6,25 m thì nó đã lăn trong bao lâu?

5. a) Điểm $A(-0,2\,;\,1)$ thuộc đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau: $y = 10x^2$; $y = -10x^2$; $y = 25x^2$; $y = -25x^2$; $y = \dfrac{1}{25}x^2$; $y = \dfrac{-1}{25}x^2$?

b) Trong các điểm $B(-2 ; 4\sqrt{3})$, $C(-2 ; -4\sqrt{3})$, $D(-0,2 ; -0,4\sqrt{3})$, $E(0,4\sqrt{3} ; 0,2)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = -\sqrt{3}x^2$?

6. Cho A là giao điểm của hai đường thẳng $y = x - 1$ và $y = -2x + 8$. Chứng minh rằng điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2}{9}x^2$.

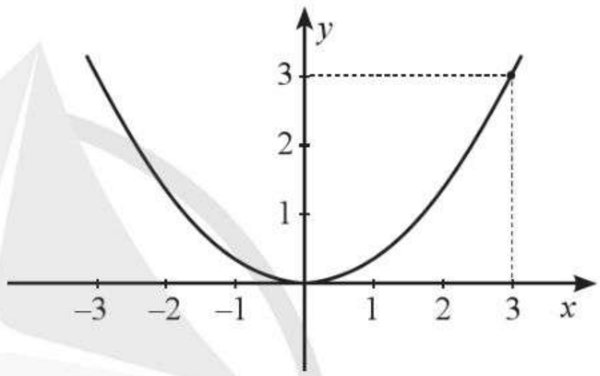
7. Cho hàm số $y = kx^2$ $(k \neq 0)$ có đồ thị là một parabol với đỉnh O như *Hình 3*.

a) Tìm giá trị của k.

b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ bằng 2.

c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ bằng 2.

d*) Tìm các điểm (không phải điểm O) thuộc parabol sao cho khoảng cách từ điểm đó đến trục hoành gấp ba lần khoảng cách từ điểm đó đến trục tung.

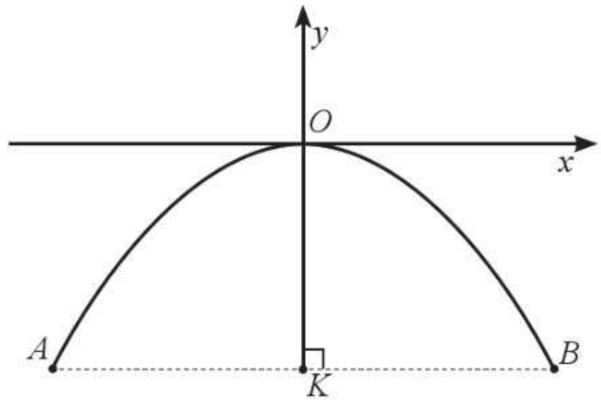


Hình 3

8. Nước từ một vòi nước (đặt trên mặt nước) được phun lên cao sẽ đạt đến một độ cao nào đó rồi rơi xuống (*Hình 4*). Giả sử nước được phun ra bắt đầu từ vị trí A trên mặt nước và rơi trở lại mặt nước ở vị trí B, đường đi của nước có dạng một phần của parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ trong hệ trục toạ độ Oxy, với gốc toạ độ O là vị trí cao nhất mà nước được phun ra đạt được so với mặt nước, trục Ox song song với AB, x và y được tính theo đơn vị mét. Tính chiều cao h từ điểm O đến mặt nước, biết khoảng cách giữa điểm A và điểm B là 6 m.

Hình 4

9. Một chiếc cổng hình parabol khi đưa vào hệ trục toạ độ Oxy có dạng một phần của parabol $y = -\frac{1}{8}x^2$, với gốc toạ độ O là vị trí cao nhất của cổng so với mặt đất, x và y được tính theo đơn vị mét, chiều cao OK của cổng là 4,5 m như mô tả ở *Hình 5* (K là trung điểm của đoạn AB). Tìm khoảng cách giữa hai chân cổng A và B ở trên mặt đất.



Hình 5

10. a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$ và $y = \frac{3}{2}x^2$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Qua đồ thị của các hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ 0,5 đến 2 thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ là bao nhiêu?

§2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn số; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

Giải phương trình

- Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

  – Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

– Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

– Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a};\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

– Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

– Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ứng dụng của phương trình bậc hai một ẩn

- Phương trình bậc hai một ẩn giúp chúng ta giải quyết nhiều vấn đề trong toán học cũng như trong thực tiễn.
- Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Lập phương trình bậc hai

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết

– Lập phương trình bậc hai biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng

Bước 2. Giải phương trình bậc hai

Bước 3. Kết luận

– Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn

– Đưa ra câu trả lời cho bài toán.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn? Đối với những phương trình bậc hai một ẩn đó, xác định hệ số a của x^2, hệ số b của x, hệ số tự do c.

a) $0x^2 - 17x + 52 = 0$.

b) $-5x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$.

c) $\frac{-1}{\sqrt{7}}x^2 + 1 = 0$.

d) $\sqrt{10}\,x = 0$.

Giải

Các phương trình b) và c) là các phương trình bậc hai một ẩn.

Ở phương trình b), ta có $a = -5$, $b = -5$, $c = \sqrt{2}$.

Ở phương trình c), ta có $a = \dfrac{-1}{\sqrt{7}}$, $b = 0$, $c = 1$.

Ví dụ 2 Giải các phương trình:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

b) $0,8x^2 + 3,8x + 0,9 = 0$;

c) $-3x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$;

d) $0,5x^2 - 2x + 3 = 0,2x^2 - 2x + 9$;

e) $-2x^2 + \sqrt{7}x + 1 = x^2 + 1$;

g) $\sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 2x - 1$.

Giải

a) Phương trình $x^2 - 6x + 9 = 0$ có $\Delta' = (-3)^2 - 1 . 9 = 0$ nên có nghiệm kép là: $x_1 = x_2 = \dfrac{-(-3)}{1} = 3$.

b) Phương trình $0,8x^2 + 3,8x + 0,9 = 0$ có $\Delta' = (1,9)^2 - 0,8 . 0,9 = 2,89 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-1,9 + \sqrt{2,89}}{0,8} = \frac{-1,9 + 1,7}{0,8} = -\frac{1}{4};$$

$$x_2 = \frac{-1,9 - \sqrt{2,89}}{0,8} = \frac{-1,9 - 1,7}{0,8} = \frac{-9}{2}.$$

c) Phương trình $-3x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ có $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 . (-3) . (-1) = -10 < 0$ nên vô nghiệm.

d) $0,5x^2 - 2x + 3 = 0,2x^2 - 2x + 9$

$$0,3x^2 = 6$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ hoặc } x = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}.$$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = 2\sqrt{5}$; $x_2 = -2\sqrt{5}$.

e) $-2x^2 + \sqrt{7}x + 1 = x^2 + 1$

$3x^2 - \sqrt{7}x = 0$

$x(3x - \sqrt{7}) = 0$

$x = 0$ hoặc $x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

g) $\sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 2x - 1$

$\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} + 1 = 0$

Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4\sqrt{3}(-\sqrt{3} + 1) = 1 + 12 - 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 1)^2 > 0$.

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{3}} = 1;\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{3}.$$

Ví dụ 3 Chứng tỏ rằng phương trình $x^2 - 2mx - (2m + 1) = 0$ có nghiệm với mọi giá trị của m.

Giải

Ta có: $\Delta' = m^2 - 1 . [-(2m + 1)] = (m + 1)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của m. Do đó phương trình đã cho có nghiệm với mọi giá trị của m.

Ví dụ 4 Một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 14,7 m/s. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h (m) của quả bóng so với mặt đất được tính theo thời gian t (giây) bởi công thức:

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 14{,}7t\ (t \geq 0).$$

a) Tìm thời điểm quả bóng đó có độ cao so với mặt đất là 9,8 m.

b) Sau bao lâu thì quả bóng đó rơi tiếp đất?

Giải

a) Ta có thời điểm t (giây) mà quả bóng đó có độ cao so với mặt đất là 9,8 m là nghiệm của phương trình: $-4{,}9t^2 + 14{,}7t = 9{,}8$ hay $t^2 - 3t + 2 = 0$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $t_1 = 1$; $t_2 = 2$ (đều thoả mãn điều kiện).

Vậy vào thời điểm $t = 1$ giây hoặc $t = 2$ giây thì quả bóng đó có độ cao so với mặt đất là 9,8 m.

b) Quả bóng đó rơi tiếp đất khi độ cao của nó bằng 0. Từ đó, ta có phương trình:

$$-4{,}9t^2 + 14{,}7t = 0$$

$$t(-4{,}9t + 14{,}7) = 0$$

$$t = 0 \text{ hoặc } -4{,}9t + 14{,}7 = 0$$

$$t = 0 \text{ (thoả mãn } t \geq 0\text{) hoặc } t = 3 \text{ (thoả mãn } t \geq 0\text{).}$$

Thời điểm $t = 0$ là thời điểm ban đầu mà quả bóng đó chưa được ném đi.

Vậy sau $t = 3$ giây thì quả bóng đó rơi chạm đất.

Ví dụ 5 Người ta đổ thêm 100 g nước vào một dung dịch chứa 20 g muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu gam nước?

Giải

Gọi lượng nước trong dung dịch ban đầu là: x (g). Điều kiện: $x > 0$.

Khối lượng dung dịch ban đầu là: $x + 20$ (g).

Nồng độ dung dịch ban đầu là: $\frac{20}{x + 20} \cdot 100\%$.

Khối lượng dung dịch sau khi đổ thêm 100 g nước là: $x + 20 + 100 = x + 120$ (g).

Nồng độ dung dịch sau khi đổ thêm 100 g nước là: $\frac{20}{x + 120} \cdot 100\%$.

Do nồng độ của dung dịch sau khi thêm 100 g nước giảm đi 10% nên ta có phương trình:

$$\frac{20}{x + 20} \cdot 100\% - \frac{20}{x + 120} \cdot 100\% = 10\%$$

$$\frac{20}{x + 20} - \frac{20}{x + 120} = 0{,}1$$

$$20(x + 120) - 20(x + 20) = 0{,}1(x + 20)(x + 120)$$

$$x^2 + 140x - 17\,600 = 0$$

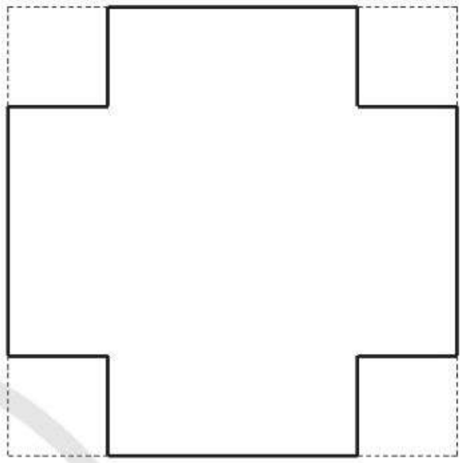
Do $\Delta' = 22\,500 > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = -70 + \sqrt{22\,500} = -70 + 150 = 80 \text{ (thoả mãn điều kiện);}$$

$$x_2 = -70 - \sqrt{22\,500} = -70 - 150 = -220 \text{ (không thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa 80 g nước.

Ví dụ 6 Một tấm bìa hình vuông cạnh a (dm) ($a > 4$). Bạn An cắt đi ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông cạnh 2 dm như *Hình 6*, rồi gấp tấm bìa thu được để có một chiếc hộp không nắp. Tìm a để thể tích hộp đó bằng 50 dm^3.



Hình 6

Giải

Chiếc hộp gấp được có dạng một hình hộp chữ nhật với các kích thước (đơn vị: dm) là: $a - 4$; $a - 4$; 2. Do đó, để thể tích của chiếc hộp gấp được là 50 dm^3 thì:

$(a - 4) . (a - 4) . 2 = 50$ hay $a^2 - 8a - 9 = 0$.

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt là:

$a_1 = -1$ (không thoả mãn điều kiện); $a_2 = 9$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy để thể tích của chiếc hộp gấp được bằng 50 dm^3 thì $a = 9$ dm.

C. BÀI TẬP

11. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn? Đối với những phương trình bậc hai một ẩn đó, xác định hệ số a của x^2, hệ số b của x, hệ số tự do c.

a) $0x^2 + 7x + 5 = 0$.

b) $-3x^2 + 17x - \sqrt{7} = 0$.

c) $-17x + 2 = 0$.

d) $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}x^2 = 0$.

e) $\sqrt{10}\,x + 1 = 0$.

g) $\dfrac{-2}{3x^2} + 4x - 1 = 0$.

12. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m^2 - 1)x^2 - 5x + 7m + 1 = 0$ là phương trình bậc hai một ẩn.

13. Giải các phương trình:

a) $2x^2 - 7x = 0$;

b) $-x^2 + \sqrt{8}x - \sqrt{21} = 0$;

c) $-\sqrt{5}x^2 + 2x + 3\sqrt{5} = 0$;

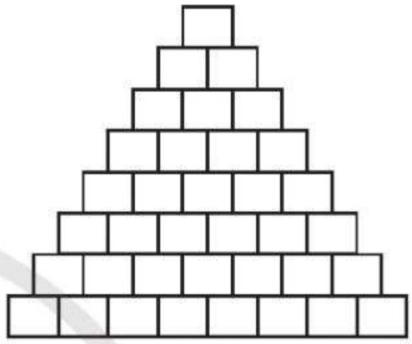
d) $1,5x^2 - 0,4x - 1,2 = -1,1x^2 + 1$;

e) $(\sqrt{7} - 2)x^2 + 3x + 10 = x^2 + 10$;

g) $-\sqrt{32}x^2 - 4x + \sqrt{2} = \sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{8}$.

14. Tìm các giá trị của m để phương trình $mx^2 - 2x + 7 = 0$ vô nghiệm.

15. Ở một gian hàng của siêu thị, người ta xếp các khối hàng hình lập phương giống nhau thành hình tháp n tầng, với tầng đáy thứ n có n khối hàng, tầng ngay trên tầng đáy có $(n - 1)$ khối hàng, …, tầng trên cùng có 1 khối hàng (chẳng hạn với $n = 8$ ta có cách xếp như minh hoạ ở *Hình 7*).



Hình 7

a) Tính tổng số S các khối hàng đã xếp ở một hình tháp n tầng.

b) Tìm n, biết $S = 120$.

16. Một chiếc ô tô đang chạy thì bắt đầu tăng tốc. Quãng đường đi được của chiếc ô tô đó kể từ khi bắt đầu tăng tốc được tính theo công thức: $s = t^2 + 16t$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây, $t > 0$).

a) Tính quãng đường ô tô đó đi được sau 7 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

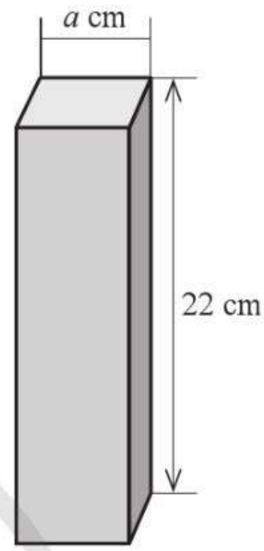
b) Ô tô đó mất bao lâu để đi được quãng đường 80 m kể từ khi bắt đầu tăng tốc?

17. Doanh thu T (nghìn đồng) từ tiền bán vé trong ngày 1 tháng 6 của một rạp chiếu phim với giá mỗi vé là x (nghìn đồng) được tính theo công thức: $T = -10x^2 + 700x - 1$. Xác định giá vé bán trong ngày 1 tháng 6 của rạp chiếu phim đó, biết doanh thu từ tiền bán vé của ngày hôm đó là 12 249 nghìn đồng.

18. Một kilôgam thịt lợn có giá bán ban đầu là 100 nghìn đồng. Vào dịp Tết Nguyên Đán, người ta tăng giá thêm $x\%$ so với giá bán ban đầu. Sau Tết Nguyên Đán do nguồn cung khan hiếm nên người ta tiếp tục tăng giá thêm $x\%$ so với giá đã tăng. Sau hai đợt tăng giá, giá của một kilôgam thịt lợn là 108 nghìn đồng. Tìm x (làm tròn đến hàng đơn vị).

19. Một công ty dự định thuê một số xe lớn (cùng loại) để chở hết 210 người đi du lịch Hội An. Nhưng thực tế, công ty lại thuê các xe nhỏ hơn (cùng loại). Biết rằng số xe nhỏ phải thuê nhiều hơn số xe lớn là 2 chiếc thì mới chở hết số người trên và mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người. Tìm số xe nhỏ đã thuê.

20. Một hộp quà thiết kế theo dạng hình hộp chữ nhật. Bốn mặt thân hộp là các hình chữ nhật may bằng vải màu đỏ có chiều dài 22 cm, hai đáy hộp là các hình vuông cạnh *a* cm may bằng vải màu xanh (xem *Hình 8*). Tìm *a* để tổng diện tích vải màu đỏ nhiều hơn ba lần tổng diện tích vải màu xanh là 312 cm^2, biết $0 < a < 8$.



Hình 8

21. a) Lập công thức tính diện tích xung quanh của một hình chóp tam giác đều, biết độ dài cạnh đáy là x (dm) và độ dài trung đoạn là $(x + 2)$ (dm).

b) Tìm x để diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó là 36 dm^2.

22. Bác Na dùng 200 m rào dây thép gai để rào một mảnh đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

a) Lập công thức tính diện tích $S(x)$ của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (m) của mảnh vườn đó.

b) Tìm diện tích lớn nhất có thể rào được của mảnh vườn hình chữ nhật đó.

23. Người ta lát đá và trồng cỏ cho một sân chơi. Sân có dạng hình chữ nhật với các kích thước a (m), $(a + 8)$ (m) $(a > 0)$. Người ta đã dùng 1 000 viên đá lát hình vuông cạnh 80 cm để lát, diện tích còn lại để trồng cỏ. Tìm a, biết chi phí để trồng cỏ là 4 480 000 đồng và giá trồng mỗi mét vuông cỏ là 35 000 đồng.

§3 ĐỊNH LÍ VIÈTE

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí Viète

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Nhận xét

– Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $ac < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

– Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.

– Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Tìm hai số khi biết tổng và tích

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho phương trình $2x^2 + 5x - 11 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình đó có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và cả hai nghiệm đó đều khác 0.

b) Tính: $x_1^2 + x_2^2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Giải

a) Phương trình đã cho có hệ số của x^2 là $a = 2$, hệ số tự do là $c = -11$. Ta có $ac < 0$. Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 . x_2 = \frac{-11}{2} < 0$ nên cả hai nghiệm x_1, x_2 đều khác 0.

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{-5}{2}$; $x_1x_2 = \dfrac{-11}{2}$.

Do đó:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-11}{2}\right) = \frac{69}{4};$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{11}.$$

Ví dụ 2 Không tính Δ, giải các phương trình:

a) $\sqrt{11}x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{11} + 2\sqrt{2} = 0$;

b) $mx^2 + (m^2 - 1)x + m^2 - m - 1 = 0$ $(m \neq 0)$.

Giải

a) Phương trình đã cho có các hệ số: $a = \sqrt{11}$; $b = -2\sqrt{2}$; $c = -\sqrt{11} + 2\sqrt{2}$.

Ta thấy $a + b + c = 0$. Do đó, phương trình $\sqrt{11}x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{11} + 2\sqrt{2} = 0$ có hai nghiệm là: $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{-\sqrt{11} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = -1 + \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$.

b) Phương trình đã cho có các hệ số: $a = m$; $b = m^2 - 1$; $c = m^2 - m - 1$.

Ta thấy $a - b + c = 0$. Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm là: $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{-m^2 + m + 1}{m}$.

Ví dụ 3 Cho phương trình $-3x^2 + 5x + 2k = 0$. Tìm các giá trị k, biết phương trình đó có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện: $x_1 - x_2 = 2$.

Giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm nên $\Delta = 25 + 24k \geq 0$. Do đó: $k \geq \dfrac{-25}{24}$.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{3}$; $x_1x_2 = \dfrac{-2k}{3}$.

Do $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{3}$ và $x_1 - x_2 = 2$ nên $x_1 = \dfrac{11}{6}$ và $x_2 = \dfrac{-1}{6}$.

Mà $x_1x_2 = \dfrac{-2k}{3}$ nên $\dfrac{-2k}{3} = \dfrac{-11}{36}$ hay $k = \dfrac{11}{24}$ (thoả mãn điều kiện $k \geq \dfrac{-25}{24}$).

Với $k = \dfrac{11}{24}$, ta có phương trình: $-3x^2 + 5x + \dfrac{11}{12} = 0$ hay $-36x^2 + 60x + 11 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{11}{6}; x_2 = -\dfrac{1}{6}$ thoả mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 2$.

Vậy có duy nhất một giá trị thoả mãn yêu cầu là: $k = \dfrac{11}{24}$.

Ví dụ 4 Cho phương trình $x^2 + 4mx - 8m - 5 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào giá trị của m.

Giải

a) Ta có: $\Delta' = 4m^2 + 8m + 5 = 4(m+1)^2 + 1 > 0$ với mọi giá trị m. Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

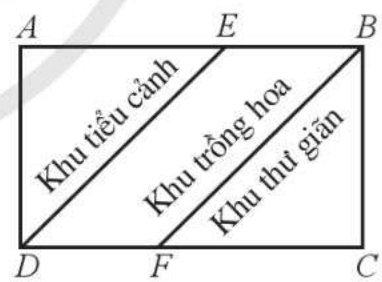
b) Theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = -4m; x_1x_2 = -8m - 5$.

Do đó: $m = \dfrac{-(x_1 + x_2)}{4}$; $m = \dfrac{-(x_1x_2 + 5)}{8}$.

Suy ra biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào giá trị của m là:

$$\frac{-(x_1 + x_2)}{4} = \frac{-(x_1x_2 + 5)}{8} \text{ hay } 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - 5 = 0.$$

Ví dụ 5 Một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi và diện tích lần lượt là 70 m và 250 m^2. Người ta chia mảnh vườn đó thành ba khu vực: khu tiểu cảnh AED, khu trồng hoa $BEDF$, khu thư giãn BCF với $BE = DF = 6$ m như mô tả ở *Hình 9*.



Hình 9

a) Tính tổng diện tích khu tiểu cảnh và khu thư giãn.

b) Người chủ vườn đã thuê người trồng hoa ở khu trồng hoa với chi phí là 50 000 đồng/m^2. Tính số tiền chủ vườn phải trả cho người trồng hoa để trồng hết khu trồng hoa đó.

Giải

a) Gọi chiều dài và chiều rộng mảnh vườn lần lượt là x (m), y (m) ($x > 0$, $y > 0$).

Ta có: $x + y = 35$ và $x . y = 250$. Lại có $35^2 - 4 . 250 = 225 > 0$, do đó x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 35t + 250 = 0$. Phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là $t_1 = 10$; $t_2 = 25$ (đều thoả mãn điều kiện). Do đó, chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là 25 m, 10 m.

Khu trồng hoa $BEDF$ có $BE = DF$ và $BE \parallel DF$ nên có dạng một hình bình hành, vì thế diện tích của khu trồng hoa là: $6 . 10 = 60$ (m^2).

Vậy tổng diện tích khu tiểu cảnh và khu thư giãn là: $250 - 60 = 190$ (m^2).

b) Số tiền chủ vườn phải trả cho người trồng hoa để trồng hết khu trồng hoa đó là:

$$60 . 50\,000 = 3\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 6 Cho các số x, y, z khác 0 và thoả mãn $x + y + z = xyz$ và $x^2 = yz$. Chứng tỏ rằng: $x^2 \geq 3$.

Giải

Từ giả thiết ta có: $S = y + z = x^3 - x$ (1) và $P = yz = x^2$ (2).

Điều kiện để có các số y, z thoả mãn (1) và (2) là: $S^2 - 4P \geq 0$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $(x^3 - x)^2 - 4x^2 \geq 0$

$$x^2(x^2 - 1)^2 - 4x^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 1)^2 - 4 \geq 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 3 \geq 0$$

$$x^2 \geq 3 \text{ (điều phải chứng minh).}$$

C. BÀI TẬP

24. Không tính Δ, giải các phương trình:

a) $7x^2 + 3\sqrt{3}x - 7 + 3\sqrt{3} = 0$;

b) $-2x^2 + (5m + 1)x - 5m + 1 = 0$.

25. Cho phương trình $x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

b) Không giải phương trình, tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2;\ B = x_1^3 + x_2^3;\ C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};\ D = |x_1 - x_2|.$$

26. a) Cho phương trình $-x^2 + 5kx + 4 = 0$. Tìm các giá trị k để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = 9$.

b) Cho phương trình $kx^2 - 6(k-1)x + 9(k-3) = 0$ $(k \neq 0)$. Tìm các giá trị k để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 0$.

27. Cho phương trình $x^2 + 2(2m+1)x - 4m^2 - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào giá trị của m.

28. Cho phương trình $x^2 + 2(k+1)x + k^2 + 2k = 0$.

a) Tìm các giá trị k để phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 và $|x_1| . |x_2| = 1$.

b*) Tìm các giá trị k $(k < 0)$ để phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu và nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

29. Tìm các số x, y với $x < y$ thoả mãn:

a) $x + y = 16$ và $xy = 15$; b) $x + y = 2$ và $xy = -2$.

30. Cho phương trình $x^2 + (2m-1)x - m = 0$.

a) Tìm các giá trị m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

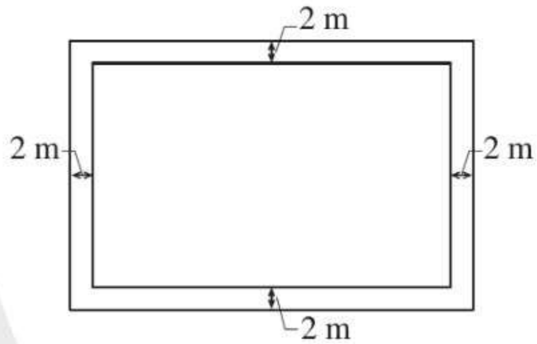
b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm các giá trị m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

31*. Cho các số x, y, z khác 0 thoả mãn $x + y + z = 5$ và $xy + yz + xz = 8$.

Chứng tỏ rằng: $1 \le x \le \frac{7}{3}$; $1 \le y \le \frac{7}{3}$; $1 \le z \le \frac{7}{3}$.

32. Một bác thợ cắt vừa đủ một cây sắt thành các đoạn để hàn lại thành khung của một hình lập phương có cạnh là x (m) và một hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng chiều cao là y (m), chiều dài gấp 5 lần chiều rộng. Tìm độ dài cây sắt, biết $x < y$, $x + y = 0,5$ và $xy = 0,06$.

33. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng x (m), chiều dài gấp rưỡi chiều rộng. Người ta đã làm một vườn hoa ở trung tâm mảnh đất với diện tích bằng 640 m^2 và làm một con đường rộng 2 m xung quanh vườn hoa đó (*Hình 10*). Hỏi chu vi của mảnh đất đó bằng bao nhiêu mét?



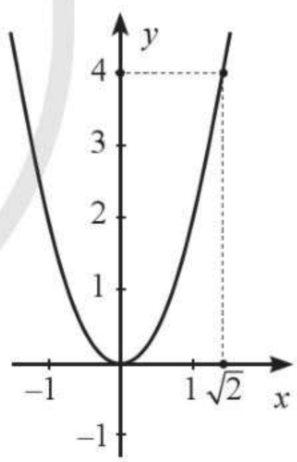
Hình 10

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

34. Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong ở *Hình 11*?

A. $y = -\sqrt{2}\,x^2$. **B.** $y = \sqrt{2}\,x^2$.

C. $y = -2x^2$. **D.** $y = 2x^2$.



Hình 11

35. Cho phương trình $4x^2 - ax + 9 = 0$. Điều kiện của a để phương trình có nghiệm kép là:

A. $a = 2$. **B.** $a = 12$ hoặc $a = -12$.

C. $a = 6$ hoặc $a = -6$. **D.** $a = -2$.

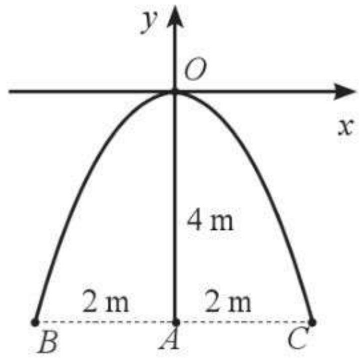
36. Cho biết đồ thị hàm số $y = (m + 2)x^2$ $(m \neq -2)$ đi qua điểm $A(-1 ; -2)$.

a) Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$.

b) Điểm $B(0,5 ; -0,25)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

c) Tìm một số điểm thuộc đồ thị hàm số (không kể điểm O) rồi vẽ đồ thị hàm số đó.

37*. Một chiếc cổng hình parabol khi đưa vào hệ trục toạ độ Oxy có dạng $y = ax^2$, gốc toạ độ O là vị trí cao nhất của cổng so với mặt đất, x và y được tính theo đơn vị mét. Chiều cao OA, chiều rộng BC của cổng đều là 4 m (*Hình 12*). Giả sử một chiếc xe tải có chiều cao 3 m đi vào chính giữa cổng (qua điểm A). Chiều ngang p của chiếc xe tải phải thoả mãn điều kiện gì để có thể đi qua cổng mà không chạm vào cổng?



Hình 12

38. Giải các phương trình:

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + x = 0$;

b) $9x^2 - 17x + 4 = 0$;

c) $-x^2 + 5{,}5x = 2x^2 - 3{,}3x + 4{,}84$;

d) $(\sqrt{3} - 5)x^2 + 3x + 4 = \sqrt{3}x^2 - 1$.

39. Không tính Δ, giải các phương trình:

a) $-3x^2 + 2\sqrt{5}x + 3 + 2\sqrt{5} = 0$;

b) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{4} = 0$;

c) $7x^2 + (3m - 1)x + 3m - 8 = 0$.

40. Biết hai số u, v thoả mãn điều kiện $u - v = 10$ và $uv = 11$. Tính giá trị của $|u + v|$.

41. Một công ty sản xuất đường mía thấy rằng, khi giá bán một kilôgam đường mía là x nghìn đồng ($x > 20$) thì doanh thu từ bán đường mía được tính bởi công thức: $R(x) = -550x^2 + 22\,000x$ (nghìn đồng).

a) Theo mô hình doanh thu đó, mức giá bán một kilôgam đường mía bằng bao nhiêu sẽ là quá cao dẫn đến việc doanh thu từ bán đường mía của công ty bằng 0 (tức là không có người mua)?

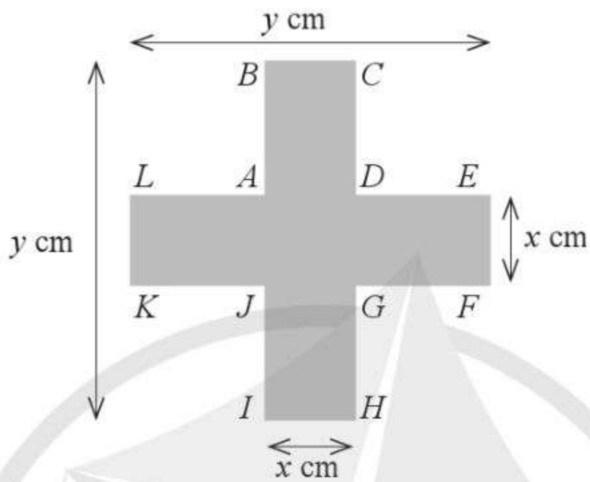
b) Tính giá bán mỗi kilôgam đường mía, biết doanh thu là 211 200 nghìn đồng.

42. Năm 2021, một công ty chuyên xuất khẩu cà phê Robusta ở Gia Lai xuất khẩu được khoảng 12 000 tấn cà phê Robusta. Do ảnh hưởng của thời tiết và dịch bệnh, nguồn cung khan hiếm nên lượng xuất khẩu cà phê Robusta của công ty năm 2022 và năm 2023 đều giảm, cụ thể: khối lượng xuất khẩu năm 2022 giảm $x\%$ so với khối lượng xuất khẩu được của năm 2021; khối lượng xuất khẩu năm 2023 lại giảm $x\%$ ($x < 10$) so với khối lượng xuất khẩu được của năm 2022. Biết khối lượng xuất khẩu cà phê Robusta của công ty năm 2023 là 10 830 tấn. Tìm x.

43. Một biển báo giao thông có một phần dạng hình chữ thập với các kích thước x (cm), y (cm) và $y = x + 25$, $AL = AB = CD = DE = FG = GH = IJ = JK$ như mô tả ở *Hình 13*.

a) Tính diện tích phần hình chữ thập của biển báo giao thông đó theo x.

b) Tìm x nếu diện tích phần hình chữ thập của biển báo giao thông đó là 975 cm^2.



Hình 13

44. Tìm các số x, y thoả mãn:

a) $x - y = \frac{1}{4} - \sqrt{7}$ và $xy = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

b) $x + y = \frac{1}{6}$ và $xy = -\frac{1}{6}$.

45. Cho phương trình $2x^2 + 2(m + 1)x - 3 = 0$.

a) Chứng minh phương trình đó luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đó. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a)

a (cm)	2	2,7	1,22	0,001
$S = 6a^2$ (cm^2)	24	43,74	8,9304	0,000006

b) $a \approx 2,65$ cm.

2. Ta có: $-2,88 = -a \,.\, (1,2)^2$. Do đó $a = 2$.

3. a) 25,375 m.

b) Quãng đường vật nặng đi được khi vật nặng còn cách mặt đất 17,584 m là $56 - 17,584 = 38,416$ (m). Thời gian vật nặng đi được quãng đường 38,416 m là $\sqrt{\dfrac{38,416}{4,9}} = 2,8$ (giây).

4. Với $t = 3$, $y = 2,25$ ta có $2,25 = a \,.\, 3^2$ nên $a = 0,25$. Với $a = 0,25$ ta có $y = 0,25t^2$ (1). Thay $y = 6,25$ vào (1) ta được $6,25 = 0,25t^2$ (2). Từ (2) và $t > 0$, ta có $t = 5$. Vậy khi viên bi lăn được 6,25 m thì nó đã lăn trong 5 giây.

5. a) A thuộc đồ thị hàm số $y = 25x^2$. b) C thuộc đồ thị hàm số $y = -\sqrt{3}x^2$.

6. Gọi hoành độ và tung độ của A lần lượt là p, q. Do A là giao điểm của hai đường thẳng $y = x - 1$ và $y = -2x + 8$ nên $q = p - 1$ và $q = -2p + 8$. Từ đó, ta có $p = 3$ và $q = 2$. Suy ra $A(3\,;\,2)$. Mặt khác $2 = \dfrac{2}{9} \,.\, 3^2$ nên A thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{9}x^2$.

7. a) Do đồ thị hàm số đi qua $A(3\,;\,3)$ nên $3 = k \,.\, 3^2$. Vậy $k = \dfrac{1}{3}$.

b) Tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ bằng 2 là: $\dfrac{1}{3} \cdot 2^2 = \dfrac{4}{3}$.

c) Ta có $\dfrac{1}{3} \cdot x^2 = 2$ nên $x = \sqrt{6}$ hoặc $x = -\sqrt{6}$. Vậy các điểm thuộc parabol có tung độ bằng 2 là $(\sqrt{6}\,;\,2)$, $(-\sqrt{6}\,;\,2)$.

d*) Gọi $M(a\,;\,b)$ là điểm thuộc parabol thoả mãn khoảng cách từ điểm đó đến trục hoành gấp ba lần khoảng cách từ điểm đó đến trục tung.

Từ đó, ta có $\frac{1}{3}a^2 = b$ (*) và $|\,b\,| = 3\,.\,|\,a\,|$. Do $|\,b\,| = 3\,.\,|\,a\,|$ nên $b = 3a$ hoặc $b = -3a$.

– Nếu $b = 3a$, kết hợp với (*) ta có: $\frac{1}{3}\cdot a^2 = 3a$ hay $a^2 = 9a$. Suy ra $a(a - 9) = 0$.
  Tức là $a = 0$ hoặc $a = 9$. Với $a = 0$ thì $b = 0$, khi đó $M(0\,;\,0)$ (loại). Với $a = 9$ thì $b = 27$, khi đó $M\,(9\,;\,27)$.

– Nếu $b = -3a$, làm tương tự ta tìm được $M'(-9\,;\,27)$.

Vậy các điểm phải tìm là $M(9\,;\,27)$ và $M'(-9\,;\,27)$.

8. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Khi đó $OI = h$ và $AI = IB = \frac{AB}{2} = 3$ (m). Từ đó, trong hệ trục Oxy, hoành độ của B bằng 3, tung độ của B bằng $-h$. Do đó: $-h = -\frac{1}{4}\cdot 3^2 = \frac{-9}{4}$, suy ra $h = \frac{9}{4} = 2{,}25$ (m).

9. Dễ thấy $K(0\,;\,-4{,}5)$. Gọi hoành độ của điểm B là b. Do tung độ của điểm B bằng tung độ của K nên $B(b\,;\,-4{,}5)$. Mặt khác, B thuộc parabol $y = -\frac{1}{8}x^2$ nên $-4{,}5 = -\frac{1}{8}b^2$ hay $b = 6$. Từ đó $KB = 6$ m và $AB = 2KB = 12$ m.

10. a) Học sinh tự làm.

b) Khi x tăng từ 0,5 đến 2 thì hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$ có giá trị lớn nhất bằng $-0{,}375$ (tại $x = 0{,}5$) và hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0,375 (tại $x = 0{,}5$).

11. Các phương trình b) và d) là các phương trình bậc hai một ẩn. Ở phương trình b), ta có $a = -3$, $b = 17$, $c = -\sqrt{7}$. Ở phương trình d), ta có $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = 0$, $c = 0$.

12. $m \neq 1$ và $m \neq -1$.

13. a) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{7}{2}$.

b) Phương trình vô nghiệm.

c) $x_1 = \frac{-3\sqrt{5}}{5};\ x_2 = \sqrt{5}$.

d) $x_1 = 1;\ x_2 = \frac{-11}{13}$.

e) $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{3\left(3+\sqrt{7}\right)}{2}$.

g) $x_1 = \dfrac{-5\sqrt{2}+\sqrt{290}}{20}$; $x_2 = \dfrac{-5\sqrt{2}-\sqrt{290}}{20}$.

14. $m > \dfrac{1}{7}$.

15. a) Tổng số S các khối hàng ở một hình tháp n tầng là:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (khối hàng).}$$

b) Ta có: $S = 120$, suy ra: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 120$ hay $n^2 + n - 240 = 0$. Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là: $n = 15$ (thoả mãn) và $n = -16$ (không thoả mãn).

16. a) 161 m.

b) 4 giây.

17. Giá vé bán trong ngày 1 tháng 6 của rạp chiếu phim đó là 35 nghìn đồng.

18. $x \approx 4$.

19. Gọi số xe lớn công ty dự định thuê là x ($x \in \mathbb{N}^*$, đơn vị: chiếc) thì số xe nhỏ công ty thuê là $x + 2$ (chiếc). Mỗi xe lớn công ty dự định thuê chở số người là $\dfrac{210}{x}$ (người). Mỗi xe nhỏ chở số người là $\dfrac{210}{x+2}$ (người). Mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người nên ta có phương trình:

$\dfrac{210}{x} - \dfrac{210}{x+2} = 12$ hay $\dfrac{210(x+2) - 210x}{x(x+2)} = 12$, suy ra: $x^2 + 2x - 35 = 0$.

Giải phương trình đó được: $x_1 = -7$ (không thoả mãn), $x_2 = 5$ (thoả mãn). Vậy số xe nhỏ công ty đã thuê là 7 chiếc.

20. $a = 6$ (cm).

21. a) $\dfrac{3x(x+2)}{2}$ (dm^2).

b) $x = 4$ (dm).

22. a) $S(x) = x(100 - x)$ (m^2). Điều kiện: $0 < x < 100$.

b) Ta có $S(x) = x(100 - x) = -(x - 50)^2 + 2\,500 \le 2\,500$. $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2 500 khi $x = 50$. Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn có thể rào được là 2 500 m^2.

23. Diện tích lát đá là: 1 000 . 0,8 . 0,8 = 640 (m^2). Diện tích còn lại để trồng cỏ là $a(a+8) - 640$ (m^2). Mặt khác, diện tích trồng cỏ là: 4 480 000 : 35 000 = 128 (m^2). Từ đó, ta có phương trình $a(a+8) - 640 = 128$ hay $a^2 + 8a - 768 = 0$. Phương trình đó có hai nghiệm phân biệt: $a_1 = -32$ (loại), $a_2 = 24$ (thoả mãn). Vậy $a = 24$ (m).

24. a) $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{7 - 3\sqrt{3}}{7}$. b) $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{5m-1}{2}$.

25. a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu vì $ac = -2 + \sqrt{2} < 0$.

b) Theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

Từ đó, ta tính được: $A = 5 - 2\sqrt{2}$; $B = -7 + 3\sqrt{2}$; $C = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$D^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 - 4(-2 + \sqrt{2}) = 9 - 4\sqrt{2}$ nên $D = 2\sqrt{2} - 1$.

26. a) $k = 1$ hoặc $k = -1$. b) $k = 7$.

27. a) Học sinh tự làm. b) $(x_1 + x_2 + 2)^2 + 4x_1x_2 + 4 = 0$.

28. a) Ta có $\Delta' = (k+1)^2 - (k^2 + 2k) = 1 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k. Theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = -2(k+1)$; $x_1x_2 = k^2 + 2k$.

Do $|x_1| . |x_2| = 1$ nên $|k^2 + 2k| = 1$. Suy ra: $k^2 + 2k = -1$ hoặc $k^2 + 2k = 1$.

Nếu $k^2 + 2k = -1$ thì $k = -1$. Nếu $k^2 + 2k = 1$ thì $k = -1 + \sqrt{2}$ hoặc $k = -1 - \sqrt{2}$.

Dễ thấy, nếu $k = -1$, $k = -1 + \sqrt{2}$, $k = -1 - \sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $|x_1| . |x_2| = 1$.

Vậy $k = -1$, $k = -1 + \sqrt{2}$, $k = -1 - \sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

b*) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu và nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm nếu $x_1 + x_2 < 0$ và $x_1x_2 < 0$ hay $-2(k+1) < 0$ và $k^2 + 2k < 0$. Từ đó, ta có $-1 < k < 0$. Dễ thấy với các giá trị k sao cho $-1 < k < 0$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu và nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm. Vậy các giá trị k cần tìm là các giá trị k sao cho $-1 < k < 0$.

29. a) $x = 1, y = 15$. b) $x = 1 - \sqrt{3}, y = 1 + \sqrt{3}$.

30. a) Ta có $\Delta = (2m - 1)^2 - 4 . (-m) = 4m^2 + 1 > 0$ với mọi giá trị của m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -(2m - 1)$; $x_1x_2 = -m$.

Do đó $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 4m^2 - m + 1 = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$.

Vậy biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{15}{16}$ khi $m = \frac{1}{8}$.

31*. Đặt $S = y + z$ và $P = yz$.

Ta có: $S = y + z = 5 - x$ và $P = yz = 8 - x(y + z) = 8 - x(5 - x)$.

Từ đó y, z là nghiệm của phương trình $t^2 - (5 - x)t + 8 - x(5 - x) = 0$ với $S^2 - 4P \geq 0$.

Suy ra $(5 - x)^2 - 4[8 - x(5 - x)] \geq 0$ hay $3x^2 - 10x + 7 \leq 0$ (*).

Mặt khác: $3x^2 - 10x + 7 = 3(x - 1)\left(x - \frac{7}{3}\right)$. Do $3x^2 - 10x + 7 \leq 0$ và $x - 1 > x - \frac{7}{3}$

nên (*) suy ra: $x - \frac{7}{3} \leq 0$ và $x - 1 \geq 0$ hay $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Tương tự ta chứng minh được: $1 \leq y \leq \frac{7}{3}$; $1 \leq z \leq \frac{7}{3}$.

32. $x = 0,2$ và $y = 0,3$. Độ dài cây sắt là: $12 . 0,2 + 8 . 0,3 + 5 . 0,3 . 4 = 10,8$ (m).

33. Mảnh đất có chiều rộng là 24 m, chiều dài là 36 m, chu vi là 120 m.

34. D.

35. B.

36. Đồ thị hàm số $y = (m + 2)x^2$ $(m \neq -2)$ đi qua điểm $A(-1 ; -2)$ nên ta có $-2 = (m + 2) . (-1)^2$. Suy ra $m = -4$. Do đó hàm số là $y = -2x^2$.

a) Giá trị của hàm số tại $x = 3$ là $y = -2 . 3^2 = -18$.

b) Điểm $B(0,5 ; -0,25)$ không thuộc đồ thị hàm số do $(-2) . (0,5)^2 \neq -0,25$.

c) Học sinh tự làm.

37*. Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua $C(2 ; -4)$ nên $-4 = a \cdot 2^2$ suy ra $a = -1$. Do đó, $y = -x^2$.

Gọi $K(0 ; -1)$ nằm trên trục Oy. Để chiếc xe tải có chiều cao 3 m và chiều ngang p đi vào chính giữa cổng mà không chạm vào cổng thì $\left|-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2\right| < 1$ hay $p^2 < 4$.

Suy ra: $p < 2$. Dễ thấy, nếu $p < 2$ thì chiếc xe tải có chiều cao 3 m và chiều ngang p đi vào chính giữa cổng sẽ không chạm vào cổng. Vậy $p < 2$.

38. a) $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{2} - 1$. b) $x_1 = \dfrac{17 - \sqrt{145}}{18}$, $x_2 = \dfrac{17 + \sqrt{145}}{18}$.

c) $x_1 = \dfrac{11}{5}, x_2 = \dfrac{11}{15}$. d) $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{109}}{10}$, $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{109}}{10}$.

39. a) $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{3 + 2\sqrt{5}}{3}$. b) $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$. c) $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{-3m + 8}{7}$.

40. $|u + v| = 12$.

41. a) Doanh thu từ bán đường bằng 0 tức là $-550x^2 + 22\,000x = 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$ (không thoả mãn điều kiện), $x_2 = 40$ (thoả mãn điều kiện). Vậy mức giá bán một kilôgam đường mía bằng 40 nghìn đồng sẽ là quá cao dẫn đến việc doanh thu từ bán đường mía bằng 0.

b) 24 nghìn đồng.

42. $x = 5$.

43. a) $x^2 + 50x$ (cm²). b) $x = 15$ (cm).

44. a) $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \sqrt{7}$ hoặc $x = -\sqrt{7}$, $y = -\dfrac{1}{4}$.

b) $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{-1}{3}$ hoặc $x = \dfrac{-1}{3}$, $y = \dfrac{1}{2}$.

45. Học sinh tự làm.

Chương VIII

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

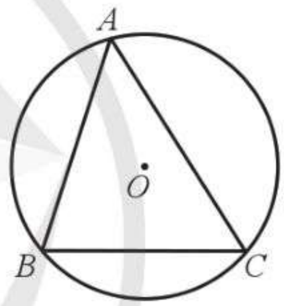
§1 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa đường tròn ngoại tiếp tam giác

– Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Ở *Hình 1*, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì nó đi qua cả ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC.



Hình 1

– Khi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).

Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

– Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực của tam giác đó. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.

– Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.

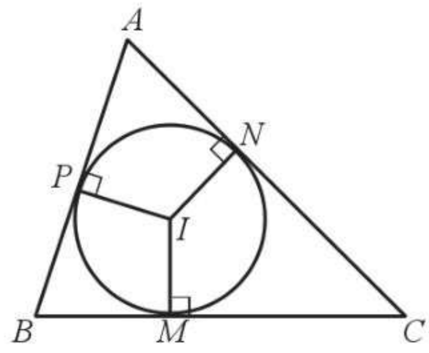
– Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Định nghĩa đường tròn nội tiếp tam giác

– Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Ở *Hình 2*, đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA lần lượt tại P, M, N.

– Khi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I).



Hình 2

Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

– Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.

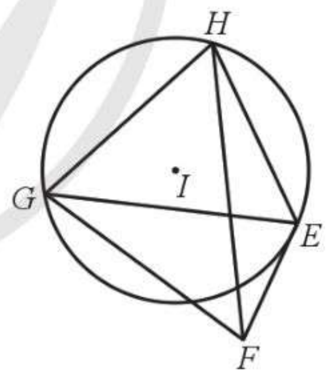
– Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 3* và cho biết một tam giác nội tiếp đường tròn (I) và ba tam giác không nội tiếp đường tròn (I).

Giải

Ở *Hình 3*, ta có: một tam giác nội tiếp đường tròn (I) là tam giác HGE; ba tam giác không nội tiếp đường tròn (I) là các tam giác GHF, HEF, GEF.

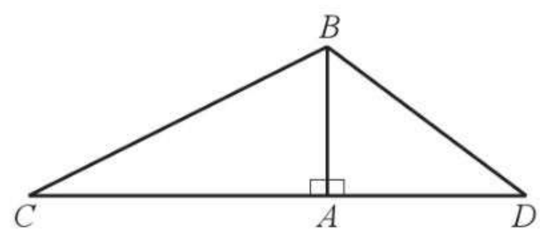


Hình 3

Ví dụ 2 Cho hai tam giác ABC và ABD (*Hình 4*) có $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm, $AC = 6$ cm.

a) Xác định các điểm O, I lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD.

b) Tính bán kính của các đường tròn (O) và (I).



Hình 4

Giải

a) Do tam giác ABC vuông tại A nên trung điểm của cạnh huyền BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tương tự, do tam giác ABD vuông tại A nên trung điểm của cạnh huyền BD là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Vậy O, I lần lượt là trung điểm của BC và BD.

b) Bán kính của đường tròn (O) là: $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ (cm).

Bán kính của đường tròn (I) là: $\frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = \frac{5}{2}$ (cm).

Ví dụ 3 Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính 5 dm. Tính độ dài cạnh của tam giác đều ABC đó.

Giải

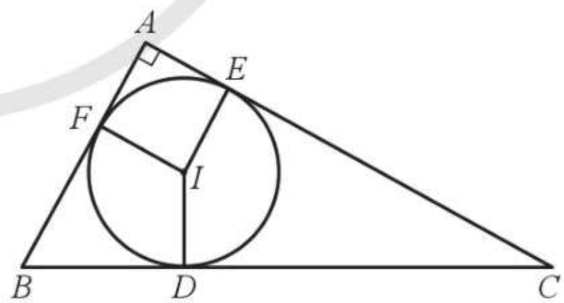
Gọi a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = 5$ dm.

Khi đó $5 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $a = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$. Vậy độ dài cạnh của tam giác ABC là $5\sqrt{3}$ dm.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC vuông tại A có bán kính đường tròn nội tiếp là r. Chứng minh rằng: $r = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

Giải. (Hình 5)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC vuông tại A và (I) tiếp xúc với AB, BC, AC lần lượt tại F, D, E.



Hình 5

Tứ giác $AFIE$ có: $\widehat{A} = 90^\circ$ (giả thiết), $\widehat{AFI} = \widehat{AEI} = 90^\circ$ và $AF = AE$ (tính chất của tiếp tuyến). Do đó tứ giác $AFIE$ là hình vuông và $AE = AF = r$. Mặt khác $BD = BF$ và $CD = CE$ (do tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau).

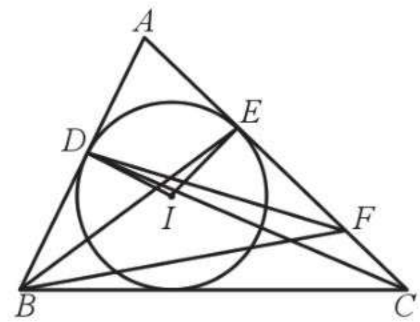
Từ đó, ta có: $AB + AC - BC = AF + FB + AE + EC - (BD + DC) = 2r$.

Vậy $r = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Các cạnh AB, AC lần lượt tiếp xúc với (I) tại D và E. Chứng minh rằng nếu $AB < AC$ thì $BE < CD$.

Giải. (*Hình 6*)

Lấy điểm F trên AC sao cho $AB = AF$. Do $AB < AC$ và $AB = AF$ nên F nằm trên đoạn thẳng AC. Xét hai tam giác ADF và AEB có: $AD = AE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); $\widehat{A}$ là góc chung; $AF = AB$ nên $\Delta ADF = \Delta AEB$ (c.g.c). Do đó $DF = BE$ (1).



Hình 6

Lại có tam giác ABF cân tại A (vì $AB = AF$) nên góc AFB là góc nhọn. Suy ra góc AFD cũng là góc nhọn và góc DFC là góc tù. Trong tam giác DFC có góc DFC là góc tù nên $DF < CD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BE < CD$.

C. BÀI TẬP

1. Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

a) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó.

b) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền.

2. Tìm phát biểu **sai** trong các phát biểu sau:

a) Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.

b) Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

c) Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

d) Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. Cho tam giác ABC cân tại A, có O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng:

– Ba điểm A, O, I cùng thuộc một đường thẳng;

– Đường thẳng OA vuông góc với BC và đi qua điểm chính giữa D (khác điểm A) của cung BC.

b) Cho $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính độ dài bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

4. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác MNP trong các trường hợp sau:

a) $\widehat{M}$, $\widehat{N}$, $\widehat{P}$ đều nhọn; b) $\widehat{M} = 90^\circ$; c) $\widehat{M} > 90^\circ$.

5. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao BE, CD của tam giác ABC cắt nhau tại K. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp mỗi tam giác sau:

a) Tam giác BDE; b) Tam giác DEC; c) Tam giác ADE.

6. Cho tam giác nhọn ABC ($\widehat{B} > \widehat{C}$), phân giác AM. Gọi O, O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMB, AMC. Chứng minh rằng:

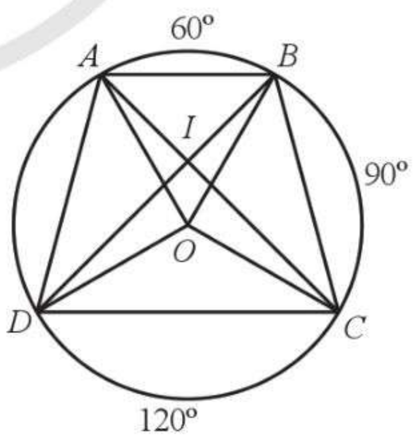
a) OO_1, OO_2, O_1O_2 lần lượt là các đường trung trực của AB, AC, AM;

b) Tam giác OO_1O_2 cân.

7. Trên đường tròn (O) bán kính R, lấy các điểm A, B, C, D sao cho sđ$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, sđ$\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$, sđ$\overset{\frown}{CD} = 120^\circ$ (*Hình 7*).

a) Xác định tâm và tính theo R bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác OAB, OBC, OAD, ODC.

b) Gọi I là giao điểm của AC và BD. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IAB, IBC, IAD, IDC.



Hình 7

8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 8$, bán kính đường tròn nội tiếp là r, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Tính $\frac{r}{R}$.

9. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R.

a) Chứng minh rằng O cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Vẽ tam giác IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ với $JK \parallel BC$, $IJ \parallel AC$, $IK \parallel AB$. Chứng minh tam giác IJK đều.

c) Gọi R' là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính $\frac{r}{R'}$.

10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm C, E (khác điểm A). Đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại hai điểm D, F (khác điểm A). Chứng minh:

a) C, B, F thẳng hàng;

b) Bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn;

c) A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE.

11*. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tuỳ ý trên cung nhỏ AC của đường tròn đó. Gọi F là giao điểm của EB và CO, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF. Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì I luôn di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

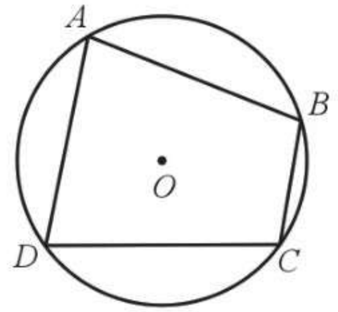
§2 TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa

– Tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hay còn gọi là tứ giác nội tiếp).

– Trong *Hình 8*, tứ giác *ABCD* là tứ giác nội tiếp và đường tròn (*O*) được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABCD*.



Hình 8

Tính chất

Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180°.

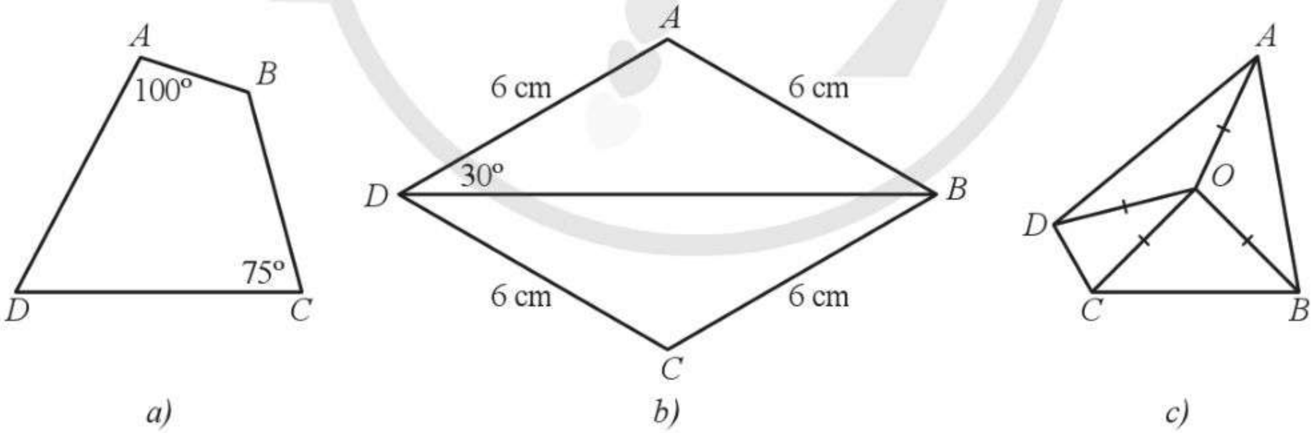
Hình chữ nhật, hình vuông nội tiếp đường tròn

– Mỗi hình chữ nhật là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.

– Mỗi hình vuông là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các hình *9a*, *9b*, *9c*, ở hình nào ta có tứ giác *ABCD* là tứ giác nội tiếp?



Hình 9

Giải

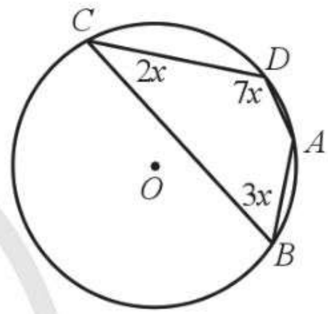
– Ở *Hình 9a*, nếu tứ giác *ABCD* nội tiếp thì $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ nhưng ta lại có $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 175^\circ$ suy ra vô lí. Vậy tứ giác *ABCD* ở *Hình 9a* không là tứ giác nội tiếp.

– Ở *Hình 9b*, vì $AD = AB = 6$ cm nên tam giác ADB cân tại A, do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 30^{\circ}$.

Mặt khác, xét tứ giác $ABCD$, ta có $AB = BC = CD = DA$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó: $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 60^{\circ}$. Tức là tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 120^{\circ}$. Vì vậy, lí luận tương tự như trên tứ giác $ABCD$ ở *Hình 9b* không là tứ giác nội tiếp.

– Ở *Hình 9c*, ta có $OA = OB = OC = OD$ nên đường tròn tâm O, bán kính OA đi qua cả bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác $ABCD$. Vì vậy, tứ giác $ABCD$ ở *Hình 9c* là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 2 Tính số đo góc DAB trong *Hình 10*.



Hình 10

Giải

Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^{\circ}$ hay $7x + 3x = 180^{\circ}$.

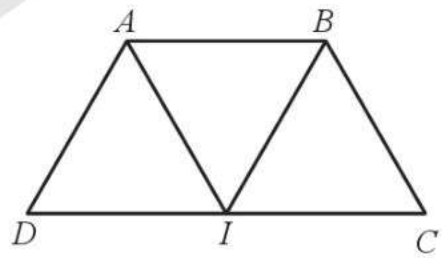
Suy ra: $x = 18^{\circ}$ và $\widehat{DCB} = 2x = 2 \,.\, 18^{\circ} = 36^{\circ}$.

Mặt khác, $\widehat{DCB} + \widehat{DAB} = 180^{\circ}$.

Do đó $\widehat{DAB} = 180^{\circ} - \widehat{DCB} = 180^{\circ} - 36^{\circ} = 144^{\circ}$. Vậy số đo góc DAB bằng 144°.

Ví dụ 3 Cho hình thang $ABCD$ ($AB \,//\, CD$, $AB < CD$) có $\widehat{DCB} = \widehat{ADC} = 60^{\circ}$, $CD = 2AD$. Chứng minh hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn.

Giải. (*Hình 11*)



Hình 11

Gọi I là trung điểm của CD (1).

Khi đó: $ID = \dfrac{CD}{2} = AD$ nên tam giác IAD cân tại D. Mà $\widehat{ADC} = 60^{\circ}$ nên tam giác IAD là tam giác đều. Suy ra $IA = ID$ (2).

Ta có $AB \,//\, CD$ và $\widehat{DCB} = \widehat{ADC}$ nên tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Suy ra $BC = AD$. Mà $IC = ID = AD$ nên $IC = BC$. Do đó, tam giác IBC cân tại C, lại có $\widehat{DCB} = 60^{\circ}$ nên tam giác IBC là tam giác đều. Vì thế $IC = IB$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $IA = ID = IB = IC$. Tức là hình thang $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính IA.

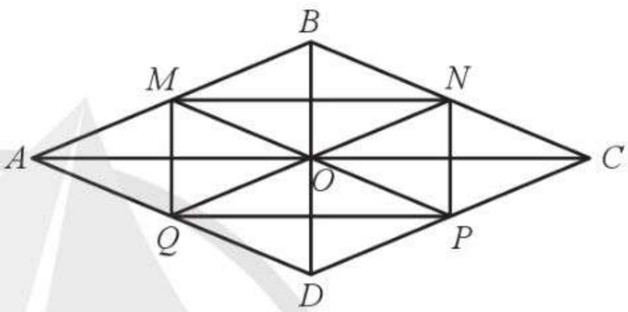
Ví dụ 4 Cho hình thoi $ABCD$, có $AB = 13$ cm, $AO = 12$ cm (O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD). M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.

b) Tính tỉ số diện tích hình thoi $ABCD$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải. (*Hình 12*)

a) Ta có M, N, P, Q lần lượt trung điểm của AB, BC, CA, DA (giả thiết) và $AC \perp BD$ tại O (vì O là giao điểm hai đường chéo AC, BD của hình thoi $ABCD$). Suy ra OM, ON, OP, OQ lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của các tam giác vuông OAB, OBC, OCD, ODA.



Hình 12

Do đó, ta có: $OM = \dfrac{AB}{2}; ON = \dfrac{CB}{2}; OP = \dfrac{CD}{2}; OQ = \dfrac{DA}{2}$.

Mà $AB = BC = CD = DA$ nên $OM = ON = OP = OQ$. Vì vậy tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{AB}{2}$.

b) Ta có $AB = 13$ cm, $AO = 12$ cm và $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 5$ (cm).

Diện tích hình thoi $ABCD$ là: $\dfrac{AC \,.\, BD}{2} = \dfrac{(2 \,.\, 12) \,.\, (2 \,.\, 5)}{2} = 120$ (cm^2).

Diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ là:

$$\pi \,.\, \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \approx 3,14 \,.\, 6,5^2 = 132,665 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy tỉ số diện tích hình thoi $ABCD$ và diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ là khoảng: $120 : 132,665 \approx 0,9$.

C. BÀI TẬP

12. Tìm phát biểu **sai** trong các phát biểu sau:

a) Tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc bất kì bằng 180^o.

c) Hình chữ nhật luôn nội tiếp đường tròn.

d) Mỗi hình vuông là một tứ giác nội tiếp đường tròn.

13. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn. Tính số đo mỗi góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 3\widehat{C}$ và $\widehat{B} = 5\widehat{D}$;

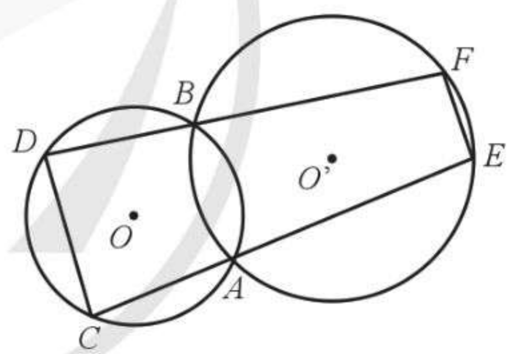
b) $\widehat{A} - \widehat{C} = 12^o$ và $\widehat{D} - \widehat{B} = 76^o$;

c) $\widehat{A} = 7\widehat{B}$ và $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^o$;

d) $\widehat{D} - \widehat{C} = 20^o$ và $\widehat{D} + \widehat{C} = 100^o$.

14. Chứng minh rằng trong một đường tròn, hai dây không đi qua tâm không thể cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

15. Ở *Hình 13*, hai đường tròn (*O*), (*O*') giao nhau tại *A*, *B* và *CD* là một dây cung của (*O*). Tia *CA* cắt (*O*') tại *E* và tia *DB* cắt (*O*') tại *F*. Chứng minh *EF* song song với *CD*.



Hình 13

16. Cho đường tròn (*O*) ngoại tiếp tam giác đều *ABC*. Điểm *E* nằm trên cung nhỏ *BC* (*E* khác *B* và *C*). *ED* là tia đối của tia *EB*. Chứng minh *EC* là phân giác của góc *AED* và *EA* là phân giác của góc *BEC*.

17. Cho tam giác *ABC* cân ở *A*, *H* là trung điểm của *BC* và $\widehat{BAC} < 90^o$. Đường vuông góc với *AB* tại *A* cắt đường thẳng *BC* ở *D*. Kẻ *DE* vuông góc với *AC*. Chứng minh:

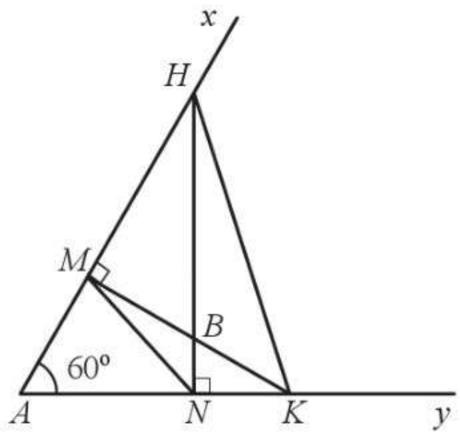
a) $AH = EH$;

b) $\widehat{DCE} = \widehat{ABD}$.

18. Cho $\widehat{xAy} = 60^o$ và điểm B nằm trong góc xAy. Kẻ đường thẳng BN vuông góc với Ay cắt Ax tại H; kẻ đường thẳng BM vuông góc với Ax cắt Ay tại K (*Hình 14*). Chứng minh:

a) Các tứ giác $AMBN$, $HMNK$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn;

b) $HK = 2MN$.



Hình 14

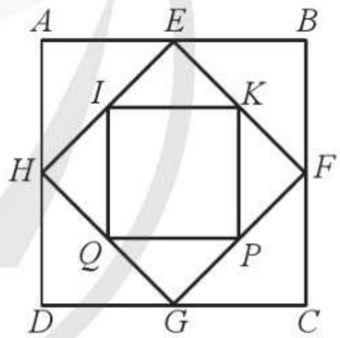
19. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M. Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB, AD lần lượt tại E và F. Tia CM cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{NCA} = \widehat{MFN}$ và $\widehat{NEA} = \widehat{NCA}$; b) $CM + CN = EF$.

20. Chứng minh rằng mỗi hình thang cân là một tứ giác nội tiếp đường tròn.

21. Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1, người ta nối trung điểm các cạnh liên tiếp của nó để tạo thành tứ giác $EFGH$, tiếp tục như vậy được tứ giác mới $IKPQ$ (*Hình 15*). Chứng minh:

a) Tứ giác $EFGH$ và tứ giác $IKPQ$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.



Hình 15

b) Tỉ số bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFGH$ bằng tỉ số bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFGH$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IKPQ$.

22*. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. E là điểm tuỳ ý trên cung nhỏ AC. Gọi I là giao điểm của EB và AC. Kẻ IK vuông góc với AB. Chứng minh rằng khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì EK luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

23. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), hai tia AB, DC cắt nhau tại M và $\widehat{BAD} = 70^{\circ}$. Khi đó số đo góc BCM là:

A. 80°. **B.** 70°. **C.** 110°. **D.** 100°.

24. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C cắt cạnh CD ở P (P khác C và D). Tìm phát biểu **sai**:

A. $AP = AD$.

B. Tứ giác $ABCP$ là hình thang cân.

C. $\widehat{APD} = \widehat{ABC}$.

D. $\widehat{PCB} + \widehat{BAP} < 180^{\circ}$.

25. Cho tam giác ABC có $BC = 10$ và $\widehat{BAC} = 30^{\circ}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

26. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^{\circ}$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm đường tròn đó.

27. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = 2{,}4$ cm và $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC.

28. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại F và E. Kẻ CK vuông góc với BI. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC. Chứng minh:

a) F, E, K thẳng hàng;

b) K, N, M thẳng hàng.

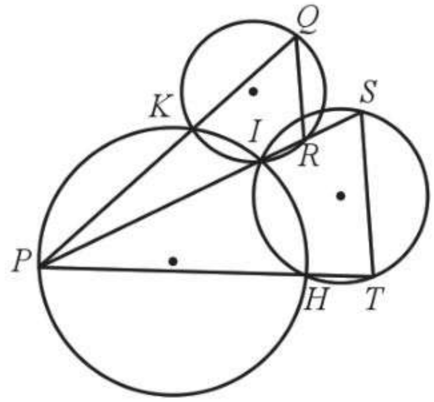
29. Cho tam giác ABC nhọn. Ba đường cao AI, BK, CL. Chứng minh:

a) Các tứ giác $AKIB$, $BLKC$ là các tứ giác nội tiếp;

b) Trực tâm H của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IKL.

30. Quan sát *Hình 16*.

Chứng minh $QR \parallel ST$.



Hình 16

31. Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh bằng a.

a) Chứng minh sáu điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Tính theo a bán kính của đường tròn đó.

b) Chứng minh các tam giác ACE, BFD là các tam giác đều. Tính theo a bán kính đường tròn nội tiếp tương ứng của các tam giác đó.

32. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$, kẻ các tiếp tuyến MA và MB với đường tròn đó (A, B là các tiếp điểm) sao cho $MA = R\sqrt{3}$.

a) Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

b) Tính chu vi tam giác MAB.

c) Vẽ đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q. Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho $MQ + MP$ đạt giá trị nhỏ nhất.

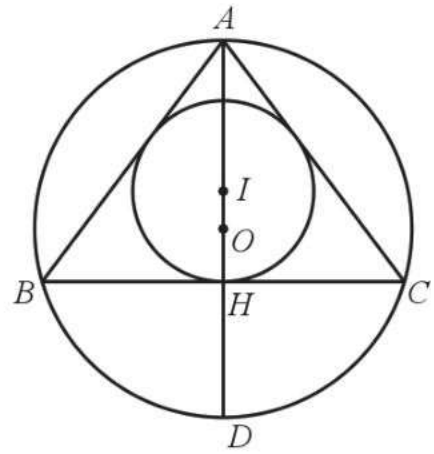
33*. Cho đường tròn $(I; r)$ cố định. Một tam giác ABC thay đổi, có chu vi bằng 16 cm và luôn ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Một tiếp tuyến song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Tìm độ dài BC để MN có độ dài lớn nhất.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Phát biểu c) đúng.

2. Phát biểu c), d) sai.

3. (*Hình 17*).



Hình 17

a) Học sinh tự làm.

b) Do $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm nên ta có $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 16$ (cm). Lại có $\Delta ACH \backsim \Delta ADC$ nên $AC^2 = AH \,.\, AD$, suy ra $20^2 = 16 \,.\, AD$ hay $AD = 25$ cm. Do đó, $R = AD : 2 = 12{,}5$ cm.

Do BI là phân giác của góc ABH nên $\dfrac{IH}{IA} = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$. Ta có $\dfrac{IH}{IA} = \dfrac{3}{5}$ hay $\dfrac{IH}{IH + IA} = \dfrac{3}{3+5} = \dfrac{3}{8}$, tức là $\dfrac{r}{16} = \dfrac{3}{8}$. Vì vậy $r = 6$ cm.

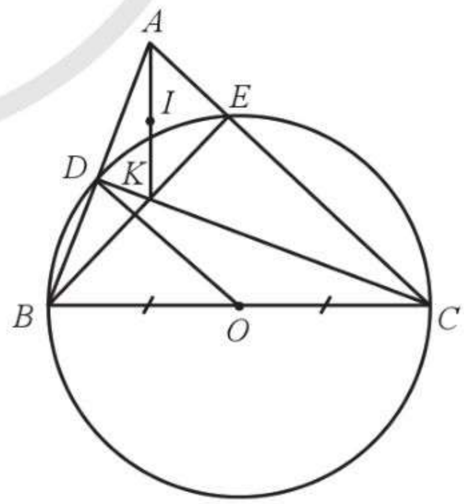
4. Học sinh tự làm.

5. (*Hình 18*).

a) Gọi O là trung điểm của BC. Do tam giác BDC vuông ở D và BEC vuông ở E nên $OB = OD = OC = OE$ (*). Do đó, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

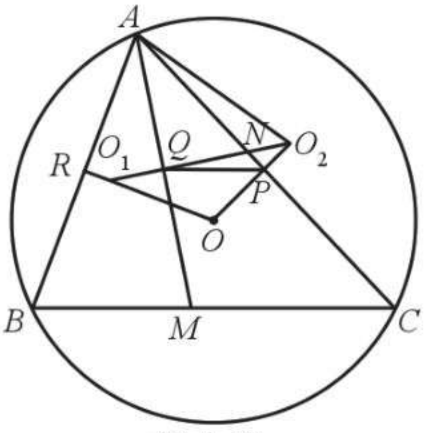
b) Do (*), ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEC.

c) Gọi I là trung điểm của AK. Do tam giác ADK vuông ở D và tam giác AEK vuông ở E nên $IA = IK = IE = ID$. Do đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.



Hình 18

6. (*Hình 19*).



Hình 19

a) Do $OA = OB$ và $O_1A = O_1B$ nên OO_1 là đường trung trực của AB. Tương tự OO_2, O_1O_2 lần lượt là các đường trung trực của AC, AM.

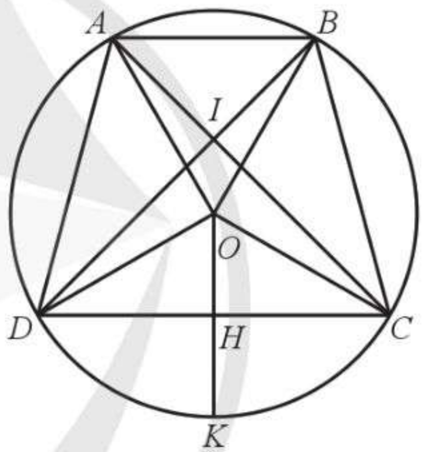
b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AC, AM, AB; N là giao điểm của QO_2 và AC. Ta có $\widehat{OO_1Q} = \widehat{RAQ} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ $(= 180^\circ - \widehat{RO_1Q})$ (1).

Mặt khác $\widehat{O_2NP} = \widehat{ANQ}$ nên $90^\circ - \widehat{O_2NP} = 90^\circ - \widehat{ANQ}$.

Suy ra: $\widehat{NO_2P} = \widehat{QAN} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OO_1O_2} = \widehat{OO_2O_1}$.

Do đó, tam giác OO_1O_2 cân tại O.

7. (*Hình 20*).



Hình 20

a) Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB. Tam giác OAB là tam giác đều với cạnh $AB = R$ nên có tâm đường tròn ngoại tiếp là G và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. Tam giác OBC vuông tại O, có cạnh huyền $BC = R\sqrt{2}$ nên tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp của nó lần lượt là trung điểm E của BC và $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

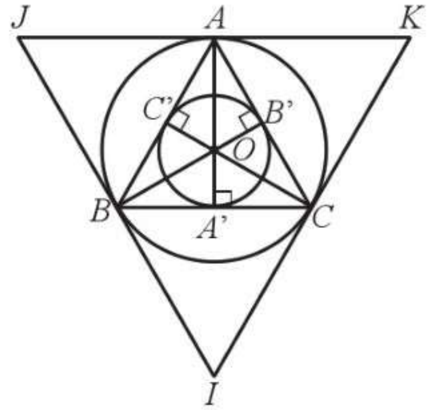
Tương tự tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD lần lượt là trung điểm F của AD và $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Gọi H là trung điểm của DC và giao điểm của tia OH và cung nhỏ CD là K. Dễ thấy K là điểm chính giữa của cung nhỏ DC và $KD = KO = KC = R$. Vậy tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ODC lần lượt là K và R.

b) Do $\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 45^\circ$ nên $\widehat{AIB} = 90^\circ$ hay AC vuông góc với BD. Mặt khác, $AB = R$, $BC = AD = R\sqrt{2}$ và $DC = R\sqrt{3}$ do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IAB, IBC, IAD, IDC lần lượt là: $\dfrac{R}{2}, \dfrac{R\sqrt{2}}{2}, \dfrac{R\sqrt{2}}{2}, \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

8. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 8$ do đó $BC = 10$ và $R = 10 : 2 = 5$.

Lại có $r = \dfrac{AB + AC - BC}{2} = 2$. Suy ra $\dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{5}$.

9. (*Hình 21*).



Hình 21

a) Học sinh tự làm.

b) Do $JK // BC$ và $IK // AB$ nên tứ giác $ABCK$ là hình bình hành. Mặt khác, $\widehat{ABC} = 60^o$. Suy ra $\widehat{AKC} = 60^o$ hay $\widehat{IKJ} = 60^o$.

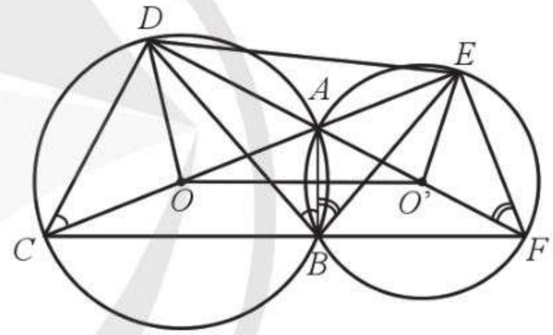
Tương tự $\widehat{KJI} = 60^o$.

Do đó, tam giác IJK là tam giác đều.

c) $R' = \dfrac{JK\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2AK\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2BC\sqrt{3}}{3}$ mà $OA = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3}$ nên $R' = 2OA = 4OA' = 4r$.

Vậy $\dfrac{r}{R'} = \dfrac{1}{4}$.

10. (*Hình 22*).



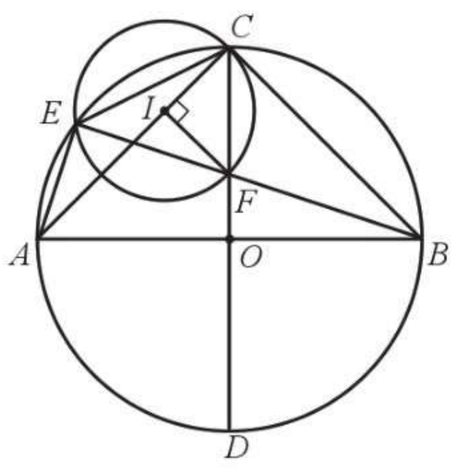
Hình 22

a) Do AC và AF lần lượt là đường kính của đường tròn (O) và (O') nên $\widehat{ABC} = 90^o$, $\widehat{ABF} = 90^o$. Suy ra C, B, F thẳng hàng.

b) Học sinh tự làm.

c) Ta có $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DA của đường tròn (O)) (1). Tương tự $\widehat{ABE} = \widehat{AFE}$ và $\widehat{DCE} = \widehat{DFE}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{DBA}$, do đó BA là phân giác của góc DBE. Tương tự, DA là phân giác của góc BDE. Suy ra A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE.

11*. (*Hình 23*).



Hình 23

Ta có $\widehat{CEB} = \widehat{CAB} = 45^o$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CB của đường tròn (O)). Mặt khác, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF, do đó $\widehat{CIF} = 2.\widehat{CEF} = 90^o$. Mà $IC = IF$ suy ra tam giác ICF vuông cân tại I, do đó $\widehat{ICF} = 45^o$. Lại có $\widehat{ACO} = 45^o$, suy ra I nằm trên AC. Vậy khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì I di chuyển trên đoạn thẳng AC cố định.

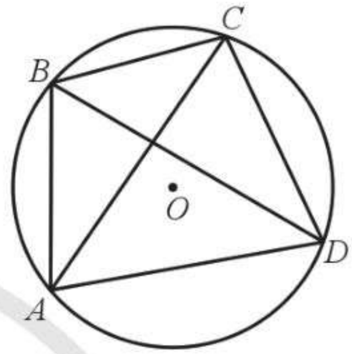
12. Phát biểu b) sai.

13. a) $\widehat{A} = 135^o$, $\widehat{B} = 150^o$, $\widehat{C} = 45^o$, $\widehat{D} = 30^o$. b) $\widehat{A} = 96^o$, $\widehat{B} = 52^o$, $\widehat{C} = 84^o$, $\widehat{D} = 128^o$.

c) $\widehat{A} = 140^o$, $\widehat{B} = 20^o$, $\widehat{C} = 40^o$, $\widehat{D} = 160^o$. d) $\widehat{A} = 140^o$, $\widehat{B} = 120^o$, $\widehat{C} = 40^o$, $\widehat{D} = 60^o$.

14. (*Hình 24*).

Giả sử trái lại có hai dây cung *BD* và *AC* (không đi qua tâm *O*) cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Suy ra tứ giác *ABCD* là hình bình hành. Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$. Mặt khác, tứ giác *ABCD* nội tiếp nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^o$. Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^o$. Từ đó suy ra *AC* là đường kính của đường tròn (*O*) hay *AC* đi qua tâm *O*, mâu thuẫn với điều đã giả sử. Vậy trong một đường tròn, hai dây không đi qua tâm không thể cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Hình 24

15. Ta có tứ giác *ABDC* nội tiếp đường tròn (*O*) nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABF}$ $(= 180^o - \widehat{ABD})$ (1).

Mặt khác, tứ giác *ABFE* nội tiếp đường tròn (*O'*) suy ra $\widehat{ABF} + \widehat{AEF} = 180^o$ (2).

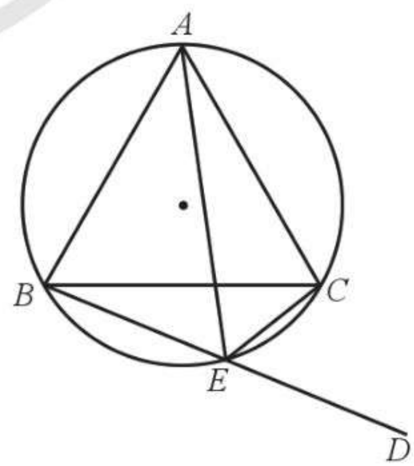
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ACD} + \widehat{AEF} = 180^o$ hay $\widehat{ECD} + \widehat{CEF} = 180^o$. Suy ra *EF* // *CD*.

16. (*Hình 25*). Do tứ giác *ABEC* nội tiếp đường tròn nên $\widehat{CED} = \widehat{BAC} = 60^o (= 180^o - \widehat{BEC})$.

Mặt khác $\widehat{AEC} = \widehat{ABC} = 60^o$ nên ta có $\widehat{AEC} = \widehat{CED} = 60^o$. Do đó, *EC* là phân giác của góc *AED*.

Tương tự ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABC} = 60^o$ và $\widehat{AEB} = \widehat{ACB} = 60^o$.

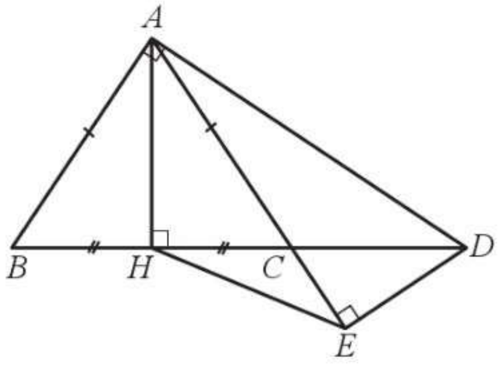
Do đó $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 60^o$ hay *EA* là phân giác của góc *BEC*.



Hình 25

17. (*Hình 26*).

a) Do tam giác ABC cân tại A và H là trung điểm của BC nên $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ (1). Vì các tam giác AHD và AED lần lượt vuông tại H và E nên tứ giác $AHED$ nội tiếp đường tròn đường kính AD suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AEH}$ (2). Mặt khác $\widehat{ADH} = \widehat{BAH}$ (3) (vì cùng cộng với $\widehat{HAD}$ bằng 90°). Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{HAC} = \widehat{AEH}$. Do đó, tam giác HAE cân tại H. Vì vậy $AH = EH$.



Hình 26

b) Học sinh tự làm.

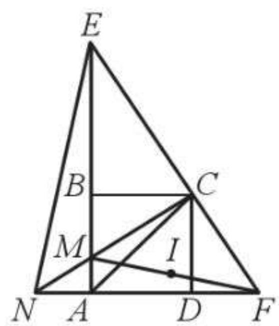
18. a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, HK. Khi đó MI, NI lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB của các tam giác vuông AMB, ANB nên $IM = IN = IA = IB = \frac{AB}{2}$. Suy ra tứ giác $AMBN$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AB. Tương tự tứ giác $HMNK$ nội tiếp đường tròn tâm J đường kính HK.

b) Do tứ giác $HMNK$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AMN} = \widehat{NKH}$ $(= 180^{\circ} - \widehat{HMN})$ hay $\widehat{AMN} = \widehat{AKH}$. Mà $\widehat{MAN} = \widehat{KAH}$ suy ra $\Delta AMN \backsim \Delta AKH$. Do đó $\frac{HK}{MN} = \frac{AH}{AN}$ (3).

Lại có tam giác AHN vuông tại N nên $\cos\widehat{HAN} = \frac{AN}{AH}$ hay $\cos 60^{\circ} = \frac{AN}{AH}$, tức là $\frac{AN}{AH} = \frac{1}{2}$. Do đó $AH = 2AN$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $HK = 2MN$.

19. (*Hình 27*).

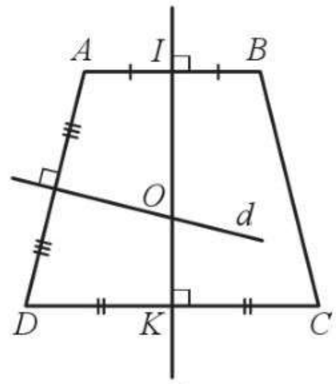
a) Ta có các điểm A, M, C, F cách đều điểm I (trung điểm của MF) suy ra tứ giác $AMCF$ nội tiếp đường tròn. Do tứ giác $AMCF$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{MCA} = \widehat{MFA}$ hay $\widehat{NCA} = \widehat{MFN}$. Tương tự tứ giác $NACE$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{NEA} = \widehat{NCA}$.



Hình 27

b) Ta có tứ giác $NACE$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ENC} = \widehat{EAC} = 45^o$. Mà $\widehat{NCE} = 90^o$. Suy ra tam giác CEN cân tại C. Vì thế $CN = CE$ (1). Tương tự tam giác CMF cân tại C suy ra $CM = CF$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $CM + CN = CE + CF = EF$.

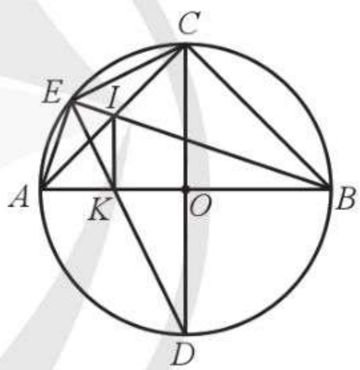
20. (*Hình 28*). Gọi IK là trục đối xứng của hình thang cân $ABCD$. Dựng đường trung trực d của AD. Gọi O là giao điểm của d và IK. Dễ thấy $OA = OB = OC = OD$ suy ra các A, B, C, D đều thuộc đường tròn tâm O, bán kính OA hay hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn.



Hình 28

21. Học sinh tự làm.

22*. (*Hình 29*). Kẻ đường kính CD suy ra D cố định. Ta có $\widehat{AEI} = \widehat{AKI} = 90^o$ nên tứ giác $EIKA$ nội tiếp đường tròn đường kính AI. Từ đó suy ra $\widehat{KAI} = \widehat{KEI}$. Lại có $\widehat{KAI} = 45^o$ (do tam giác ACB vuông cân tại C) do đó $\widehat{KEI} = 45^o$ hay $\widehat{BEK} = 45^o$ (1). Mặt khác, $\widehat{BED} = 45^o$ (do D là điểm chính giữa của cung AB) (2). Từ (1) và (2) suy ra E, K, D thẳng hàng. Vậy khi E di chuyển trên cung nhỏ AC thì EK luôn đi qua điểm D cố định.



Hình 29

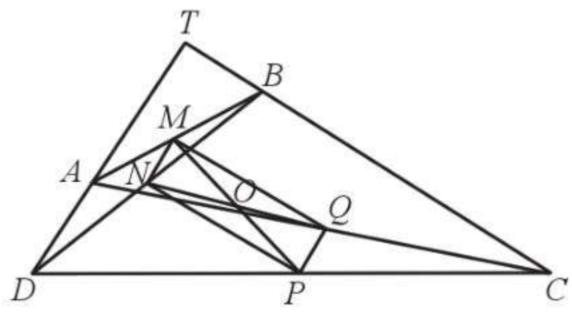
23. B.

24. D.

25. Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do góc $\widehat{BAC} = 30^o$ nên $\widehat{BOC} = 60^o$. Ta có $\widehat{BOC} = 60^o$ và tam giác OBC cân ở O. Suy ra tam giác OBC đều hay $R = OB = BC = 10$.

26. (*Hình 30*).

Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng AD và CB. Vì $\widehat{TDC} + \widehat{TCD} = 90^\circ$ nên tam giác TCD vuông tại T. Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $MN // AD$, MQ là đường trung bình của tam giác ABC nên $MQ // BC$. Mặt khác $AD \perp BC$. Suy ra $MN \perp MQ$. Chứng minh tương tự ta cũng có $MN \perp NP$, $NP \perp PQ$. Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Hình 30

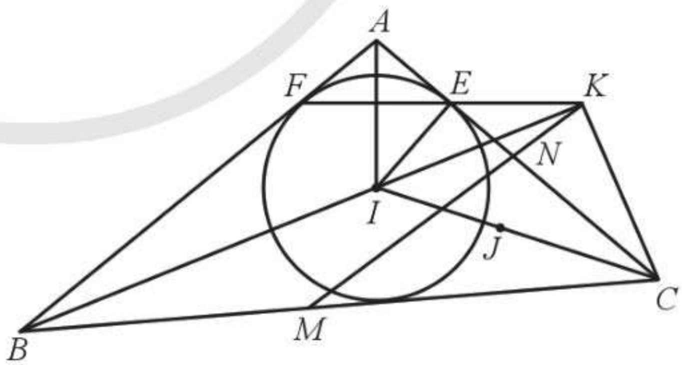
Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn có tâm O là giao điểm của hai đường chéo MP và NQ.

27. (Học sinh tự vẽ hình).

Đặt $AB = 3k$ $(k > 0)$, suy ra $AC = 4k$ (do $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$). Lại có tam giác ABC vuông tại A nên $BC = 5k$. Mặt khác $BC \,.\, AH = AB.\, AC$ nên $5k \,.\, AH = 3k \,.\, 4k$ suy ra $AH = 2{,}4k$. Mà $AH = 2{,}4$ nên ta có $2{,}4k = 2{,}4$. Do đó, $k = 1$. Suy ra $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Mặt khác, do $r = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$, $R = \dfrac{BC}{2}$ suy ra $r = 1$ cm và $R = 2{,}5$ cm.

28. (*Hình 31*).

a) Gọi J là trung điểm của IC. Do ICE và ICK là các tam giác vuông lần lượt tại E và K nên $JI = JC = JE = JK$ do đó tứ giác $IEKC$ nội tiếp đường tròn.



Hình 31

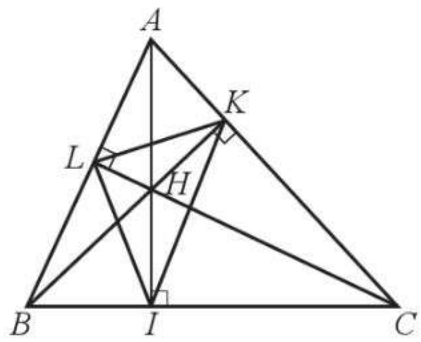
Suy ra $\widehat{KEC} = \widehat{KIC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC của đường tròn đường kính IC). Lại có $\widehat{AEF} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$ và $\widehat{KIC} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{KIC} = \widehat{KEC}$. Vì vậy F, E, K thẳng hàng.

b) Tam giác MKB cân ở M suy ra $\widehat{KMC} = 2 \cdot \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{ABC}$. Lại có M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC nên $\widehat{NMC} = \widehat{ABC}$ (hai góc đồng vị).

Suy ra $\widehat{KMC} = \widehat{NMC}$. Vì vậy K, N, M thẳng hàng.

29. (*Hình 32*).



Hình 32

a) Học sinh tự làm.

b) Do tứ giác $AKIB$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{IKC} = \widehat{ABI}$ $(= 180^\circ - \widehat{AKI})$ hay $\widehat{IKC} = \widehat{ABC}$.

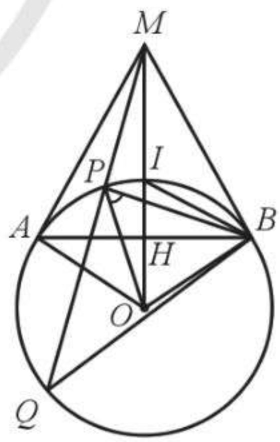
Tương tự $\widehat{AKL} = \widehat{ABC}$. Suy ra $\widehat{AKL} = \widehat{IKC}$.

Từ đó ta có $90^\circ - \widehat{AKL} = 90^\circ - \widehat{IKC}$ hay $\widehat{LKH} = \widehat{IKH}$. Vì vậy KH là đường phân giác của góc LKI. Tương tự cũng có LH là đường phân giác của góc KLI. Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IKL.

30. Do các tứ giác $QKIR$, tứ giác $PKIH$, tứ giác $IHTS$ đều nội tiếp đường tròn nên $\widehat{QRS} = \widehat{QKI} = \widehat{IHP} = \widehat{IST}$. Mà $\widehat{QRS}$ và $\widehat{IST}$ là hai góc so le trong nên $QR \parallel ST$.

31. Học sinh tự làm.

32. (*Hình 33*).



Hình 33

a) Ta có MA, MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MA \perp OA$, $MB \perp OB$. Tam giác OAM vuông tại A nên $OM^2 = MA^2 + OA^2 = (R\sqrt{3})^2 + R^2 = 4R^2$ hay $OM = 2R$. Gọi I là giao điểm của (O) với tia OM, ta có $OI = R$ nên $IM = OM - OI = 2R - R = R$. Do đó, $IM = IO = R$ nên I là trung điểm của OM.

Từ đó do các tam giác OAM và OBM lần lượt vuông tại A và B nên $IA = IO = IM = IB$. Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB (1). Hơn nữa ta còn có: $\sin\widehat{AMO} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{1}{2}$ hay $\widehat{AMO} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

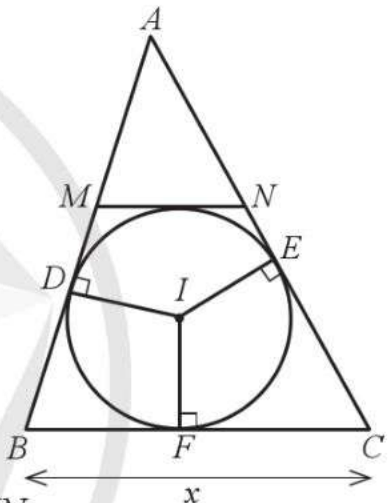
Vì vậy tam giác AMB là tam giác đều (2). Từ (1), (2) suy ra đường tròn nội tiếp tam giác đều MAB cạnh $R\sqrt{3}$ có tâm là I và bán kính là $\dfrac{R}{2}$.

b) Do tam giác MAB đều và $MA = R\sqrt{3}$ do đó chu vi tam giác MAB bằng $3R\sqrt{3}$.

c) Ta có $\widehat{MBP} = \dfrac{\widehat{POB}}{2}$ (cùng bằng $90^\circ - \widehat{PBO}$) và $\widehat{PQB} = \dfrac{\widehat{POB}}{2}$ nên $\widehat{MBP} = \widehat{PQB}$.

Suy ra $\Delta MPB \backsim \Delta MBQ$. Do đó $\dfrac{MB}{MQ} = \dfrac{MP}{MB}$ hay $MP \,.\, MQ = MB^2 = 3R^2$. Lại có $(MP + MQ)^2 \geq 4MP \,.\, MQ = 12R^2$ (dấu "=" xảy ra khi $MP = MQ$). Vậy $MQ + MP$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R\sqrt{3}$, khi đó $MP = MQ$ hay đường thẳng d đi qua M và A hoặc d đi qua M và B.

33*. (*Hình 34*). Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, F, E và $BC = x$.



Hình 34

Ta có $MN \parallel BC$ nên $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$.

Suy ra:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN + AM + AN}{BC + AB + AC} = \frac{\text{Chu vi } \Delta AMN}{\text{Chu vi } \Delta ABC}.$$

Lại có $AD + AE = AB + AC - BC = AB + AC - x$ (với $x = BC$) và chu vi $\Delta AMN = AD + AE = AB + AC + BC - 2x =$ Chu vi $\Delta ABC - 2x$. Mà chu vi $\Delta ABC = 16$.

Suy ra: $\dfrac{MN}{x} = \dfrac{16 - 2x}{16}$. Từ đó $MN = \dfrac{4x(8 - x)}{32} \leq \dfrac{(x + 8 - x)^2}{32} = 2$.

Do đó, MN có độ dài lớn nhất bằng 2 cm khi $x = 8 - x$ hay $x = 4$ (cm).

Chương IX
ĐA GIÁC ĐỀU

§1 ĐA GIÁC ĐỀU. HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Đa giác. Đa giác lồi

- Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) là một hình gồm n đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 sao cho mỗi điểm A_1, A_2, $\ldots$, A_n là điểm chung của đúng hai đoạn thẳng và không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng. Trong đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, các điểm A_1, A_2, $\ldots$, A_n là các đỉnh, các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 là các cạnh.
- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó.

Đa giác đều

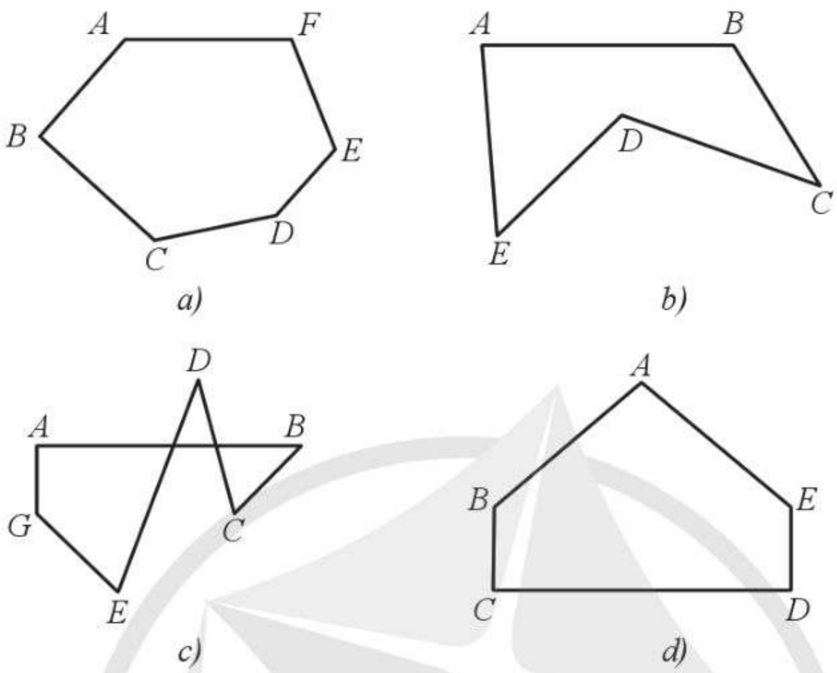
- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
- Đối với mỗi đa giác đều, có đúng một điểm O cách đều tất cả các đỉnh của đa giác đó. Điểm O đó được gọi là tâm của đa giác đều.
- Phần mặt phẳng giới hạn bởi đa giác đều được gọi là hình đa giác đều. Vì mỗi hình đa giác đều cũng là một phần của mặt phẳng nên hình đa giác đều còn gọi là hình phẳng đều.

Hình đa giác đều trong thực tiễn

Trong thế giới tự nhiên, trong nghệ thuật kiến trúc và thiết kế công nghệ, vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều rất đa dạng và phong phú.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các hình *1a*, *1b*, *1c*, *1d*, hình nào không phải là đa giác lồi? Giải thích.



Hình 1

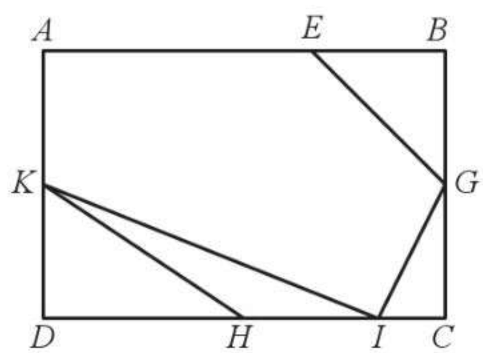
Giải

Hình 1b không phải là đa giác lồi vì đa giác *ABCDE* nằm về hai phía của đường thẳng *ED*. *Hình 1c* cũng không phải là đa giác lồi vì đa giác *ABCDEG* nằm về hai phía của đường thẳng *CD*.

Ví dụ 2 Cho hình chữ nhật *ABCD* có *AB* = 6 cm và *BC* = 4 cm. Lấy các điểm *E*, *G*, *K* lần lượt trên các cạnh *AB*, *BC*, *AD* sao cho *AE* = 2*EB*, *BG* = *GC*, *AK* = *KD*. Lấy các điểm *I*, *H* trên cạnh *CD* sao cho *ID* = 5*IC* và *CH* = *HD*. Hãy kể tên sáu hình ngũ giác lồi với 5 đỉnh của mỗi hình ngũ giác lồi đó được chọn trong số các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*, *I*, *K*.

Giải. (*Hình 2*)

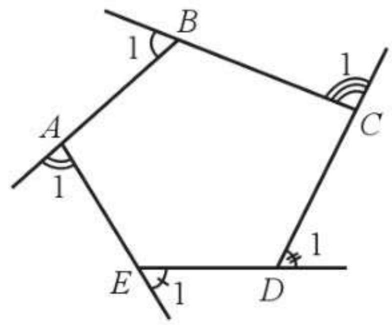
Sáu hình ngũ giác lồi với 5 đỉnh của mỗi hình ngũ giác lồi đó được chọn trong số các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*, *I*, *K* là các hình ngũ giác: *AKHCB*, *AKICB*, *AKIGB*, *AKIGE*, *ADIGB*, *ADIGE*.



Hình 2

Ví dụ 3 Cho hình ngũ giác *ABCDE* (*Hình 3*).

Tính tổng các góc $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_1}$, $\widehat{C_1}$, $\widehat{D_1}$, $\widehat{E_1}$.



Hình 3

Giải

Xét ngũ giác *ABCDE*, ta thấy tổng năm góc của ngũ giác đó bằng tổng các góc trong ba tam giác *ABC*, *ACD*, *ADE*, tức là bằng $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

Như vậy $\widehat{EAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEA} = 540^\circ$. Do đó, ta có:

$\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1} + \widehat{E_1}$

$= (180^\circ - \widehat{EAB}) + (180^\circ - \widehat{ABC}) + (180^\circ - \widehat{BCD}) + (180^\circ - \widehat{CDE}) + (180^\circ - \widehat{DEA})$

$= 5 \cdot 180^\circ - (\widehat{EAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEA}) = 900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$.

Vậy tổng các góc $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_1}$, $\widehat{C_1}$, $\widehat{D_1}$, $\widehat{E_1}$ bằng 360°.

Ví dụ 4 Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

a) Đối với mỗi đa giác đều, có đúng một điểm *O* cách đều tất cả các đỉnh của đa giác đó.

b) Đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau là đa giác đều.

c) Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

d) Ngũ giác có số đo của mỗi góc đều bằng 108° là ngũ giác đều.

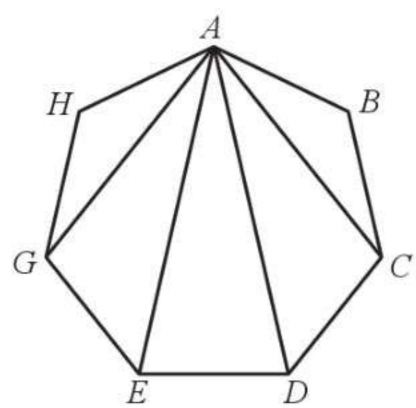
Giải

Phát biểu a) và c) là các phát biểu đúng.

Ví dụ 5 Cho đa giác đều *ABCDEGH*. Tính số đo mỗi góc của đa giác đó.

Giải. (*Hình 4*)

Xét đa giác đều *ABCDEGH* (*Hình 4*), ta thấy tổng bảy góc của đa giác đó bằng tổng các góc trong năm tam giác *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEG*, *AGH*, tức là bằng $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$.



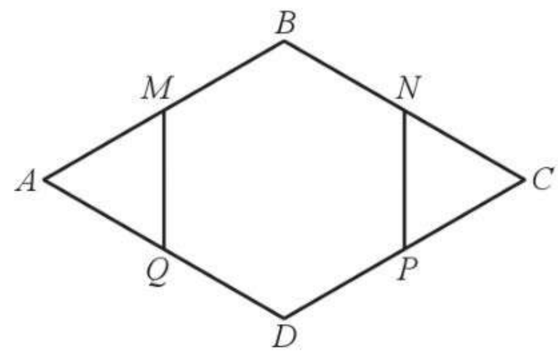
Hình 4

Do tất cả các góc của đa giác đều *ABCDEGH* bằng nhau nên số đo mỗi góc của đa giác đều đó bằng $\left(\dfrac{900}{7}\right)^\circ$.

Ví dụ 6 Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^o$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh lục giác $MBNPDQ$ là lục giác đều.

Giải. (*Hình 5*)

Gọi độ dài cạnh hình thoi $ABCD$ là a. Do hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^o$ và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA nên $\widehat{C} = \widehat{A} = 60^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 120^o$ và $AM = MB = BN = NC = CP = PD = DQ = QA = \frac{a}{2}$ (1).

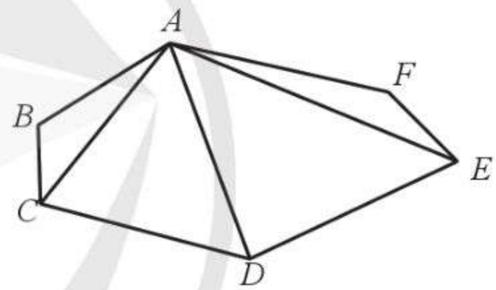


Hình 5

Do đó, ta có các tam giác AMQ và CND là các tam giác đều (vì chúng là các tam giác cân và có một góc bằng 60^o). Suy ra: $\widehat{AQM} = \widehat{AMQ} = \widehat{CPN} = \widehat{CNP} = 60^o$ và $MQ = NP = AM = \frac{a}{2}$ (2). Từ đó: $\widehat{DQM} = \widehat{BMQ} = \widehat{DPN} = \widehat{BNP} = 120^o$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra lục giác $MBNPDQ$ là lục giác đều vì có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

C. BÀI TẬP

1. Quan sát *Hình 6* và kể tên các đa giác có trong hình đó.



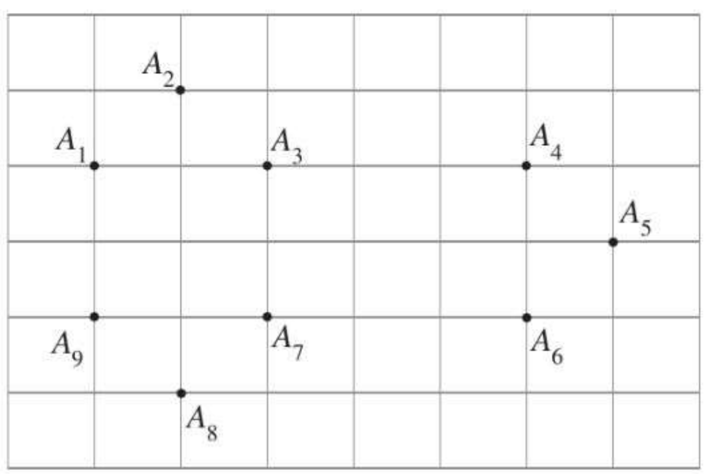
Hình 6

2. Cho tam giác ABC và D là một điểm nằm trong tam giác. Kẻ DE song song với AB (E thuộc cạnh AC). Kẻ DF song song với BC (F thuộc cạnh AC).

a) Trong nhóm các điểm B, D, F, C và nhóm các điểm A, B, C, D, nhóm các điểm nào là 4 đỉnh của một tứ giác lồi? Vì sao?

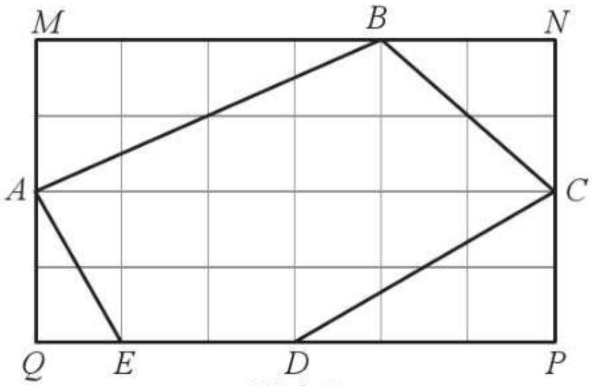
b) Các điểm A, B, C, D, E có phải là các đỉnh của một ngũ giác lồi không? Vì sao?

3. Hãy vẽ một số đa giác (lồi) mà các đỉnh là một số điểm trong các điểm đã cho ở *Hình 7*.



Hình 7

4. Cho hình chữ nhật $MNPQ$ và ngũ giác $ABCDE$ trên lưới ô vuông như *Hình 8*, với cạnh của mỗi ô vuông nhỏ là 1 cm. Tính tỉ số diện tích ngũ giác $ABCDE$ và diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 8

5. Cho ngũ giác $ABCDE$. Chứng minh:

$$AC + AD + BD + BE + EC > AB + BC + CD + DE + EA.$$

6. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ và một điểm M nằm trong ngũ giác. Gọi A', B', C', D', E' lần lượt là các điểm nằm trên các đoạn thẳng MA, MB, MC, MD, ME sao cho $\frac{MA'}{MA} = \frac{MB'}{MB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CC'}{MC} = \frac{DD'}{MD} = \frac{2}{3}$, $\frac{ME'}{E'E} = \frac{1}{2}$. Chứng minh ngũ giác $A'B'C'D'E'$ là ngũ giác đều.

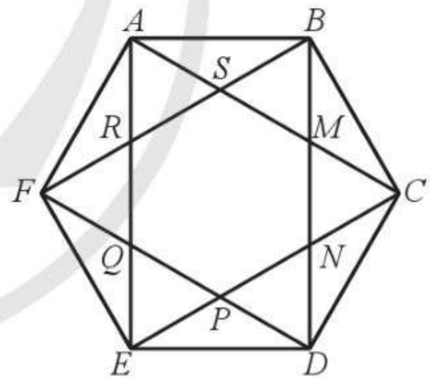
7. Cho ngũ giác đều $ABCDE$, đoạn BE cắt các đoạn AC và AD lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác AEN và CMB là các tam giác cân;

b) AN là phân giác của góc EAM;

c) $AB \,.\, BC = BM \,.\, AC$.

8. Ở *Hình 9* biết $ABCDEF$ là lục giác đều, chứng minh rằng lục giác $MNPQRS$ cũng là lục giác đều.



Hình 9

9. Người ta chia đường tròn $(O; R)$ thành 6 cung bằng nhau như sau:

– Trên đường tròn $(O; R)$, lấy điểm A tuỳ ý;

– Vẽ một phần đường tròn $(A; R)$ cắt $(O; R)$ tại B và C;

– Vẽ một phần đường tròn $(C; R)$ cắt $(O; R)$ tại E (khác A);

– Vẽ một phần đường tròn $(E; R)$ cắt $(O; R)$ tại F (khác C);

– Vẽ một phần đường tròn $(F; R)$ cắt $(O; R)$ tại D (khác E).

Nối A với B, B với D, D với F, F với E, E với C, C với A, ta được lục giác $ABDFEC$.

Chứng minh:

a) Lục giác $ABDFEC$ là lục giác đều;

b) AF, BE, CD là các đường kính của đường tròn $(O; R)$;

c) Các tứ giác $ACEF$, $ABDC$, $BECA$ đều là hình thang cân.

10. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật $ABEF$, $BCIJ$ và $CAGH$ sao cho $AF = BJ = CH = x$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a^2 và x^2 để hình lục giác $EFGHIJ$ là lục giác đều.

11. Tính số đo mỗi góc của một đa giác đều có n cạnh trong mỗi trường hợp sau:

a) $n = 8$; b) $n = 9$ c) $n = 10$.

12. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ $(n > 3, n \in \mathbb{N})$. Chứng minh các đường trung trực của các cạnh A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 cùng đi qua một điểm.

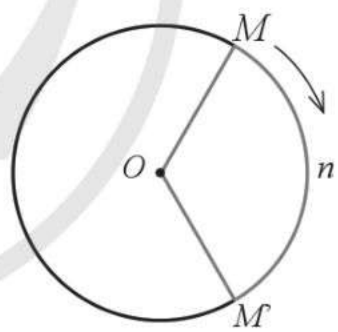
§2 PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khái niệm

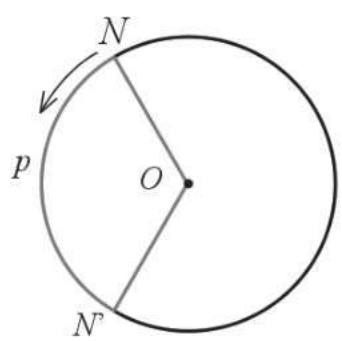
Cho điểm O cố định và số thực α.

– Phép quay thuận chiều α^o $(0^o < \alpha^o < 360^o)$ tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm M (khác điểm O) thành điểm M' thuộc đường tròn $(O; OM)$ sao cho tia OM quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OM' thì điểm M tạo nên cung MnM' có số đo α^o (*Hình 10*).



Hình 10

– Phép quay ngược chiều α^o $(0^o < \alpha^o < 360^o)$ tâm O được phát biểu tương tự như trên (*Hình 11*).



Hình 11

Chú ý: Phép quay 0^o và phép quay 360^o giữ nguyên mọi điểm.

Phép quay giữ nguyên hình đa giác đều

– Cho hình đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) có tâm O. Phép quay giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ là phép quay tâm O biến mỗi đỉnh của hình đa giác đều thành một đỉnh của hình đa giác đều đó.

– Người ta chứng minh được rằng chỉ có các phép quay sau đây giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) với tâm O: các phép quay thuận chiều α^o tâm O và các phép quay ngược chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị

$$\alpha_1^o = \frac{360^o}{n};\ \alpha_2^o = \frac{2\,.\,360^o}{n};\ \ldots;\ \alpha_n^o = \frac{n\,.\,360^o}{n} = 360^o.$$

B. VÍ DỤ

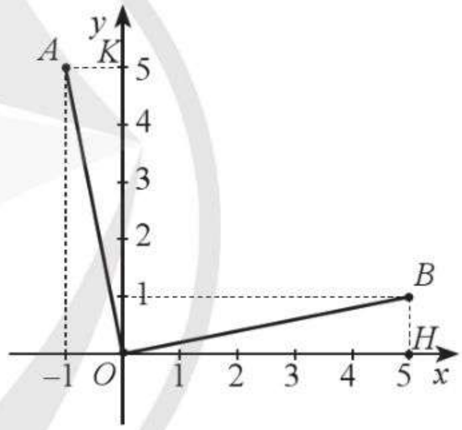
Ví dụ 1 Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho $A(-1\,;5)$, $B(5\,;1)$. Chứng minh phép quay thuận chiều 90^o tâm O biến điểm A thành điểm B.

Giải. (*Hình 12*)

Kẻ BH vuông góc với Ox và AK vuông góc với Oy. Ta có $OK = OH = 5$, $AK = BH = 1$ và $\widehat{AKO} = \widehat{BHO} = 90^o$ nên $\Delta OAK = \Delta OBH$.

Suy ra $OA = OB$ (1) và $\widehat{AOK} = \widehat{BOH}$. Do đó:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOK} + \widehat{KOB} = \widehat{BOH} + \widehat{KOB} = \widehat{KOH} = 90^o\ (2).$$



Hình 12

Từ (1) và (2) suy ra phép quay thuận chiều 90^o tâm O biến điểm A thành điểm B.

Ví dụ 2 Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh AC, AB, BC sao cho $AD = BE = CF$.

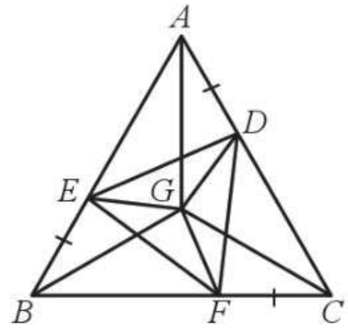
a) Chứng minh các tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm G.

b) Chứng minh: Phép quay thuận chiều 120^o tâm G biến điểm A thành điểm C, biến điểm C thành điểm B và biến điểm B thành điểm A.

c) Phép quay ngược chiều 120^o tâm G có biến điểm F thành điểm D, biến điểm D thành điểm E và biến điểm E thành điểm F không? Vì sao?

Giải. (*Hình 13*)

a) Ta có $AD = BE$, $\widehat{DAE} = \widehat{EBF}$, $AE = BF$ nên $\Delta ADE = \Delta BEF$ (c.g.c). Suy ra $DE = EF$. Chứng minh tương tự ta có $EF = FD$. Do đó $DE = EF = FD$ nên DEF là tam giác đều. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $AD = CF$, $\widehat{DAG} = \widehat{FCG}$, $GA = GC$. Suy ra $\Delta AGD = \Delta CGF$ (c.g.c). Do đó $GD = GF$.



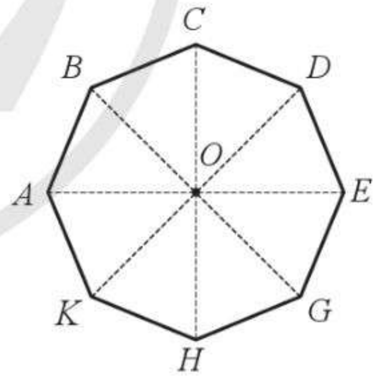
Hình 13

Tương tự $GD = GE$ nên $GD = GE = GF$. Mà tam giác DEF là tam giác đều. Suy ra G là trọng tâm của tam giác DEF. Vậy các tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm G.

b) Ta có G là trọng tâm của tam giác đều ABC nên $\widehat{AGB} = \widehat{BGC} = \widehat{AGC} = 120^\circ$ và $GA = GB = GC$. Suy ra phép quay thuận chiều 120° tâm G biến điểm A thành điểm C, biến điểm C thành điểm B và biến điểm B thành điểm A.

c) Ta có G là trọng tâm của tam giác DEF nên $\widehat{EGD} = \widehat{DGF} = \widehat{EGF} = 120^\circ$ và $GD = GE = GF$. Suy ra phép quay ngược chiều 120° tâm G biến điểm F thành điểm D, biến điểm D thành điểm E và biến điểm E thành điểm F.

Ví dụ 3 Cho hình đa giác đều có 8 cạnh $ABCDEGHK$ tâm O (*Hình 14*). Phép quay thuận chiều 45° tâm O biến điểm A thành điểm B thì phép quay đó biến các điểm C, D, H, K tương ứng thành các điểm nào?



Hình 14

Giải

Phép quay thuận chiều 45° tâm O biến điểm A thành điểm B thì phép quay đó biến các điểm C, D, H, K tương ứng thành các điểm D, E, K, A.

Ví dụ 4 Cho hình đa giác đều có 12 cạnh $A_1A_2A_3 \ldots A_{11}A_{12}$ với tâm O. Tìm phát biểu **sai** trong các phát biểu sau:

a) Các phép quay thuận chiều α° tâm O, với α° lần lượt nhận các giá trị 30°; 60°; 90°; …; 330°; 360° giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2A_3 \ldots A_{11}A_{12}$.

b) Các phép quay thuận chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị 20^o; 40^o; 60^o; ...; 340^o; 360^o giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$.

c) Các phép quay ngược chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị 20^o; 40^o; ...; 340^o; 360^o giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$.

d) Các phép quay ngược chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị 30^o; 60^o; 90^o; ...; 330^o; 360^o giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$.

Giải

Các phép quay giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$ với tâm O là các phép quay thuận chiều α^o tâm O và các phép quay ngược chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị:

$$\alpha_1^o = \frac{360^o}{12} = 30^o;\ \alpha_2^o = \frac{2\,.\,360^o}{12} = 60^o;\ \alpha_3^o = \frac{3\,.\,360^o}{12} = 90^o;\ ...;\ \alpha_{12}^o = 360^o.$$

Do đó, trong các phát biểu đã nêu thì các phát biểu b), c) sai.

C. BÀI TẬP

13. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho $M(-4\,;0)$, $N(4\,;0)$ và $P(3\,;3)$.

a) Phép quay ngược chiều α^o tâm O biến điểm M thành điểm N. Tìm α.

b) Qua phép quay thuận chiều 90^o tâm O, điểm P biến thành điểm nào?

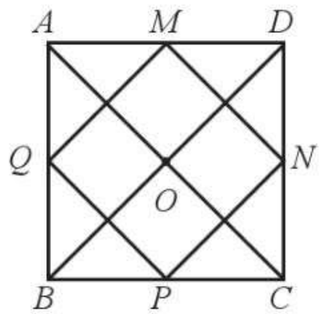
14. a) Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chỉ ra phép quay ngược chiều tâm O sao cho phép quay đó biến mỗi điểm C và D thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.

b) Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm O. Chỉ ra phép quay thuận chiều tâm O sao cho phép quay đó biến mỗi điểm A_3, A_4, A_5 thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.

15. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC, CB, BA (*Hình 15*).

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

b) Phép quay ngược chiều 90^o tâm O biến các điểm O, D, N tương ứng thành các điểm nào?



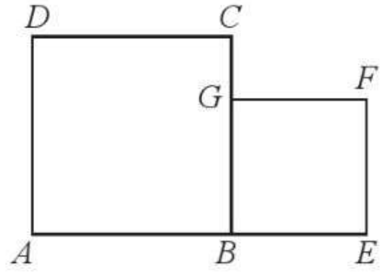
Hình 15

c) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình vuông $MNPQ$.

16. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $BEFG$ (*Hình 16*).

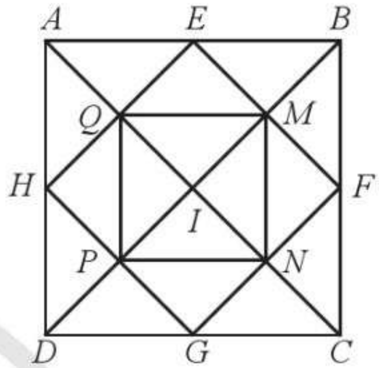
a) Phép quay thuận chiều 90^o tâm B biến các điểm A, B, G lần lượt thành các điểm nào?

b) Phép quay ngược chiều 45^o tâm A biến các điểm B, E lần lượt thành các điểm nào?



Hình 16

17. Cho hình vuông $ABCD$, I là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Q, N lần lượt là giao điểm của AC với HE và AC với GF; M, P lần lượt là giao điểm của BD với EF và BD với GH (*Hình 17*). Phép quay thuận chiều 90^o tâm I có giữ nguyên các tứ giác $EFGH$ và tứ giác $MNPQ$ hay không? Vì sao?



Hình 17

18. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ với $A(1\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ 1)$, $C(-1\ ;-1)$, $D(1\ ;-1)$. Phép quay ngược chiều 45^o tâm O biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Tính diện tích tứ giác $A'B'C'D'$.

19. Khi quan sát la bàn (*Hình 18a*), bác An thấy con tàu mà bác điều khiển đang đi thẳng và di chuyển về hướng Bắc. Hỏi bác phải thực hiện phép quay nào trên bánh lái (*Hình 18b*) để con tàu rẽ sang:

a) Hướng Tây? b) Hướng Đông?

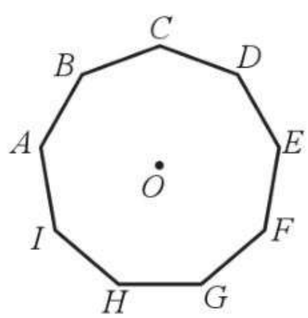
a)


b)

Hình 18

20. Cho hình đa giác đều có 9 cạnh $ABCDEFGHI$ với tâm O (*Hình 19*). Tìm phát biểu **sai**, phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

a) Các phép quay thuận chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị 40^o; 80^o; …; 320^o; 360^o giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEFGHI$.



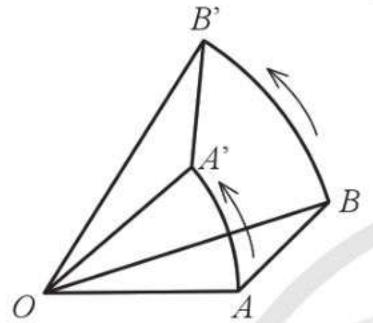
Hình 19

b) Phép quay ngược chiều 80^o tâm O biến các điểm A, B, C, D, E lần lượt thành các điểm H, I, E, B, C.

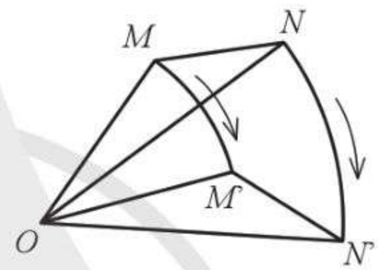
c) Phép quay ngược chiều 120^o tâm O biến các điểm A, B, C, D, E lần lượt thành các điểm G, H, I, A, C.

21. Cho điểm O cố định và số đo α^o ($0^o < \alpha^o < 180^o$).

a) Ở *Hình 20*, phép quay ngược chiều α^o tâm O biến điểm A thành điểm A' và biến điểm B thành điểm B'. Chứng minh $AB = A'B'$.



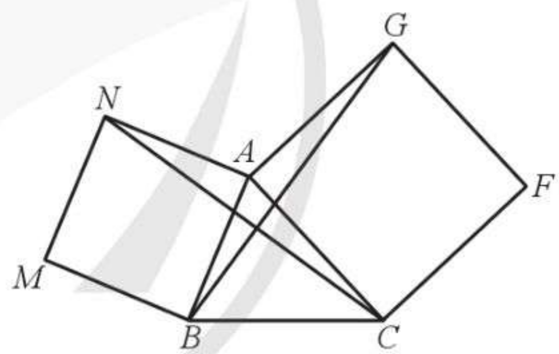
Hình 20



Hình 21

b) Ở *Hình 21*, phép quay thuận chiều α^o tâm O biến điểm M thành điểm M' và biến điểm N thành điểm N'. Hỏi MN có bằng $M'N'$ hay không? Vì sao?

22. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác đó dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACFG$ (*Hình 22*). Sử dụng kết quả bài tập 21 chứng minh $BG = CN$.



Hình 22

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

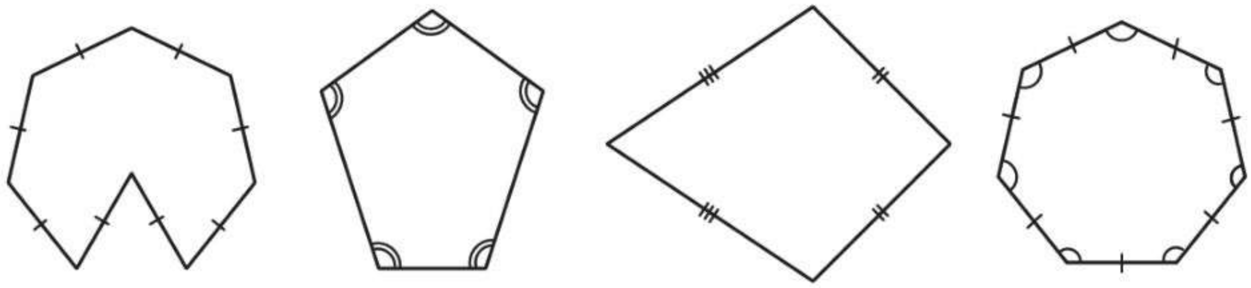
23. Tổng số đo tất cả các góc của ngũ giác $ABCDE$ là:

A. 560^o. **B.** 540^o. **C.** 520^o. **D.** 500^o.

24. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho $A(-2; -2)$. Phép quay thuận chiều 90^o tâm O biến điểm A thành điểm I. Khi đó toạ độ của điểm I là:

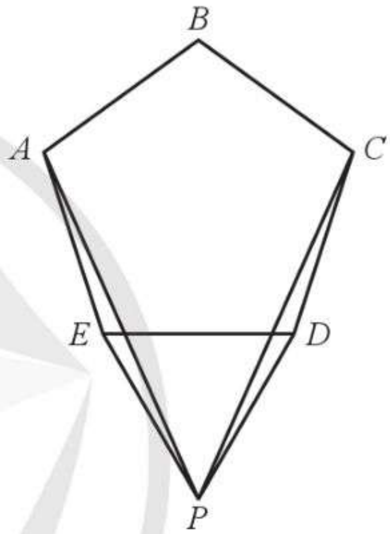
A. $(-2 ; 0)$. **B.** $(0 ; -2)$. **C.** $(2 ; -2)$. **D.** $(-2 ; 2)$.

25. Quan sát các đa giác ở *Hình 23* và cho biết hình nào là đa giác đều.



Hình 23

26. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Về phía ngoài của ngũ giác đó dựng tam giác đều PDE (*Hình 24*). Tính số đo góc APC.



Hình 24

27. Cho tam giác đều ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh lục giác $DKFIEM$ là lục giác đều.

28. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Về phía ngoài lục giác dựng các hình vuông BAA_1A_2, CBA_3A_4, DCA_5A_6, EDA_7A_8, FEA_9A_{10}, $AFA_{11}A_{12}$. Đa giác $A_1A_2A_3\dots A_{11}A_{12}$ có phải là đa giác đều không? Vì sao?

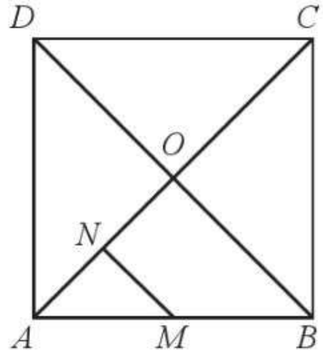
29. Cho lục giác đều $ABCDEF$ với tâm O thoả mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C, D, E, F lần lượt thành các điểm B, C, D, E, F, A. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của EF, BD.

a) Tìm α ($0 < \alpha < 180$), biết phép quay ngược chiều α° tâm O biến các điểm D, C lần lượt thành các điểm B, A.

b) Chứng minh phép quay thuận chiều 60° tâm A biến các điểm O, N lần lượt thành các điểm F, M.

30. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ với $A(0 ; 2)$, $B(-2 ; 0)$, $C(0 ; -2)$, $D(2 ; 0)$. Phép quay thuận chiều 90° tâm O biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. Tính chu vi tứ giác $A'B'C'D'$.

31. Cho hình vuông $ABCD$ và O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AO (*Hình 25*). Phép quay ngược chiều 90° tâm O biến các điểm N, M lần lượt thành các điểm N', M'.



Hình 25

a) Chứng minh tam giác $BN'M'$ là tam giác vuông cân.

b) Tính tỉ số diện tích tam giác ANM và diện tích tam giác $CN'M'$.

c) Phát biểu "Phép quay thuận chiều 90° tâm N biến điểm O thành điểm M, biến điểm D thành điểm B" là đúng hay sai? Vì sao?

32. Quan sát bề mặt của chiếc diều, khung cửa sổ, chiếc bàn như ở các hình *26a*, *26b*, *26c*. Các bề mặt của mỗi vật thể đó có dạng hình đa giác đều hay không?

a) *b)* *c)*

Hình 26

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Các đa giác có trong *Hình 6* là: tam giác ABC, tam giác ACD, tam giác ADE, tam giác AEF; tứ giác $ABCD$, tứ giác $ACDE$, tứ giác $ADEF$; ngũ giác $ABCDE$, ngũ giác $ACDEF$; lục giác $ABCDEF$.

2. Học sinh tự làm.

3. Chẳng hạn có thể vẽ các đa giác lồi: $A_1A_2A_3A_7A_8A_9$, $A_1A_2A_4A_5A_6A_8A_9$, …

4. Tổng diện tích các tam giác ABM, CBN, CPD, AQE là:

$$\frac{4\,.\,2}{2}+\frac{2\,.\,2}{2}+\frac{3\,.\,2}{2}+\frac{1\,.\,2}{2}=10 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $6\,.\,4 = 24$ (đơn vị diện tích).

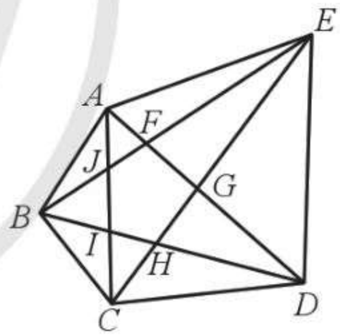
Diện tích ngũ giác $ABCDE$ là: $24 - 10 = 14$ (đơn vị diện tích).

Tỉ số diện tích ngũ giác $ABCDE$ và diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $\frac{14}{24} \approx 0{,}6$.

5. (*Hình 27*).

Áp dụng các bất đẳng thức tam giác ta có:

$AF + FE > AE$; $AJ + JB > AB$; $BI + IC > BC$;
$CH + HD > CD$; $GE + GD > ED$. Do đó, ta có:
$(AF + GD) + (JB + FE) + (AJ + IC) + (BI + HD)$
$+ (EG + CH) > AB + BC + CD + DE + EA$ (1).



Hình 27

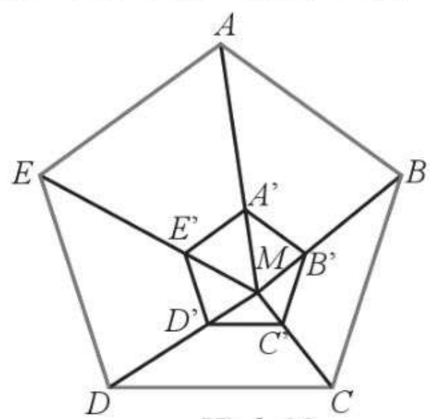
Mặt khác: $(AF + GD) + (JB + FE) + (AJ + IC)$
$+ (BI + HD) + (EG + CH) < AC + AD + BD + BE + EC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $AC + AD + BD + BE + EC > AB + BC + CD + DE + EA$.

6. (*Hình 28*).

Từ giả thiết suy ra:

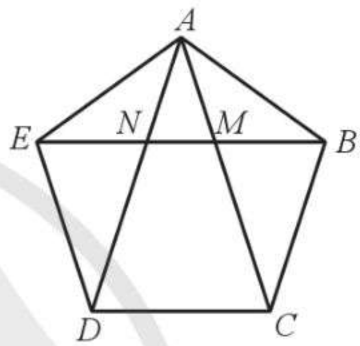
$$\frac{MA'}{MA}=\frac{MB'}{MB}=\frac{MC'}{MC}=\frac{MD'}{MD}=\frac{ME'}{ME}=\frac{1}{3} \text{ (1).}$$



Hình 28

Do đó: $A'B' // AB$, $B'C' // BC$, $C'D' // CD$, $D'E' // DE$, $E'A' // EA$. Từ đó ta dễ chứng minh được các góc A', B', C', D', E' của ngũ giác $A'B'C'D'E'$ tương ứng bằng các góc A, B, C, D, E của ngũ giác đều $ABCDE$. Do đó các góc của ngũ giác $A'B'C'D'E'$ bằng nhau (2). Mặt khác, từ (1) ta cũng chứng minh được: $A'B' = \dfrac{AB}{3}$; $B'C' = \dfrac{BC}{3}$; $C'D' = \dfrac{CD}{3}$; $D'E' = \dfrac{DE}{3}$; $E'A' = \dfrac{EA}{3}$. Do đó: $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$ (3). Từ (2) và (3) suy ra ngũ giác $A'B'C'D'E'$ là ngũ giác đều.

7. (*Hình 29*).



Hình 29

a) Ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều nên tam giác AEB cân tại A và $\widehat{EAB} = 108^\circ$, tam giác EAD cân tại E và $\widehat{AED} = 108^\circ$. Suy ra $\widehat{EAN} = \widehat{NEA} = 36^\circ$ nên tam giác AEN cân tại N. Tương tự tam giác MAB cân tại M và $\widehat{AMB} = 108^\circ$. Mặt khác: $\widehat{CMB} = 180^\circ - \widehat{AMB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$;

$\widehat{MBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABM} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

Suy ra tam giác CMB cân tại C.

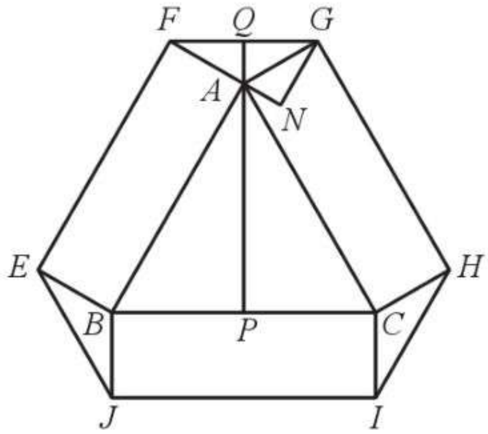
b) Do $\widehat{EAB} = 108^\circ$, $\widehat{EAN} = 36^\circ$ và $\widehat{MAB} = 36^\circ$ nên $\widehat{MAN} = 36^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{EAN} = \widehat{NAM} = 36^\circ$. Vì vậy AN là phân giác của góc EAM.

c) Dễ thấy $\Delta MAB \backsim \Delta BAC$ (g.g) suy ra $\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AC}{BC}$ hay $AB \cdot BC = BM \cdot AC$.

8. Học sinh tự làm.

9. Học sinh tự làm.

10. (*Hình 30*).



Hình 30

Gọi P là trung điểm của BC và Q là giao điểm của các đường thẳng AP và FG.

Ta có: $\widehat{BAP} = \widehat{PAC} = 30^\circ$,

$\widehat{FAQ} = \widehat{QAG} = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{FAG} = 120^\circ$. Kẻ GN vuông góc với FA (N thuộc FA). Tam giác vuông FQA có $\widehat{FAQ} = 60^\circ$ và $FA = x$ nên $FQ = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ do đó $FG = x\sqrt{3}$.

Nếu $EFGHIJ$ là lục giác đều thì $FG = GH$, do đó $a = x\sqrt{3}$ hay $a^2 = 3x^2$. Ngược lại, nếu $a^2 = 3x^2$ thì $FG = a$ và các cạnh của lục giác $EFGHIJ$ bằng nhau (1). Mặt khác, các góc của lục giác $EFGHIJ$ đều bằng 120° nên lục giác $EFGHIJ$ là lục giác đều. Vậy hệ thức liên hệ giữa a^2 và x^2 để lục giác $EFGHIJ$ là lục giác đều là $a^2 = 3x^2$.

11. a) 135°. b) 140°. c) 144°.

12. Gọi O là tâm của đa giác đều $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$. Ta có $OA_1 = OA_2$ suy ra O nằm trên đường trung trực của cạnh A_1A_2. Tương tự ta có O nằm trên các đường trung trực của các đoạn A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

13. a) $\alpha = 180$.

b) Qua phép quay thuận chiều 90° tâm O điểm $P(3 ; 3)$ biến thành điểm $Q(3 ; -3)$.

14. a) Phép quay ngược chiều 180° tâm O biến mỗi điểm C và D thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.

b) Phép quay thuận chiều 180° tâm O biến mỗi điểm A_3, A_4, A_5 thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.

15. a) Học sinh tự làm.

b) Phép quay ngược chiều 90° tâm O biến các điểm O, D, N tương ứng thành các điểm O, A, M.

c) Các phép quay tâm O giữ nguyên hình vuông $MNPQ$ là các phép quay thuận chiều α° tâm O và các phép quay ngược chiều α° tâm O, với α° lần lượt nhận các giá trị: $\alpha_1^\circ = 90^\circ$; $\alpha_2^\circ = 180^\circ$; $\alpha_3^\circ = 270^\circ$; $\alpha_4^\circ = 360^\circ$.

16. a) Phép quay thuận chiều 90° tâm B biến các điểm A, B, G lần lượt thành các điểm C, B, E.

b) Phép quay ngược chiều 45° tâm A:

– Biến điểm B thành điểm N với N nằm trên tia AC và $AN = AB$;

– Biến điểm E thành điểm M với M nằm trên tia AC và $AM = AE$.

17. Ta có thể chứng minh các tứ giác $EFGH$ và $MNPQ$ đều là hình vuông có tâm I nên phép quay thuận chiều 90^o tâm I giữ nguyên các tứ giác $EFGH$ và $MNPQ$.

18. (Học sinh tự vẽ hình). Hình vuông $ABCD$ có $A(1\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ 1)$, $C(-1\ ;\ -1)$, $D(1\ ;-1)$ nên suy ra $OA = OB = OC = OD = \sqrt{2}$. Do đó, phép quay ngược chiều 45^o tâm O biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm $A'(0\ ;\ \sqrt{2})$, $B'(-\sqrt{2}\ ;\ 0)$, $C'(0\ ;\ -\sqrt{2})$, $D'(\sqrt{2}\ ;\ 0)$. Suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình vuông với hai đường chéo là $A'C'$ và $B'D'$ nên diện tích tứ giác $A'B'C'D'$ là:

$$\frac{1}{2}\ .\ A'C'\ .\ B'D' = \frac{1}{2}\ .\ 2\sqrt{2}\ .\ 2\sqrt{2} = 4 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

19. Học sinh tự làm.

20. – Phát biểu a) đúng.

– Vì phép quay ngược chiều 80^o tâm O biến điểm C thành điểm A nên phát biểu phép quay ngược chiều 80^o tâm O biến điểm C thành điểm E là sai. Vậy phát biểu b) sai.

– Vì phép quay ngược chiều 120^o tâm O biến điểm E thành điểm B nên phát biểu phép quay ngược chiều 120^o tâm O biến điểm E thành điểm C là sai. Vậy phát biểu c) sai.

21. a) Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{AOA'} - \widehat{A'OB} = \alpha^o - \widehat{A'OB}$,

$\widehat{A'OB'} = \widehat{BOB'} - \widehat{A'OB} = \alpha^o - \widehat{A'OB}$.

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$.

Lại có $OB = OB'$, $OA = OA'$ nên $\Delta OAB = \Delta OA'B'$. Do đó $AB = A'B'$.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có $MN = M'N'$.

22. Vì phép quay thuận chiều 90^o tâm A biến các điểm B, G lần lượt thành các điểm N, C nên áp dụng kết quả bài tập 21 ta có $BG = CN$.

23. B. **24. D.** **25. D.**

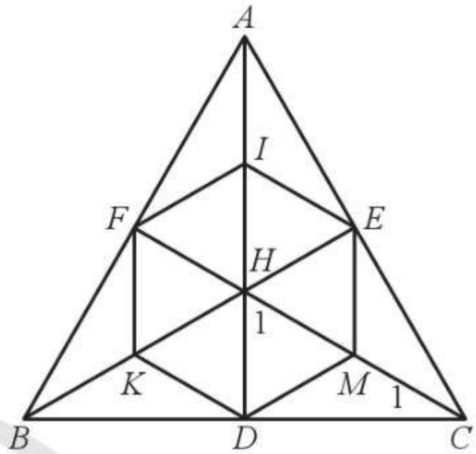
26. Ta có $ABCDE$ là ngũ giác đều suy ra các góc của nó đều bằng 108^o. Do đó:

$$\widehat{AEP} = \widehat{AED} + \widehat{DEP} = 108^o + 60^o = 168^o;$$

$$\widehat{CDP} = \widehat{CDE} + \widehat{EDP} = 108^o + 60^o = 168^o.$$

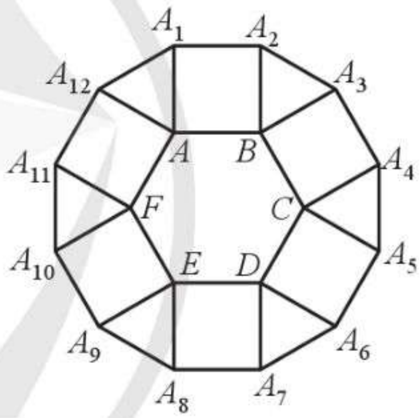
Mà $PE = PD = DE = EA = DC$ nên các tam giác EAP, DCP là các tam giác cân lần lượt tại các đỉnh E và D. Suy ra: $\widehat{EPA} = \widehat{DPC} = \dfrac{180^\circ - 168^\circ}{2} = 6^\circ$. Vì vậy ta có $\widehat{APC} = \widehat{EPD} - \widehat{EPA} - \widehat{DPC} = 60^\circ - 6^\circ - 6^\circ = 48^\circ$.

27. (*Hình 31*). Vì ABC là tam giác đều và CF là đường cao nên CF cũng là đường phân giác của $\widehat{ACB}$. Suy ra $\widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác HDC vuông tại D có $\widehat{C_1} = 30^\circ$ và M là trung điểm của HC nên $\widehat{H_1} = 60^\circ$ và $MD = MH = MC$. Do đó, tam giác DHM đều. Tương tự ta cũng chứng minh được các tam giác HEM, HEI, HIF, HFK, HKD là các tam giác đều. Từ đó suy ra lục giác $DKFIEM$ có các góc đều bằng 120° và các cạnh đều bằng nhau, do đó lục giác $DKFIEM$ là lục giác đều.



Hình 31

28. (*Hình 32*). Vì $ABCDEF$ là lục giác đều nên nó có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc đều bằng 120°. Từ đó, ta có thể chứng minh được $\widehat{A_2BA_3} = 60^\circ$. Mà $BA_2 = BA_3$ nên BA_2A_3 là tam giác đều. Từ đó suy ra: $A_2A_3 = BA_2 = BA$ và $\widehat{A_1A_2A_3} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

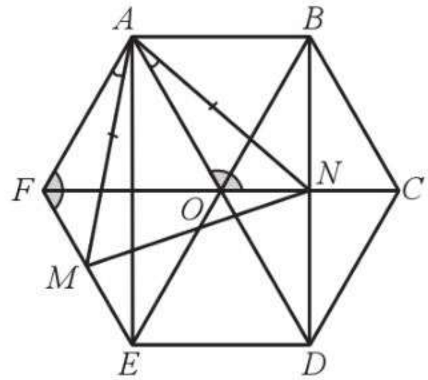


Hình 32

Bằng cách tương tự ta chứng minh được đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_{11}A_{12}$ có các góc đều bằng 150° và các cạnh đều bằng nhau và bằng BA. Do đó, đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_{11}A_{12}$ là đa giác đều.

29. (*Hình 33*).

a) $\alpha = 120$.



Hình 33

b) Ta có $FA = AO$, $\widehat{AFM} = \widehat{AON} = 120^\circ$, $FM = ON$ nên $\Delta AFM = \Delta AON$ (c.g.c). Suy ra $AM = AN$ và $\widehat{FAM} = \widehat{OAN}$. Mặt khác:

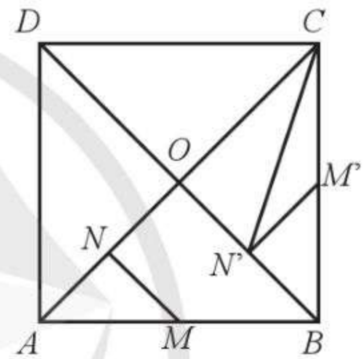
$$\widehat{MAN} = \widehat{MAO} + \widehat{OAN} = \widehat{MAO} + \widehat{MAF} = \widehat{FAO} = 60^\circ.$$

Có $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 60^\circ$ suy ra tam giác NAM là tam giác đều (1). Lại có tam giác OAF cũng là tam giác đều (2). Từ (1) và (2) suy ra phép quay thuận chiều 60° tâm A biến các điểm O, N lần lượt thành các điểm F, M.

30. Ta có phép quay thuận chiều 90° tâm O giữ nguyên hình vuông $ABCD$ do đó chu vi tứ giác $A'B'C'D'$ bằng chu vi hình vuông $ABCD$ và bằng $4 . 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (đơn vị chiều dài).

31. (*Hình 34*).

a) Do phép quay ngược chiều 90° tâm O biến các điểm N, M lần lượt thành các điểm N', M' nên các tam giác ONN' và OMM' là các tam giác vuông cân tại O. Từ đó dễ thấy N', M' lần lượt là trung điểm của OB, BC.



Hình 34

Vì thế $AN = BN'$, $AM = BM'$, $\widehat{MAN} = \widehat{M'BN'} = 45^\circ$(1) nên $\Delta ANM = \Delta BN'M'$ (2).

Lại có MN là đường trung bình của tam giác AOB nên $\widehat{ANM} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ (3). Từ (1), (2), (3), ta có tam giác $BN'M'$ là tam giác vuông cân.

b) Kí hiệu diện tích các tam giác ANM, AOB, $CN'M'$, $CN'B$, COB lần lượt là S_{ANM}, S_{AOB}, $S_{CN'M'}$, $S_{CN'B}$, S_{COB}. Ta có: $S_{ANM} = \frac{1}{4}S_{AOB}$; $S_{CN'M'} = \frac{1}{2}S_{CN'B}$; $S_{CN'B} = \frac{1}{2}S_{COB}$.

Suy ra: $S_{CN'M'} = \frac{1}{4}S_{COB}$. Mặt khác: $S_{AOB} = S_{COB}$. Do đó: $S_{ANM} = S_{CN'M'}$.

Vậy $S_{ANM} : S_{CN'M'} = 1$.

c) Dễ thấy tam giác NDB cân ở N và $\widehat{DNB} > 90^\circ$. Suy ra phép quay thuận chiều 90° tâm N không thể biến điểm D thành điểm B. Vậy phát biểu "Phép quay thuận chiều 90° tâm N biến điểm O thành điểm M, biến điểm D thành điểm B" là sai.

32. a) Mặt cánh diều không có dạng đa giác đều.

b) Mặt cửa sổ có dạng lục giác đều.

c) Mặt bàn có dạng đa giác đều tám cạnh.

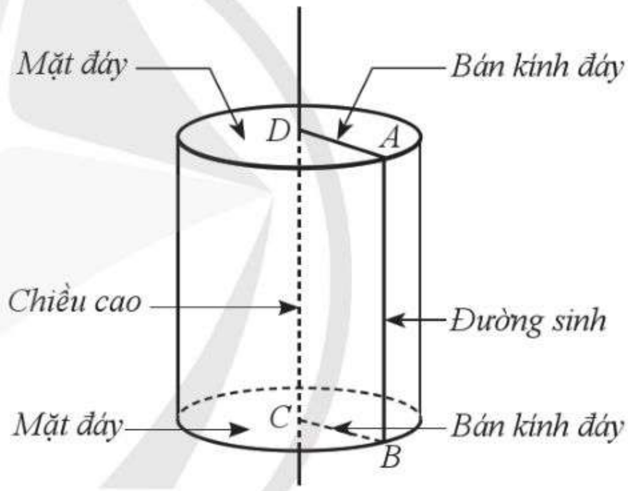
Chương X
HÌNH HỌC TRỰC QUAN

§1 HÌNH TRỤ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhận biết hình trụ

- Hình trụ là hình được tạo ra khi quay một hình chữ nhật một vòng xung quanh một đường thẳng cố định chứa một cạnh của nó.
- Với hình trụ như ở *Hình 1*, ta có:
  - Hình tròn tâm D bán kính DA và hình tròn tâm C bán kính CB là hai mặt đáy; hai mặt đáy của hình trụ bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song;
  - Độ dài cạnh DA được gọi là bán kính đáy;
  - Độ dài cạnh CD được gọi là chiều cao;
  - Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của cạnh AB được gọi là một đường sinh; độ dài đường sinh bằng chiều cao của hình trụ.



Hình 1

Diện tích xung quanh, thể tích của hình trụ có bán kính đáy *r* và chiều cao *h*

- Diện tích xung quanh của hình trụ S_{xq} bằng tích của chu vi đáy với chiều cao: $S_{xq} = 2\pi rh$.
- Diện tích toàn phần của hình trụ S_{tp} bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.
- Thể tích của hình trụ V bằng tích của diện tích đáy với chiều cao: $V = \pi r^2 h$.

Chú ý: Trong chương này, ở các ví dụ và bài tập, ta lấy $\pi \approx 3,14$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Thùng phuy là một vật dụng thường có dạng hình trụ dùng để chứa và chở chất lỏng với dung tích lớn. Một chiếc thùng phuy hình trụ không có nắp với đường kính đáy là 0,58 m và chiều cao là 0,85 m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh và mặt đáy của thùng phuy. Hỏi diện tích bề mặt được sơn của thùng phuy là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

Diện tích bề mặt được sơn của thùng phuy là:

$$0,58 \,.\, \pi \,.\, 0,85 + \pi \,.\, (0,58 : 2)^2 \approx 1,8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Ví dụ 2 Chiều cao của một hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Thể tích hình trụ là 16,956 m^2. Tính chiều cao của hình trụ.

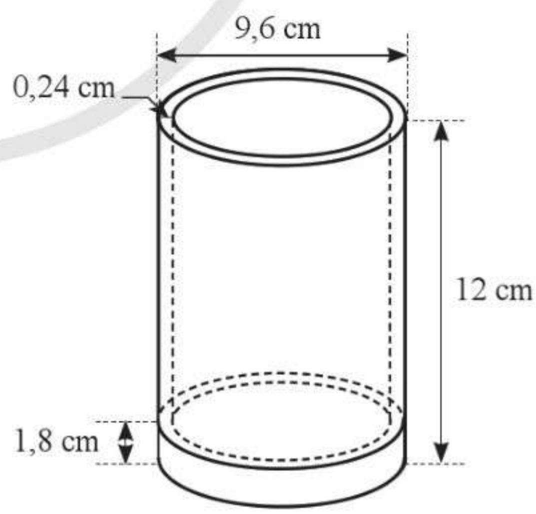
Giải

Ta có thể tích hình trụ là 16,956 m^2 = 169 560 cm^2. Lại có, chiều cao của hình trụ bằng hai lần bán kính đáy r của hình trụ nên: $169\,560 = \pi \,.\, r^2 \,.\, 2r$.

Do đó: $r = \sqrt[3]{\dfrac{169\,560}{2\pi}} \approx 30$ (cm).

Vậy chiều cao của hình trụ đó khoảng là: 30 . 2 = 60 (cm).

Ví dụ 3 Cần bao nhiêu centimét khối thuỷ tinh để làm một chiếc cốc có dạng hình trụ (*Hình 2*) với chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng 9,6 cm (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày 1,8 cm, thành xung quanh cốc dày 0,24 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 2

Giải

Gọi V_1 là thể tích của hình trụ có đường kính đáy bằng 9,6 cm và chiều cao bằng 12 cm. Ta có:

$$V_1 = \pi \,.\, (9,6 : 2)^2 \,.\, 12 = 276,48\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Gọi V_2 là thể tích lớn nhất của lượng chất lỏng mà cốc có thể đựng. Ta có:

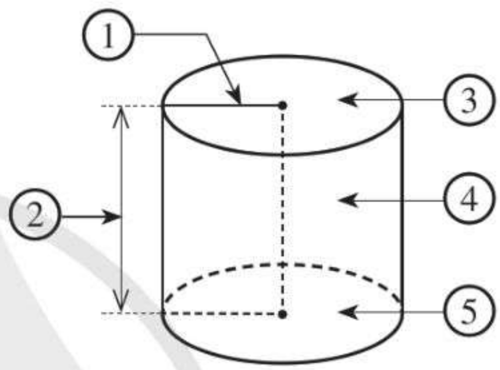
$$V_2 = \pi \, . \, [(9,6 - 0,24 \, . \, 2) : 2]^2 \, . \, (12 - 1,8) = 212,09472\pi \ (\text{cm}^3).$$

Vậy lượng thuỷ tinh cần sử dụng là:

$$V_1 - V_2 = 276,48\pi - 212,09472\pi = 64,38528\pi \approx 202,17 \ (\text{cm}^3).$$

C. BÀI TẬP

1. Quan sát hình trụ ở *Hình 3* và nêu tên gọi thích hợp cho các vị trí được đánh số.



Hình 3

2. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của diện tích đáy với chiều cao.

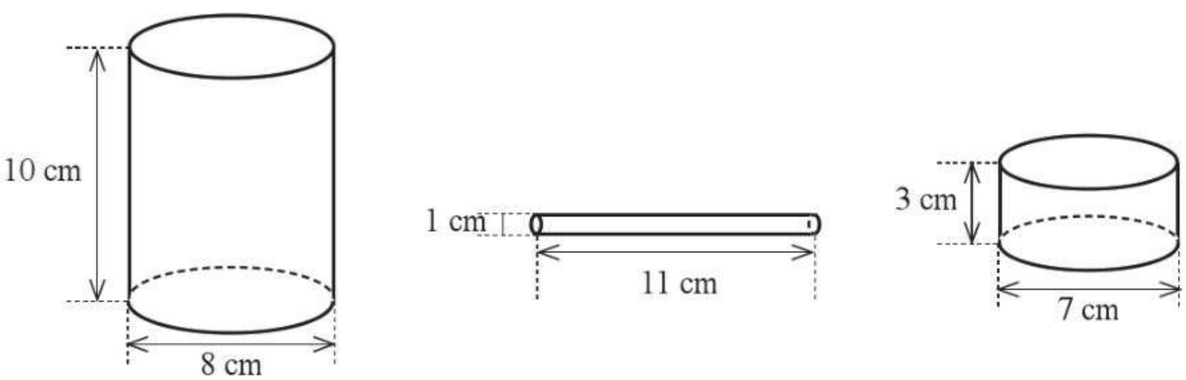
B. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy.

C. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của chu vi đáy với chiều cao.

D. Thể tích của hình trụ bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao.

3. Để gò một chiếc thùng có dạng hình trụ bằng tôn không nắp, bán kính đáy là 20 cm và chiều cao là 60 cm thì cần dùng tối thiểu bao nhiêu mét vuông tôn? (Coi lượng tôn dùng để viền mép thùng không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

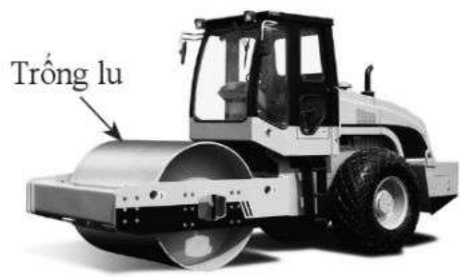
4. Tính diện tích toàn phần của mỗi hình trụ cho ở các hình *4a*, *4b*, *4c* sau:



a) *b)* *c)*

Hình 4

5. Trống lu là bộ phận có dạng hình trụ của xe lu lăn đường. Trống lu có vai trò quan trọng trong việc nén phẳng mặt đường. Biết chiều dài của trống lu là 2,15 m và bán kính đáy là 0,8 m (*Hình 5*).
Tính diện tích phần mặt đường được nén phẳng khi xe lu được điều khiển chạy thẳng trên đường và trống lu lăn tròn 120 vòng (theo đơn vị mét vuông và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



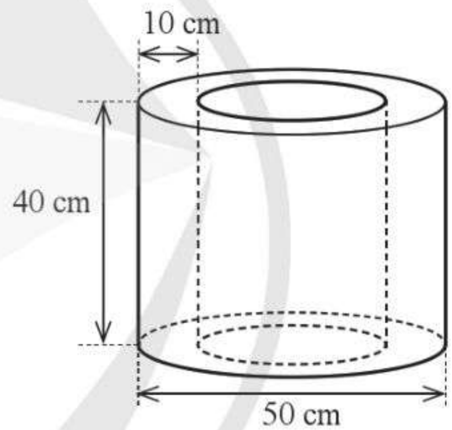
Hình 5

6. Một chiếc đèn khung tre đan trang trí phòng khách có dạng hai hình trụ với cùng chiều cao được lồng vào nhau (*Hình 6a*). Mặt xung quanh của hình trụ bên trong được dán bằng vải màu mỡ gà, mặt xung quanh của hình trụ bên ngoài được dán bằng vải màu tím. Các kích thước của hai hình trụ đó được mô tả như ở *Hình 6b*.

a) Tính tỉ số phần trăm diện tích vải màu mỡ gà và diện tích vải màu tím cần sử dụng.

b) Hỏi tổng số tiền mua vải màu tím và vải màu mỡ gà để làm chiếc đèn đó bằng bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết 1 m^2 vải màu tím và 1 m^2 vải màu mỡ gà có giá lần lượt là 95 nghìn đồng và 115 nghìn đồng.

a)

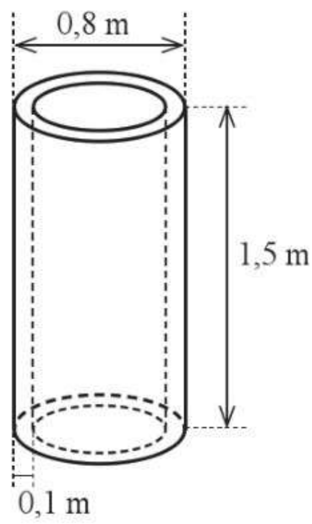


b)

Hình 6

7. Một hình trụ (T) có thể tích 81π cm^3 và có đường sinh gấp ba lần bán kính đường tròn đáy. Tính độ dài đường sinh của (T).

8. Bác An cần đúc một ống cống thoát nước bằng bê tông có dạng hình trụ rỗng với đường kính đường tròn đáy ngoài là 0,8 m, chiều dài ống là 1,5 m và bề dày là 0,1 m (*Hình 7*).



Hình 7

Hỏi số tiền bác An cần dùng để làm được một ống cống như thế là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)? Biết giá loại bê tông bác An sử dụng là 1 000 000 đồng một mét khối.

9. Để đo thể tích một tượng đồng, người ta đã thả chìm tượng đồng vào thùng nước hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 dm. Hỏi thể tích tượng đồng là bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Biết khi thả chìm tượng đồng vào thùng nước thì lượng nước trong thùng dâng cao 5 dm và nước vẫn không bị trào ra khỏi miệng thùng.

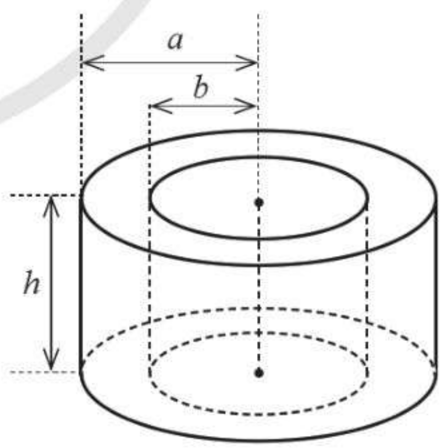
10. Bác An có một bình hình trụ to với chiều cao h (cm). Bác đặt một bình cây thuỷ sinh cũng có dạng hình trụ với chiều cao h (cm) vào bên trong bình hình trụ to đó. Bình cây thuỷ sinh có bán kính đáy bằng một nửa bán kính đáy bình hình trụ to. Bác An dùng phần không gian giữa hai bình hình trụ đó để nuôi cá cảnh (*Hình 8*). Tính tỉ số thể tích phần không gian nuôi cá cảnh và thể tích bình hình trụ to (coi bề dày đáy của các bình hình trụ không đáng kể).

Hình 8

11. Các kích thước của hai hình trụ (T) và (T') (hình trụ (T) ở bên ngoài và hình trụ (T') ở bên trong) được cho ở *Hình 9*.

a) Viết biểu thức tính thể tích phần ở giữa hai hình trụ (T) và (T') theo a, b và h.

b) Tính chiều cao h, biết $a = 16$ cm, $b = \frac{3}{4}a$ và thể tích phần ở giữa hai hình trụ (T) và (T') là 224π cm^3.



Hình 9

12. Tìm các hình ảnh hình trụ trong thực tế.

§2 HÌNH NÓN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhận biết hình nón

- Hình nón là hình được tạo ra khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đó.
- Với hình nón như ở *Hình 10*, ta có:

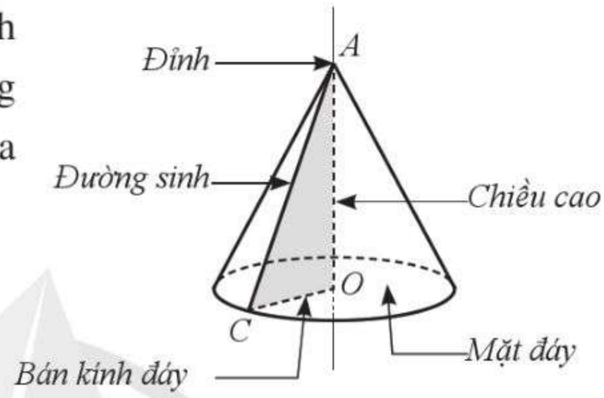
  – Điểm A là đỉnh;

  – Hình tròn tâm O bán kính OC là mặt đáy;

  – Độ dài cạnh OC được gọi là bán kính đáy;

  – Độ dài cạnh AO được gọi là chiều cao;

  – Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón, mỗi vị trí của cạnh AC được gọi là một đường sinh.



Hình 10

Chú ý: Nếu gọi độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là l, h, r thì theo định lí Pythagore ta có: $l^2 = h^2 + r^2$.

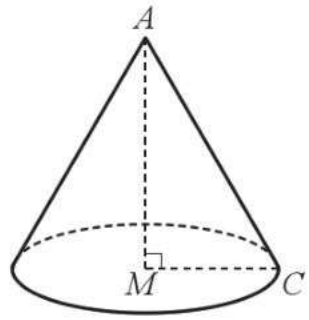
Diện tích xung quanh, thể tích của hình nón có độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r* và chiều cao *h*

- Diện tích xung quanh của hình nón S_{xq} bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh: $S_{xq} = \pi rl$.
- Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của hình nón đó: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.
- Thể tích của hình nón V bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao h:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho tam giác vuông AMC vuông tại M có $AC = 2MC$ và $AM = 3\sqrt{3}$ dm. Khi quay một vòng tam giác AMC xung quanh đường thẳng cố định AM, ta có một hình nón như *Hình 11*. Tính diện tích toàn phần của hình nón đó (theo đơn vị decimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



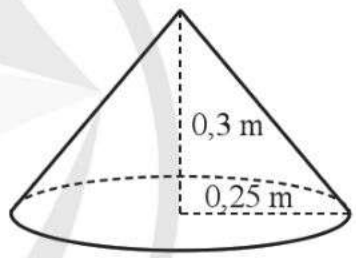
Hình 11

Giải

Tam giác AMC vuông tại M có $AC = 2MC$ nên $\cos\widehat{ACM} = \frac{MC}{AC} = \frac{1}{2}$. Do đó, ta có $\widehat{ACM} = 60^\circ$. Suy ra: $AC = \frac{AM}{\sin\widehat{ACM}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 6$ (dm) và $MC = \frac{1}{2}AC = 3$ (dm).

Vậy diện tích toàn phần của hình nón đó là: $\pi \,.\, 3 \,.\, (6 + 3) \approx 84{,}78$ (dm^2).

Ví dụ 2 Nón lá là một vật dụng thân thiết và hữu ích trong cuộc sống hằng ngày của người dân Việt Nam. Mỗi chiếc nón lá có dạng một hình nón. Cứ 1 kg lá nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là 6,13 m^2. Hỏi số kilôgam lá nón cần dùng để làm được 1 chiếc nón lá có bán kính đáy là 0,25 m, chiều cao 0,3 m (*Hình 12*) là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 12

Giải

Độ dài đường sinh của chiếc nón đó là: $\sqrt{0,25^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,1525}$ (m).

Diện tích xung quanh của mặt chiếc nón lá đó là: $\pi \,.\, 0,25 \,.\, \sqrt{0,1525}$ (m^2).

Số kilôgam lá nón cần dùng để làm được 1 chiếc nón lá đó là:

$$(\pi \,.\, 0,25 \,.\, \sqrt{0,1525}) : 6,13 \approx 0,05 \text{ (kg)}.$$

Ví dụ 3 Công trình Trung tâm triển lãm văn hoá nghệ thuật và nhà hát Cao Văn Lầu (tỉnh Bạc Liêu) được xây dựng với tổng diện tích 2 262 m^2 và được chia thành ba khối có dạng hình trụ tròn tương ứng với ba mái dạng hình chiếc nón lá hướng vào nhau.


Nhà hát Cao Văn Lầu

Chiều cao và đường kính đáy của mái dạng hình chiếc nón lớn nhất trong ba mái hình chiếc nón lần lượt là 24,25 m và 45,15 m. (*Nguồn: https://laodong.vn*)

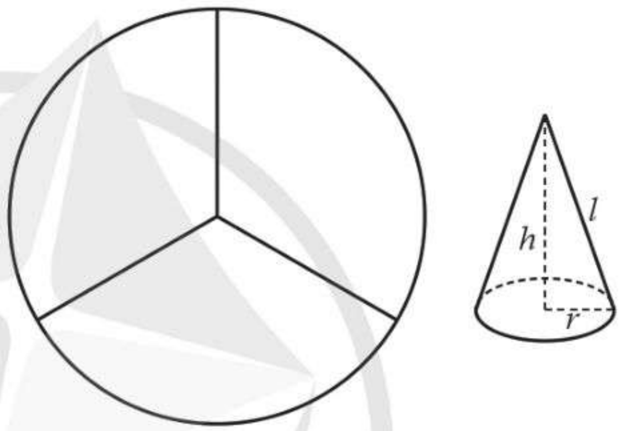
Tính thể tích của mái hình chiếc nón lớn nhất đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Thể tích của mái hình chiếc nón lớn nhất đó là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{45,15}{2}\right)^2 \cdot 24,25 \approx 12\,935,3 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Ví dụ 4 Bác An có một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm. Bác cắt miếng tôn đó thành ba miếng hình quạt như nhau, rồi cuốn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón như nhau (*Hình 13*). Hỏi thể tích của mỗi cái phễu được cuốn và hàn đó bằng bao nhiêu lít (coi phần mép hàn không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 13

Giải

Chu vi của miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm = 6 dm là: $2\pi \cdot 6 = 12\pi$ (dm).

Mỗi cái phễu hình nón cuốn và hàn được có đường sinh là $l = 6$ dm và bán kính đáy r thoả mãn $2\pi r = 12\pi : 3$ hay $r = 2$ dm. Từ đó, ta tính được chiều cao của mỗi cái phễu đó là: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ (dm).

Vậy thể tích của mỗi cái phễu đó là: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2} \approx 23,7$ (dm^3) = 23,7 (l).

C. BÀI TẬP

13. Một hình nón có chiều cao là 8 cm và đường kính đường tròn đáy bằng 12 cm. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

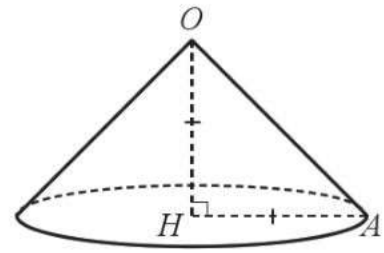
14. Cho hình nón (N) có đường kính đường tròn đáy bằng $4a$, đường sinh bằng $5a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón (N).

15. Một hình nón có đường sinh dài 15 cm và diện tích xung quanh là 135π cm^2.

a) Tính diện tích toàn phần của hình nón đó.

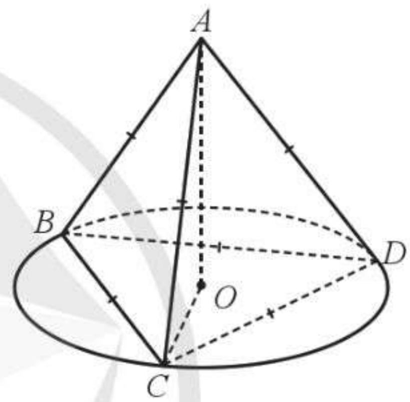
b) Tính chiều cao của hình nón đó.

16. Khi quay tam giác *OHA* vuông cân ở *H* một vòng xung quanh đường thẳng cố định *OH*, ta được một hình nón như ở *Hình 14*. Hỏi diện tích xung quanh của hình nón đó là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết diện tích tam giác *OHA* là 4 cm^2.



Hình 14

17. Cho hình chóp tam giác đều *ABCD* có các cạnh đáy và cạnh bên đều bằng *a*. Hình nón (*N*) có đỉnh *A* và đường tròn đáy tâm *O* là đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCD* (*Hình 15*). Tính diện tích toàn phần của hình nón (*N*) đó theo *a*.



Hình 15

18. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

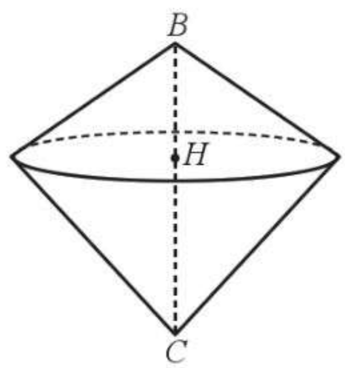
a) Nếu bán kính đáy của một hình nón tăng lên hai lần và giữ nguyên chiều cao thì thể tích của hình nón đó sẽ tăng lên hai lần.

b) Nếu chiều cao của một hình nón tăng lên hai lần và giữ nguyên bán kính đáy thì thể tích của hình nón đó sẽ tăng lên hai lần.

c) Nếu bán kính đáy và chiều cao của một hình nón cùng tăng lên hai lần thì thể tích của hình nón đó sẽ tăng lên bốn lần.

19. Một hình nón có diện tích xung quanh và diện tích toàn phần lần lượt bằng 65π cm^2, 115π cm^2. Hỏi chiều cao của hình nón đó bằng bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

20. *Hình 16* minh hoạ hình nón đỉnh *B* với đường cao *BH* và hình nón đỉnh *C* với đường cao *CH* có chung đường tròn đáy tâm *H*.



Hình 16

a) Chứng minh rằng: tỉ số thể tích của hình nón đỉnh B và thể tích của hình nón đỉnh C bằng tỉ số đường cao BH và đường cao CH.

b) Phát biểu sau đúng hay sai: "Tỉ số thể tích hai hình nón có cùng bán kính đường tròn đáy bằng tỉ số hai đường cao tương ứng của hai hình nón đó"? Vì sao?

21. Cơ sở sản xuất A làm 1 500 chiếc kem giống nhau như *Hình 17* để cung cấp cho các cửa hàng bán trong một ngày lễ. Cốc đựng kem có dạng hình nón với bề dày không đáng kể, chiều cao bằng 10 cm, đường kính miệng cốc bằng 6 cm. Kem được đổ đầy vào cốc và dư thêm lên phía trên miệng cốc một lượng bằng 10% lượng kem ở trong cốc. Để làm được 1 500 chiếc kem đó thì cơ sở sản xuất A cần chuẩn bị một lượng kem bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hình 17

22. Bác Hà thuê xe cải tiến (*Hình 18a*) chuyển một đống cát có dạng hình nón với chu vi đáy 9,42 m và chiều cao là 1,2 m (*Hình 18b*) để xây tường nhà. Biết thùng chứa của xe có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước dài 1,57 m, rộng 0,8 m và cao 0,4 m. Trong mỗi chuyến xe, bác Hà chở lượng cát ít hơn thể tích thực của xe là 5%. Hỏi bác Hà cần phải chuẩn bị ít nhất bao nhiêu tiền để chuyển hết đống cát trên, biết rằng giá vận chuyển của một chuyến xe là 90 000 đồng?

a)

b)

Hình 18

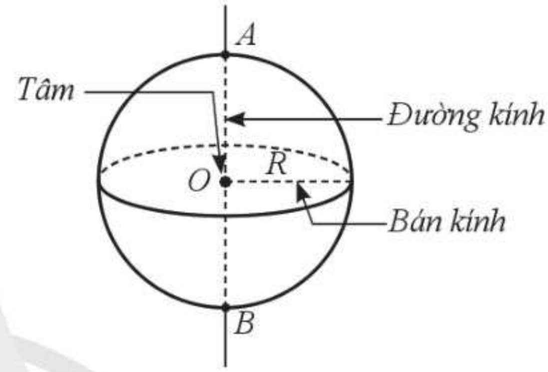
23. Tìm các hình ảnh hình nón trong thực tế.

§3 HÌNH CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhận biết hình cầu

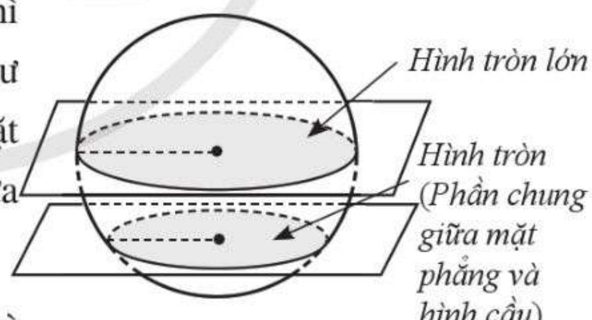
- Hình cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa hình tròn một vòng xung quanh một đường thẳng cố định chứa đường kính của nó.
- Với hình cầu như ở *Hình 19*, ta có:
  - Nửa đường tròn đường kính AB quét nên mặt cầu; như vậy, mặt cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa đường tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó;
  - Điểm O là tâm của hình cầu (hay tâm của mặt cầu);
  - Đoạn thẳng AB là đường kính của hình cầu (hay đường kính của mặt cầu);
  - R là bán kính của hình cầu (hay bán kính của mặt cầu).



Hình 19

Nhận biết phần chung giữa mặt phẳng và hình cầu

- Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một hình tròn như *Hình 20*. Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu thì phần chung giữa chúng là một hình tròn lớn như *Hình 20*.
- Nếu cắt một mặt cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một đường tròn.



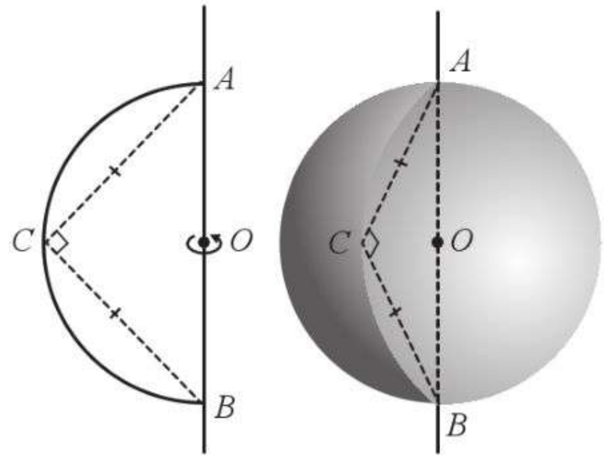
Hình 20

Diện tích mặt cầu, thể tích của hình cầu có bán kính R

- Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC = AC = 8$ dm. Quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh AB, ta được một mặt cầu (*Hình 21*). Tính diện tích mặt cầu đó (theo đơn vị decimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 21

Giải

Ta có, tam giác ABC vuông tại C và $BC = AC = 8$ dm nên $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$. Do đó $AB = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$ (dm). Vậy diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay một nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh AB là $S = 4\pi \,.\, (8\sqrt{2} : 2)^2 \approx 401{,}92$ (dm^2).

Ví dụ 2 Diện tích đại dương của thế giới khoảng 361,08 triệu km^2 và chiếm 70,8% diện tích bề mặt Trái Đất. Coi Trái Đất có dạng một hình cầu. Hỏi bán kính của Trái Đất bằng bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Do diện tích đại dương của thế giới là 361,08 triệu km^2 = 361 080 000 km^2 và chiếm 70,8% diện tích bề mặt Trái Đất nên ta tính được diện tích bề mặt Trái Đất là:

$$\frac{361\,080\,000}{70{,}8} \cdot 100 = 510\,000\,000 \text{ (km}^2\text{)}.$$

Do đó, gọi bán kính Trái Đất là R, ta có: $4\pi R^2 = 510\,000\,000$.

Suy ra: $R = \sqrt{\dfrac{510\,000\,000}{12{,}56}} \approx 6\,372$ (km).

Ví dụ 3 Khinh khí cầu là một túi đựng khí nóng, thường có khối lượng riêng nhỏ hơn không khí xung quanh và nhờ vào lực đẩy Ác-si-mét có thể bay lên cao (*Hình 22*). Coi khinh khí cầu là một khối hình cầu.

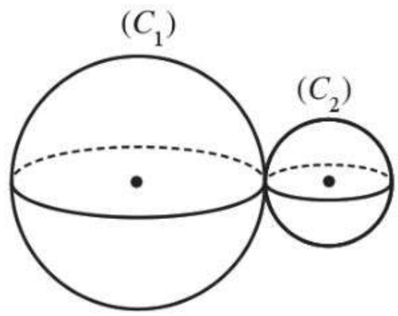

Hình 22

Hỏi thể tích của khối khinh khí cầu đó bằng bao nhiêu mét khối, biết bán kính của nó là 10 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

Thể tích của khối kinh khí cầu đó là: $\frac{4}{3} \cdot \pi \,.\, 10^3 \approx 4\,186{,}7$ (m^3).

Ví dụ 4 Một đồ chơi gồm hai khối cầu (C_1) và (C_2) với bán kính lần lượt là r_1, r_2 thoả mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ (*Hình 23*). Biết thể tích của đồ chơi đó là 180 cm^3. Tính thể tích của khối cầu (C_2).



Hình 23

Giải

Tổng thể tích của hai khối cầu (C_1) và (C_2) là:

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 = -\pi(r_1^3 + r_2^3) = \frac{4}{3}\pi[(2r_2)^3 + r_2^3] = 12\pi r_2^3 \ (cm^3).$$

Do thể tích của đồ chơi đó là 180 cm^3 nên $12\pi r_2^3 = 180$ hay $4\pi r_2^3 = 60$. Suy ra thể tích của khối cầu (C_2) là: $\frac{4\pi r_2^3}{3} = \frac{60}{3} = 20$ (cm^3).

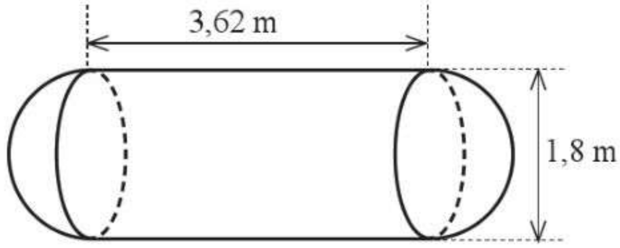
C. BÀI TẬP

24. Biết phần chung của một mặt cầu và một mặt phẳng đi qua tâm của nó là một đường tròn có diện tích bằng 8π cm^2. Tính diện tích của mặt cầu đó.

25. Một quả bida có dạng hình cầu với thể tích bằng $36\,000\pi$ mm^3. Hỏi đường kính của quả bida đó bằng bao nhiêu centimét?

26. Một khối gỗ gồm một hình cầu (C) bán kính R và một hình nón (N) có bán kính đường tròn đáy và đường sinh lần lượt là r (cm), l (cm) thoả mãn $2R = l$ và $2l = 3r$. Biết tổng diện tích mặt cầu (C) và diện tích toàn phần của hình nón (N) là 171π cm^2. Tính diện tích của mặt cầu (C) (theo đơn vị centimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

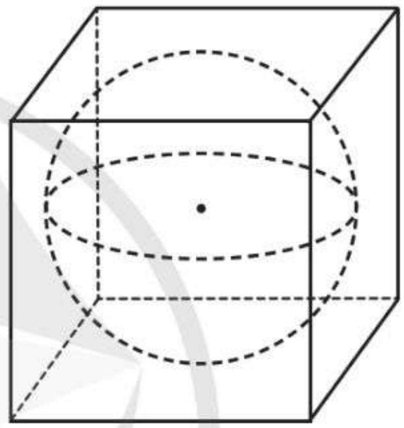
27. Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ với các kích thước như ở *Hình 24*. Hỏi thể tích của bồn chứa bằng bao nhiêu mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



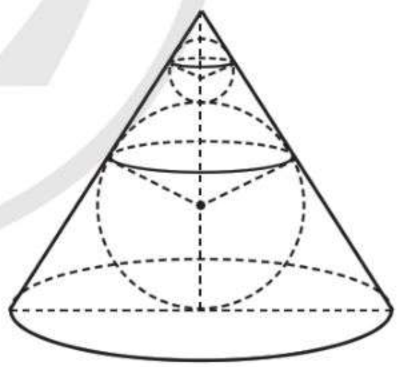
Hình 24

28. Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu (đặc, không thấm nước) với bán kính là 3 cm vào một cái cốc dạng hình trụ chứa nước. Người ta thấy viên bi chìm xuống đáy cốc và chiều cao mực nước dâng thêm 1,5 cm. Biết chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 7,2 cm. Tính thể tích của khối nước ban đầu trong cốc (theo đơn vị centimét khối và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

29. Người ta đổ đầy nước vào một bể hình lập phương cạnh $2a$. Tiếp theo, người ta thả vào trong bể đó một vật thể có dạng hình cầu (đặc, không thấm nước) bán kính a như *Hình 25*. Hỏi lượng nước còn lại trong bể bằng bao nhiêu phần trăm lượng nước bị trào ra khỏi bể (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?


Hình 25

30. Một món đồ chơi có dạng như *Hình 26*. Vỏ ngoài món đồ chơi là một hình nón (bằng nhựa trong suốt) có bán kính đường tròn đáy là $3\sqrt{3}$ cm và đường sinh là $6\sqrt{3}$ cm. Trong hình nón là hai quả cầu (bằng thuỷ tinh) to và nhỏ, bán kính của chúng lần lượt là 3 cm và 1 cm. Tính tỉ số tổng thể tích của hai quả cầu và thể tích hình nón đó.


Hình 26

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

31. Hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng chiều cao đều bằng R. Khi đó, diện tích toàn phần của hình trụ đó là:

A. $6\pi R^2$. **B.** $4\pi R^2$. **C.** $5\pi R^2$. **D.** $2\pi R^2$.

32. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng $3a$ và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của hình trụ đó là:

A. $42\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $36\pi a^3$. **D.** $24\pi a^3$.

33. Cho một hình nón có đường kính đường tròn đáy bằng 6 cm và có thể tích bằng 12π cm^3. Diện tích toàn phần của hình nón đó là:

A. 44π cm^2. **B.** 22π cm^2. **C.** 48π cm^2. **D.** 24π cm^2.

34. Một hình nón có thể tích bằng 25π cm^3, nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính đường tròn đáy của hình nón đó lên 2 lần thì thể tích của hình nón mới bằng:

A. 50π cm^3. **B.** 100π cm^3. **C.** 150π cm^3. **D.** 200π cm^3.

35. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1, mặt cầu (S_2) có bán kính R_2 với $R_2 = 4R_1$. Tỉ số diện tích mặt cầu (S_1) và diện tích mặt cầu (S_2) là:

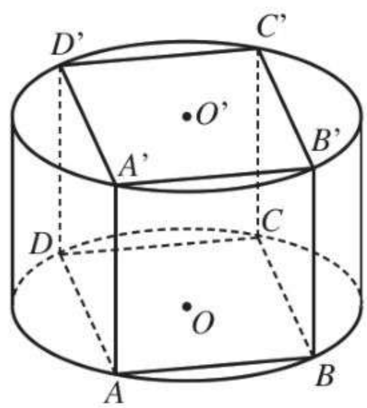
A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** 16.

36. Thể tích của một hình cầu bằng $\frac{\pi}{6}$ dm^3. Đường kính của hình cầu đó là:

A. 2 dm. **B.** $\frac{3}{2}$ dm. **C.** 1 dm. **D.** $\frac{1}{2}$ dm.

37. Hai bạn An và Bình mỗi bạn có một tấm bìa hình chữ nhật với kích thước giống nhau là a (cm) × $3a$ (cm). An cuộn tấm bìa theo chiều dài cho hai mép sát nhau rồi dùng băng dính dán lại được mặt xung quanh của một hình trụ và hình trụ này có thể tích V_1 (khi đó chiều rộng của tấm bìa trở thành chiều cao của hình trụ). Bình cuộn tấm bìa theo chiều rộng theo cách tương tự trên để được mặt xung quanh của một hình trụ và hình trụ này có thể tích V_2 (khi đó chiều dài của tấm bìa trở thành chiều cao của hình trụ). Tính tỉ số của V_1 và V_2.

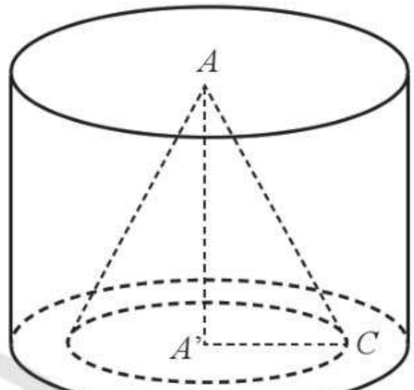
38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $27a^3$. Hình trụ (T) có hai đáy là hai đường tròn (O), (O') lần lượt ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và hình vuông $A'B'C'D'$ (*Hình 27*). Tính diện tích toàn phần của hình trụ (T) theo a.



Hình 27

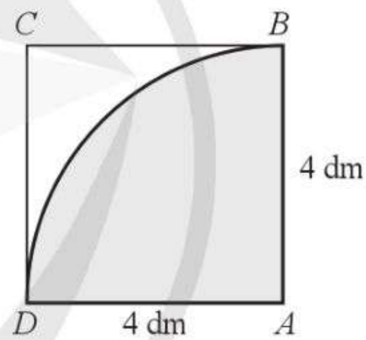
39. Bác Long đã chi tiền để làm một cái bể hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 0,8 m và có thể tích là 1,12π m^3. Đáy bể làm bằng bê tông giá 100 000 đồng/m^2. Phần thân làm bằng tôn inox giá 150 000 đồng/m^2. Phần nắp làm bằng nhôm giá 120 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền bác Long đã chi để làm được cái bể đó là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

40. Từ một khối gỗ hình trụ (*T*) với hai đường tròn đáy là (*A*; *R*), (*A*'; *R*) và đường cao *AA*' = *h*, người ta khoét đi một khối hình nón (*N*) có bán kính đường tròn đáy $A'C = \dfrac{2}{3}R$ và đường cao trùng với đường cao của hình trụ (*T*) (*Hình 28*). Hỏi thể tích phần còn lại của khối gỗ (*T*) sau khi khoét bỏ khối hình nón (*N*) bằng bao nhiêu phần trăm thể tích của khối gỗ (*T*) ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 28

41. Từ một miếng tôn có dạng hình vuông *ABCD* cạnh 4 dm, người ta cắt ra một phần tư hình tròn tâm *A* bán kính *AB* = 4 dm (như phần được tô màu ở *Hình 29*) và cuộn lại thành một cái phễu hình nón. Tính chiều cao của cái phễu đó (theo đơn vị decimét và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 29

42. Một hình nón có bán kính đáy là 8 cm, đường sinh là 17 cm. Một hình cầu có thể tích bằng thể tích hình nón đó. Tính bán kính hình cầu (theo đơn vị centimét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

43. Cần bao nhiêu lít nước để đổ đầy $\dfrac{3}{4}$ một bình nuôi cá cảnh? Biết bình nuôi cá cảnh đó có dạng một phần hình cầu và có thể tích bằng $\dfrac{5}{6}$ thể tích một hình cầu có đường kính là 30 cm.

44. Một cốc nước có dạng hình trụ chiều cao 20 cm, bán kính đáy là 4 cm, lượng nước ban đầu trong cốc cao 9 cm. Người ta thả chìm vào cốc nước đó 4 viên bi thuỷ tinh hình cầu có cùng bán kính là 3 cm. Hỏi sau khi thả vào cốc nước 4 viên bi thuỷ tinh trên, mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu centimét?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (1): bán kính đáy; (2): chiều cao; (3): mặt đáy;
(4): mặt xung quanh; (5): mặt đáy.

2. C.

3. Đổi: 20 cm = 0,2 m; 60 cm = 0,6 m. Ta có diện tích xung quanh của thùng là: $2 . 0,2 . \pi . 0,6 = 0,24\pi$ (m^2). Diện tích mặt đáy của thùng là: $\pi . 0,2^2 = 0,04\pi$ (m^2).
Vậy cần dùng tối thiểu $0,24\pi + 0,04\pi = 0,28\pi \approx 0,88$($m^2$) tôn để gò chiếc thùng đó.

4. Diện tích toàn phần của các hình trụ ở các hình *4a*, *4b*, *4c* lần lượt là: 351,68 cm^2; 36,11 cm^2; 142,87 cm^2.

5. Diện tích phần đường được nén phẳng là: $2 . 0,8 . \pi . 2,15 . 120 \approx 1\,296$ (m^2).

6. a) Diện tích vải màu tím cần dùng là: $\pi . 50 . 40 = 2\,000\pi$ (cm^2).
Diện tích vải màu mỡ gà cần dùng là: $\pi . 30 . 40 = 1\,200\pi$ (cm^2).
Tỉ số phần trăm diện tích vải màu mỡ gà và diện tích vải màu tím cần dùng là 60%.
b) Tổng số tiền mua vải màu tím và vải màu mỡ gà để làm được chiếc đèn đó là:
$$\frac{2\,000\pi}{10\,000} \cdot 95 + \frac{1\,200\pi}{10\,000} \cdot 115 = 32,8\pi \approx 103 \text{ (nghìn đồng).}$$

7. Gọi độ dài bán kính đáy của (*T*) là r ($r > 0$, đơn vị: cm) thì độ dài đường sinh của (*T*) là $3r$ (cm) và thể tích của (*T*) là $\pi r^2 . 3r = 3\pi r^3$ (cm^3). Theo đề bài thể tích của (*T*) là 81π cm^3 nên: $3\pi r^3 = 81\pi$. Suy ra $r = 3$ cm. Vậy độ dài đường sinh của (*T*) là 9 cm.

8. Hình trụ (bên ngoài) với đường kính đường tròn đáy 0,8 m, chiều cao 1,5 m có thể tích là: $\pi . (0,8 : 2)^2 . 1,5 = 0,24\pi$ (m^3). Do bề dày của ống cống là 0,1 m nên đường kính đường tròn đáy của hình trụ (bên trong) là $0,8 - 2 . 0,1 = 0,6$ (m). Hình trụ (bên trong) với đường kính đường tròn đáy 0,6 m, chiều cao 1,5 m có thể tích là: $\pi . (0,6 : 2)^2 . 1,5 = 0,135\pi$ (m^3). Lượng bê tông cần dùng để đúc ống cống đó là $0,24\pi - 0,135\pi = 0,105\pi$ (m^3). Số tiền bác An cần dùng để làm được một ống cống như yêu cầu là: $0,105\pi . 1\,000\,000 \approx 330\,000$ (đồng).

9. Thể tích tượng đồng là: $\pi \cdot 6^2 \cdot 5 \approx 565{,}2$ (dm^3).

10. Gọi bán kính đáy bình hình trụ to là r (cm). Bán kính đáy bình cây thuỷ sinh là $\frac{r}{2}$ (cm). Thể tích của bình hình trụ to và thể tích của bình cây thuỷ sinh lần lượt là $\pi r^2 h$ (cm^3) và $\frac{\pi r^2 h}{4}$ (cm^3). Thể tích phần không gian giữa hai hình trụ để nuôi cá cảnh là: $\pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{4} = \frac{3\pi r^2 h}{4}$ (cm^3). Vậy tỉ số thể tích giữa phần không gian nuôi cá cảnh và thể tích bình hình trụ to là $\frac{3}{4}$.

11. a) Thể tích phần ở giữa hai hình trụ (T) và (T') theo a, b và h là $\pi h(a^2 - b^2)$ (cm^3).

b) Ta có $a = 16$ (cm), $b = \frac{3}{4}a = 12$ (cm) và thể tích phần ở giữa hai hình trụ (T) và (T') là 224π (cm^3). Suy ra: $\pi h(16^2 - 12^2) = 224\pi$ hay $h = 2$ cm.

12. Học sinh tự làm.

13. $188{,}4$ cm^2.

14. $31{,}4a^2$ (đơn vị diện tích).

15. a) Gọi bán kính đường tròn đáy bằng r (cm). Theo đề bài ta có diện tích xung quanh của hình nón là 135π cm^2 nên $135\pi = \pi r \cdot 15$, suy ra $r = 9$ cm. Vậy diện tích toàn phần của hình nón đó là $135\pi + \pi \cdot 9^2 = 216\pi$ (cm^2).

b) Chiều cao của hình nón đó là: $\sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (cm).

16. Tam giác OHA vuông cân tại H và có diện tích bằng 4 cm^2 nên $HO = HA = 2\sqrt{2}$ cm.

Suy ra $OA = 4$ cm. Vậy diện tích xung quanh của hình nón đó là:

$$\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}\pi \approx 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

17. Ta có tam giác đều BCD có cạnh bằng a nội tiếp đường tròn đáy tâm O bán kính R nên $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Hình nón (N) có bán kính là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và đường sinh là $AB = a$ nên diện tích toàn phần của nó là: $\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a + \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2(1+\sqrt{3})}{3}$.

18. Phát biểu a) và c) sai.

19. Gọi bán kính đáy của hình nón đó là r. Kí hiệu diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình nón đó lần lượt là S_{tp}, S_{xq}.

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + \pi r^2$. Do đó $115\pi = 65\pi + \pi r^2$. Suy ra $r = 5\sqrt{2}$ cm. Mặt khác, diện tích xung quanh của hình nón là 65π cm^2 nên đường sinh l của nó thoả mãn: $\pi \,.\, 5\sqrt{2} \,.\, l = 65\pi$. Suy ra $l = \dfrac{13\sqrt{2}}{2}$ cm. Vậy chiều cao của hình nón đó là:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} \approx 6 \text{ (cm)}.$$

20. a) Học sinh tự làm.

b) Theo chứng minh ở câu a) ta có phát biểu đã nêu là đúng.

21. Lượng kem ở phía trong cốc của một chiếc kem là: $\dfrac{\pi \,.\, 3^2 \,.\, 10}{3} = 30\pi$ (cm^3).

Lượng kem đổ dư thêm lên phía trên miệng cốc của một chiếc kem là:

$$30\pi \,.\, 10\% = 3\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Lượng kem mà cơ sở sản xuất A cần chuẩn bị để làm ra 1 500 chiếc kem là:

$$(30\pi + 3\pi) \,.\, 1\,500 \approx 155\,430 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

22. Gọi bán kính đường tròn đáy của đống cát hình nón đó là r (m). Ta có: $r = \dfrac{9,42}{2\pi} \approx 1,5$ (m). Thể tích đống cát là: $\dfrac{\pi r^2 h}{3} \approx \dfrac{3,14 \,.\, 1,5^2 \,.\, 1,2}{3} = 2,826$ (m^3).

Thể tích thùng chứa của xe là $1,57 \,.\, 0,8 \,.\, 0,4 = 0,5024$ (m^3). Mỗi chuyến xe thực chở là $0,5024 \,.\, (100\% - 5\%) = 0,47728$ (m^3). Ta có: $2,826 : 0,47728 \approx 5,921$.

Vậy để chuyển hết đống cát trên bác Hà cần sử dụng ít nhất 6 chuyến xe và phải dùng ít nhất số tiền là: $6 \,.\, 90\,000 = 540\,000$ (đồng).

23. Học sinh tự làm.

24. Gọi r là bán kính của hình cầu. Ta có diện tích hình tròn lớn của nó bằng πr^2 và bằng 8π nên $\pi r^2 = 8\pi$ hay $r^2 = 8$. Vậy diện tích của mặt cầu đó là: $4\pi r^2 = 4\pi \,.\, 8 = 32\pi$ (cm^2).

25. Gọi bán kính quả bida là r. Thể tích quả bida là $\frac{4}{3}\pi r^3$ và bằng 36 000π mm^3 nên $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\,000\pi$. Suy ra $r = 30$ mm. Vậy đường kính quả bida đó là 60 mm = 6 cm.

26. Diện tích mặt cầu (C) là: $4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \pi l^2$.

Diện tích toàn phần của hình nón (N) là: $\pi rl + \pi r^2 = \pi\frac{2l}{3}l + \pi\left(\frac{2l}{3}\right)^2 = \frac{10\pi l^2}{9}$.

Do tổng diện tích mặt cầu (C) và diện tích toàn phần của hình nón (N) là 171π cm^2 nên: $\pi l^2 + \frac{10\pi l^2}{9} = 171\pi$ hay $19\pi l^2 = 171\pi \,.\, 9$. Suy ra $l = 9$ cm. Vậy diện tích của mặt cầu (C) là: $81\pi \approx 254$ (cm^2).

27. Ta có bán kính hình cầu và bán kính đáy hình trụ đều là: 1,8 : 2 = 0,9 (m).

Tổng thể tích của hai nửa hình cầu là: $\frac{4}{3}\pi \,.\, (0{,}9)^3 = 0{,}972\pi$ (m^3).

Thể tích phần hình trụ là: $\pi \,.\, (0{,}9)^2 \,.\, 3{,}62 = 2{,}9322\pi$ (m^3).

Thể tích của bồn chứa là: $0{,}972\pi + 2{,}9322\pi = 3{,}9042\pi \approx 12{,}3$ (m^3).

28. Gọi bán kính đường tròn đáy của cái cốc là R (cm). Thể tích viên bi có dạng hình cầu với bán kính là 3 cm là: $\frac{4}{3}\pi \,.\, 3^3 = 36\pi$ (cm^3). Dễ thấy khi viên bi chìm xuống đáy cốc thì lượng nước trong cốc được dâng thêm bằng thể tích viên bi. Mặt khác, khi viên bi chìm xuống đáy cốc thì chiều cao mực nước dâng thêm 1,5 cm, do đó ta có $\pi R^2 \,.\, 1{,}5 = 36\pi$. Suy ra $R^2 = 24$. Thể tích của khối nước ban đầu trong cốc là: $\pi R^2 \,.\, 7{,}2 = \pi \,.\, 24 \,.\, 7{,}2 \approx 542{,}6$ (cm^3) .

29. Ta có lượng nước bị trào ra khỏi bể bằng thể tích hình cầu và bằng $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Do đó, lượng nước còn lại trong bể là: $(2a)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{(24-4\pi)a^3}{3}$.

Ta có tỉ số phần trăm của lượng nước còn lại trong bể và lượng nước bị trào ra khỏi bể là: $\left[\frac{(24-4\pi)a^3}{3} : \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\right] \cdot 100\% = \frac{6-\pi}{\pi} \,.\, 100\% \approx 91{,}1\%$.

Vậy lượng nước còn lại trong bể bằng 91,1% lượng nước bị trào ra khỏi bể.

30. Tổng thể tích của hai quả cầu là: $\dfrac{4\pi\,(1^3+3^3)}{3}=\dfrac{112\pi}{3}$ (cm³).

Chiều cao của hình nón là: $\sqrt{(6\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2}=9$ (cm).

Thể tích hình nón là: $\dfrac{\pi\left(3\sqrt{3}\right)^2.\,9}{3}=81\pi$ (cm³).

Tỉ số tổng thể tích của hai quả cầu và thể tích hình nón là: $\dfrac{112\pi}{3}:(81\pi)=\dfrac{112}{243}$.

31. B. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** A. **36.** C.

37. Ta có: $V_1=\pi\left(\dfrac{3a}{2\pi}\right)^2.\,a=\dfrac{9a^3}{4\pi}$ (cm³) và $V_2=\pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2.\,3a=\dfrac{3a^3}{4\pi}$ (cm³).

Do đó, tỉ số của V_1 và V_2 là 3.

38. Do hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có thể tích bằng $27a^3$ nên cạnh hình lập phương là $3a$. Suy ra cạnh của hình vuông *ABCD* là $3a$ và bán kính của hình trụ bằng bán kính của đường tròn (*O*) ngoại tiếp hình vuông *ABCD* và bằng $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy diện tích toàn phần của hình trụ (*T*) là:

$$2\pi\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{2}\cdot 3a+2\pi\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2=9\pi\sqrt{2}\,a^2+9\pi a^2=9\pi a^2(\sqrt{2}+1).$$

39. Do hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 0,8 m và có thể tích là 1,12π m³ nên chiều cao của hình trụ là: $1{,}12\pi:(\pi\,.\,0{,}8^2)=1{,}75$ (m).

Số tiền làm đáy bể là: $\pi\,.\,0{,}8^2\,.\,100\,000=64\,000\pi$ (đồng).

Số tiền làm thân bể là: $2\pi\,.\,0{,}8\,.\,1{,}75\,.\,150\,000=420\,000\pi$ (đồng).

Số tiền làm nắp bể là: $\pi\,.\,0{,}8^2\,.\,120\,000=76\,800\pi$ (đồng).

Số tiền bác An đã chi để làm được cái bể đó là:

$$64\,000\pi+420\,000\pi+76\,800\pi\approx 1\,761\,000 \text{ (đồng)}.$$

40. Thể tích khối gỗ hình trụ (*T*) là: πR^2h. Thể tích khối hình nón (*N*) là:

$$\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{2}{3}R\right)^2h=\frac{4}{27}\pi R^2h.$$

Thể tích phần còn lại của khối gỗ (*T*) sau khi khoét bỏ khối hình nón (*N*) là:

$$\pi R^2h-\frac{4}{27}\pi R^2h=\frac{23}{27}\pi R^2h.$$

Tỉ số phần trăm của $\frac{23}{27}\pi R^2 h$ và $\pi R^2 h$ là $\frac{\frac{23}{27}\pi R^2 h}{\pi R^2 h} \cdot 100\% \approx 85{,}2\%$.

Vậy thể tích phần còn lại của khối gỗ (T) sau khi khoét bỏ khối hình nón (N) bằng khoảng 85,2% thể tích của khối gỗ (T) ban đầu.

41. Chu vi của một phần tư hình tròn tâm A bán kính $AB = 4$ dm là: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 = 2\pi$ (dm). Gọi R là bán kính đường tròn đáy của phễu. Ta có $2\pi R = 2\pi$ nên $R = 1$ dm. Lại có, đường sinh của phễu bằng 4 dm, suy ra chiều cao của phễu là: $\sqrt{4^2 - 1^2} \approx 3{,}87$ (dm).

42. Ta có chiều cao của hình nón là: $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (cm). Gọi R là bán kính hình cầu. Do thể tích hình cầu bằng thể tích hình nón nên ta có thể tích hình cầu là: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 15$ hay $\frac{4}{3}\pi R^3 = 320\pi$. Do đó $R = \sqrt[3]{240} \approx 6{,}2$ (cm).

43. Học sinh tự làm.

44. Ta có tổng thể tích của 4 viên bi thuỷ tinh hình cầu có cùng bán kính 3 cm là: $4 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 144\pi$ (cm^3). Khi thả vào cốc nước 4 viên bi thuỷ tinh đó thì lượng nước trong cốc cao thêm độ cao h là: $h = \frac{144\pi}{\pi \cdot 4^2} = 9$ (cm). Vậy sau khi thả vào cốc nước 4 viên bi thuỷ tinh đó, mực nước trong cốc cách miệng cốc một khoảng là: $20 - 9 - 9 = 2$ (cm).

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG VI. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 3
§1. Mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ 3
§2. Tần số. Tần số tương đối 15
§3. Tần số ghép nhóm. Tần số tương đối ghép nhóm 23
§4. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu. Xác suất của biến cố 31
Bài tập cuối chương VI 38
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 41

CHƯƠNG VII. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN 54
§1. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ 54
§2. Phương trình bậc hai một ẩn 59
§3. Định lí Viète 67
Bài tập cuối chương VII 72
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 75

CHƯƠNG VIII. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP 81
§1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác 81
§2. Tứ giác nội tiếp đường tròn 86
Bài tập cuối chương VIII 92
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 94

CHƯƠNG IX. ĐA GIÁC ĐỀU 103
§1. Đa giác đều. Hình đa giác đều trong thực tiễn 103
§2. Phép quay 108
Bài tập cuối chương IX 113
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 116

CHƯƠNG X. HÌNH HỌC TRỰC QUAN 122
§1. Hình trụ 122
§2. Hình nón 127
§3. Hình cầu 132
Bài tập cuối chương X 135
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 138

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.37547735

Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:

LÊ HUY ĐAN – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ – NGUYỄN THỊ QUÝ

Thiết kế sách:

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

Trình bày bìa:

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

Sửa bản in:

LÊ HUY ĐAN – VŨ THỊ MINH THẢO

BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP HAI

Mã số:

ISBN: ....

In .... cuốn, khổ 17 x 24cm, tại ....

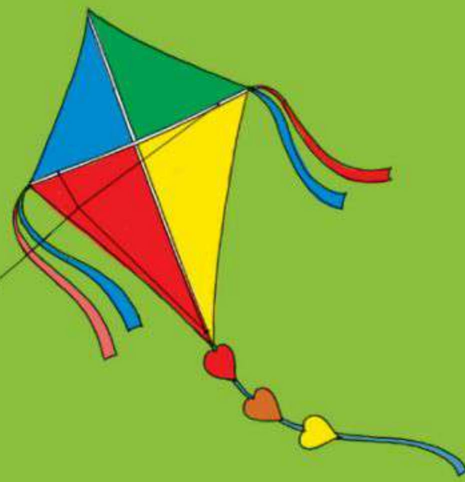
Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản:

Quyết định xuất bản số: ..../QĐ-NXBĐHSP ngày ....../....../2024

In xong và nộp lưu chiểu Quý ..... năm 2024.

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống



BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9
Cánh Diều

1. Ngữ văn 9 (Tập một, Tập hai)
2. Toán 9 (Tập một, Tập hai)
3. Giáo dục công dân 9
4. Lịch sử và Địa lí 9
5. Khoa học tự nhiên 9
6. Công nghệ 9 – Định hướng nghề nghiệp
7. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Trồng cây ăn quả
8. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Chế biến thực phẩm
9. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà
10. Tin học 9
11. Giáo dục thể chất 9
12. Âm nhạc 9
13. Mĩ thuật 9
14. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 9
15. Tiếng Anh 9 Explore English

TÌM ĐỌC

CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 9 (Cánh Diều)
THEO TỪNG MÔN HỌC

SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com

ISBN 978-604-486-414-3

9 786044 864143

Giá: 31.000đ

Bản in thử