Cánh Diều

ĐỖ ĐỨC THÁI

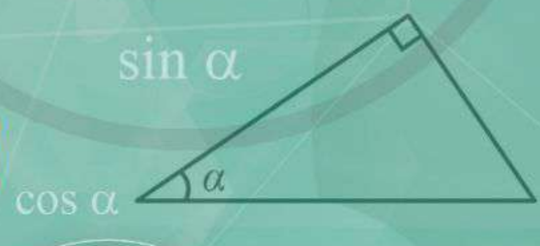
BÀI TẬP Toán 9

TẬP MỘT

$(ax + b)(cx + d) = 0 \ (a \neq 0, c \neq 0)$

$ax + b > 0 \ (a \neq 0)$

$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$



tan α

cot α

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VEPIC CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

ĐỖ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP
Toán 9

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

LỜI NÓI ĐẦU

Sách **Bài tập Toán 9** (gồm hai tập) được biên soạn tương thích với sách giáo khoa Toán 9 (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên – GS.TSKH Đỗ Đức Thái). Nội dung sách hướng đến tạo cơ hội hình thành và phát triển năng lực toán học, phát huy hứng thú học tập, tính chủ động và tiềm năng của mỗi học sinh; bảo đảm tính tích hợp, phân hoá trong dạy học bộ môn Toán.

Nội dung mỗi bài trong sách được thể hiện qua các phần: A. Kiến thức cần nhớ – B. Ví dụ – C. Bài tập.

Các bài tập cơ bản gồm những bài tập giúp học sinh củng cố, kết nối các kiến thức cốt lõi, trọng tâm được học trong mỗi chủ đề. Ngoài ra, có những bài tập nâng cao (được đánh dấu *) ở mức độ vận dụng phát triển và gắn với một số ứng dụng của toán học trong đời sống. Qua đó tạo cơ hội để học sinh nâng cao dần năng lực tư duy, vận dụng giải quyết vấn đề và hình thành niềm yêu thích môn Toán. Những bài tập đó cũng cung cấp tư liệu để các thầy cô giáo dạy học phân hoá, bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

Tác giả hi vọng sách có thể giúp học sinh học tốt môn Toán theo định hướng phát triển năng lực, đồng thời hỗ trợ tài liệu cho các thầy cô giáo, cha mẹ học sinh nhằm tham gia vào việc nâng cao khả năng tự học, tự thực hành giải quyết vấn đề trên lớp, ở nhà cho học sinh.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong khi biên soạn, song cuốn sách khó tránh khỏi sơ suất, rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Công ty Cổ phần Đầu tư Xuất bản – Thiết bị Giáo dục Việt Nam, tầng 5, toà nhà hỗn hợp AZ Lâm Viên, 107 đường Nguyễn Phong Sắc, phường Dịch Vọng Hậu, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

Tác giả

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

§1 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình tích có dạng $(ax+b)(cx+d)=0$ $(a\neq 0, c\neq 0)$

Để giải phương trình tích $(ax+b)(cx+d)=0$ với $a\neq 0$ và $c\neq 0$, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Giải hai phương trình bậc nhất: $ax+b=0$ và $cx+d=0$

Bước 2. Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình bậc nhất vừa giải được ở *Bước 1*.

Phương trình chứa ẩn ở mẫu

– Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là điều kiện xác định của phương trình.

– Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình rồi khử mẫu

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được

Bước 4. Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn vừa tìm được ở *Bước 3*, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Giải các phương trình:

a) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{7}{5}\right)\left(3x-\frac{5}{8}\right)=0$;

b) $(2x+3)(x+1)=(3x+1)(x+1)$;

c) $\frac{1}{4}x^2-(3x-2)^2=0$.

Giải

a) Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau:

*) $\frac{1}{2}x - \frac{7}{5} = 0$

$\frac{1}{2}x = \frac{7}{5}$

$x = \frac{14}{5}$;

*) $3x - \frac{5}{8} = 0$

$3x = \frac{5}{8}$

$x = \frac{5}{24}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{14}{5}$ và $x = \frac{5}{24}$.

b) Ta có: $(2x + 3)(x + 1) = (3x + 1)(x + 1)$

$$(2x + 3)(x + 1) - (3x + 1)(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)[(2x + 3) - (3x + 1)] = 0$$

$$(x + 1)(-x + 2) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau:

*) $x + 1 = 0$

$x = -1$;

*) $-x + 2 = 0$

$x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

c) Ta có: $\frac{1}{4}x^2 - (3x - 2)^2 = 0$

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - (3x - 2)^2 = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}x - (3x - 2)\right]\left[\frac{1}{2}x + (3x - 2)\right] = 0$$

$$\left(-\frac{5}{2}x + 2\right)\left(\frac{7}{2}x - 2\right) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau:

*) $-\frac{5}{2}x + 2 = 0$

$\frac{5}{2}x = 2$

$x = \frac{4}{5}$;

*) $\frac{7}{2}x - 2 = 0$

$\frac{7}{2}x = 2$

$x = \frac{4}{7}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{4}{5}$ và $x = \frac{4}{7}$.

Ví dụ 2 Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{7x}{12-x}=10$; b) $\frac{x}{2}-\frac{7}{5}=\frac{x}{2x-5}$; c) $\frac{13}{5x+1}-1=\frac{8x}{x-3}$.

Giải

a) Điều kiện xác định của phương trình $\frac{7x}{12-x}=10$ là $12-x\neq 0$ hay $x\neq 12$.

b) Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2}-\frac{7}{5}=\frac{x}{2x-5}$ là $2x-5\neq 0$ hay $x\neq \frac{5}{2}$.

c) Điều kiện xác định của phương trình $\frac{13}{5x+1}-1=\frac{8x}{x-3}$ là $5x+1\neq 0$ và $x-3\neq 0$ hay $x\neq -\frac{1}{5}$ và $x\neq 3$.

Ví dụ 3 Giải các phương trình:

a) $\frac{x^2}{1-2x}+\frac{1+2x}{4}=1$; b) $\frac{7}{x+4}-\frac{2}{x-7}=0$.

Giải

a) Điều kiện xác định: $x\neq \frac{1}{2}$.

$$\frac{x^2}{1-2x}+\frac{1+2x}{4}=1$$

$$\frac{4x^2}{4(1-2x)}+\frac{(1+2x)(1-2x)}{4(1-2x)}=\frac{4(1-2x)}{4(1-2x)}$$

$$4x^2+(1+2x)(1-2x)=4(1-2x)$$

$$4x^2+1-4x^2=4-8x$$

$$1=4-8x$$

$$8x=3$$

$$x=\frac{3}{8}.$$

Ta thấy $x=\frac{3}{8}$ thoả mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{3}{8}$.

b) Điều kiện xác định: $x\neq -4$ và $x\neq 7$.

$$\frac{7}{x+4}-\frac{2}{x-7}=0$$

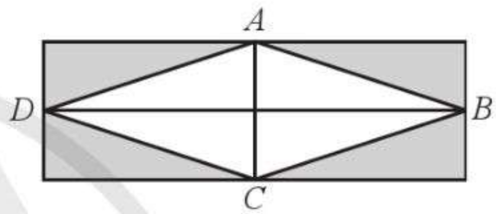
$$\frac{7(x-7)}{(x+4)(x-7)}-\frac{2(x+4)}{(x+4)(x-7)}=0$$

$$7(x-7)-2(x+4)=0$$
$$7x-49-2x-8=0$$
$$5x-57=0$$
$$5x=57$$
$$x=\frac{57}{5}.$$

Ta thấy $x=\frac{57}{5}$ thoả mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{57}{5}$.

Ví dụ 4* Một khu đất có dạng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng 16 m. Trên khu đất đó, người ta làm một mảnh vườn trồng hoa có dạng hình thoi *ABCD* với đường chéo *AC* bằng chiều rộng của khu đất và đường chéo *BD* bằng chiều dài của khu đất (*Hình 1*). Tính chiều dài của khu đất, biết diện tích của phần đất còn lại là 96 m^2.



Hình 1

Giải

Gọi x (m) là chiều dài của khu đất với $x > 16$. Khi đó, chiều rộng của khu đất là $x-16$ (m) và mảnh vườn trồng hoa có $AC = x-16$ (m) và $BD = x$ (m).

Do đó, diện tích của khu đất là: $(x-16)x$ (m^2) và diện tích của mảnh vườn trồng hoa là: $\frac{1}{2}(x-16)x$ (m^2). Vì diện tích của phần đất còn lại là 96 m^2 nên ta có phương trình:

$(x-16)x-\frac{1}{2}(x-16)x=96$ hay $\frac{1}{2}(x-16)x=96$. Tức là, $x^2-16x-192=0$.

Giải phương trình:
$$x^2-16x-192=0$$
$$(x^2-16x+64)-256=0$$
$$(x-8)^2-16^2=0$$
$$(x-24)(x+8)=0$$
$$x=24 \text{ hoặc } x=-8.$$

Do $x > 16$ nên $x = 24$. Vậy chiều dài của khu đất là 24 m.

Ví dụ 5 Một công nhân dự định làm 14 sản phẩm trong thời gian đã định. Nhưng trên thực tế công ty đã giao 21 sản phẩm nên để hoàn thành đúng thời gian đã định, người đó phải làm mỗi giờ thêm 3 sản phẩm. Tính năng suất dự định của công nhân đó.

Giải

Gọi x (sản phẩm/giờ) là năng suất dự định của người công nhân đó với $x \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, năng suất thực tế của người đó là $x + 3$ (sản phẩm/giờ).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{14}{x} = \frac{21}{x+3}$.

Giải phương trình:

$$\frac{14}{x} = \frac{21}{x+3}$$

$$\frac{14(x+3)}{x(x+3)} = \frac{21x}{x(x+3)}$$

$$14(x+3) = 21x$$

$$14x + 42 = 21x$$

$$7x = 42$$

$$x = 6 \text{ (thoả mãn } x \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

Vậy năng suất dự định của người công nhân đó là 6 sản phẩm/giờ.

C. BÀI TẬP

1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{13}{4-x^2} = 1$; b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x^2}{x-3}$; c) $\frac{3}{-5x+5} - 3x = \frac{12x}{x^2-1}$.

2. Giải các phương trình:

a) $(3x+5)\left(\frac{12}{5} - 2x\right) = 0$; b) $(7x-1)^2 = 4(1-2x)^2$;

c) $\frac{2x^2}{4x+3} - \frac{4x-3}{8} = 1$; d*) $\frac{x}{x^2+4x-5} - \frac{2}{x-1} = 0$.

3. Một ô tô đi quãng đường AB dài 61,5 km. Sau khi đi được 30 km với tốc độ không đổi, ô tô đi tiếp quãng đường còn lại với tốc độ tăng thêm 2 km/h. Tính tốc độ ban đầu của ô tô, biết thời gian ô tô đi trên 30 km đầu bằng thời gian ô tô đi trên 31,5 km còn lại.

4. Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B, rồi lại đi ngược dòng từ địa điểm B trở về địa điểm A. Thời gian ca nô đi xuôi dòng và thời gian ca nô đi ngược dòng chênh lệch nhau 40 phút. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng. Biết rằng độ dài quãng đường AB là 24 km, tốc độ của dòng nước là 3 km/h và tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường.

5. Cho một phân số có mẫu số lớn hơn tử số là 2. Nếu bớt tử số đi 3 đơn vị và bớt mẫu số đi 6 đơn vị thì ta được một phân số mới bằng phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

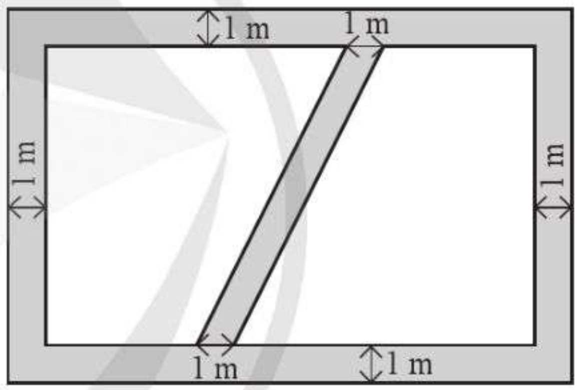
6. Biết khối lượng riêng của kim loại A lớn hơn khối lượng riêng của kim loại B là 6,24 kg/m^3. Thể tích của 45 kg kim loại B bằng thể tích của 149 kg kim loại A. Tính khối lượng riêng của kim loại B.

7. Bác Lan dự định dùng hết số tiền 480 nghìn đồng để mua gạo nếp gói bánh chưng nhân dịp tết Nguyên đán. Khi đến cửa hàng, loại gạo mà bác Lan dự định mua đã tăng 2 nghìn đồng/kg. Do vậy, bác Lan đã mua lượng gạo giảm $\frac{1}{16}$ lần so với dự định. Tính giá tiền mỗi kilôgam gạo mà bác Lan đã mua.

8*. Một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là 10 m. Chủ vườn đã làm con đường thảm cỏ (phần tô màu xám) với các kích thước như *Hình 2*.

a) Tính chiều dài của mảnh vườn, biết tỉ số giữa diện tích của con đường thảm cỏ và diện tích của mảnh vườn là $\frac{1}{3}$.

b) Biết rằng chi phí để hoàn thành mỗi mét vuông của con đường thảm cỏ là 100 000 đồng. Tính số tiền mà chủ vườn đã chi để làm con đường thảm cỏ đó.



Hình 2

§2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình bậc nhất hai ẩn

– Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng: $ax + by = c$, trong đó a, b, c là những số cho trước, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

– Cho phương trình bậc nhất hai ẩn x, y: $ax + by = c$. Nếu $ax_0 + by_0 = c$ là một khẳng định đúng thì cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

– Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi nghiệm của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0 ; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $(x_0 ; y_0)$.

– Ta cũng áp dụng được quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân đã biết ở phương trình bậc nhất một ẩn để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

– Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (I), ở đó mỗi phương trình $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nếu cặp số $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ (I) thì cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ (I).

– Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y? Đối với những phương trình bậc nhất hai ẩn đó, xác định hệ số a của x, hệ số b của y, hệ số tự do c.

a) $2x^2 + 7y = 5$.

b) $-3x + 0y = -7$.

c) $-\frac{1}{2}x + 4y = 0$.

d) $x - 0,3y^2 = 0,1$.

Giải

Phương trình ở các câu b, c là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Phương trình ở các câu a, d không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

Phương trình $-3x + 0y = -7$ có $a = -3$, $b = 0$, $c = -7$.

Phương trình $-\frac{1}{2}x + 4y = 0$ có $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = 0$.

Ví dụ 2

a) Trong các cặp số $(-2 ; 3)$, $(0 ; 1)$, $\left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$, $(-2 ; 2)$, cho biết cặp số nào là nghiệm của phương trình $2x + y = 1$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của phương trình $x + y = \frac{1}{3}$.

Giải

a) Ta có: $2 . (-2) + 3 = -1 \neq 1$; $\quad 2 . 0 + 1 = 1$;

$2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2 = 1$; $\quad 2 . (-2) + 2 = -2 \neq 1$.

Vậy $(0 ; 1)$, $\left(-\dfrac{1}{2} ; 2\right)$ là hai nghiệm của phương trình $2x + y = 1$.

b) Ba nghiệm của phương trình $x + y = \dfrac{1}{3}$ là: $\left(0 ; \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3} ; 0\right)$, $\left(1 ; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 3 Bác Ninh có hai khoản tiền thu được do bán bàn ăn và bàn làm việc cho công ty A. Bàn ăn giá 500 000 đồng/chiếc, bàn làm việc giá 700 000 đồng/chiếc. Bác Ninh thu được tổng số tiền 11 200 000 đồng từ hai khoản tiền trên. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho tổng số tiền bác Ninh thu được từ hai khoản tiền do bán bàn ăn và bàn làm việc cho công ty A và chỉ ra hai nghiệm của phương trình đó.

Giải

Gọi x (chiếc) là số bàn ăn mà bác Ninh đã bán cho công ty A với $x \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, khoản tiền bác Ninh thu được do bán bàn ăn cho công ty A là $500\,000x$ (đồng).

Gọi y (chiếc) là số bàn làm việc mà bác Ninh đã bán cho công ty A với $y \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, khoản tiền bác Ninh thu được do bán bàn làm việc cho công ty A là $700\,000y$ (đồng).

Ta có phương trình bậc nhất hai ẩn cho tổng số tiền bác Ninh thu được từ hai khoản tiền do bán bàn ăn và bàn làm việc cho công ty A là:

$$500\,000x + 700\,000y = 11\,200\,000 \text{ hay } 5x + 7y = 112.$$

Hai nghiệm của phương trình trên là: $(7 ; 11)$, $(14 ; 6)$.

Ví dụ 4 Trong các trường hợp sau, chỉ ra những hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $\begin{cases} 2x + 3y^2 = 1 \\ -3x = 18; \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} 0,2x - 3y = 0,7 \\ -x - 0,8y = 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x + y = -2; \end{cases}$ $\quad$ d) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 31x^2 + 5y^2 = -1. \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình ở các câu b, c là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Trường hợp ở các câu a, d không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 5 Trong các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn sau, hệ phương trình nào nhận cặp số (– 1 ; – 2) là nghiệm?

a) $\begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ -5x = 5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,5x - 0,2y = -0,1 \\ -x + 0,7y = -0,4. \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4x + 7y = -10 \\ 3x + 8y = -19. \end{cases}$

Giải

Thay $x = -1$, $y = -2$ vào mỗi phương trình trong từng hệ, ta có:

$12 . (-1) - 3 . (-2) = -6 \neq 6$; $-5 . (-1) = 5$;

$0,5 . (-1) - 0,2 . (-2) = -0,1$; $-(-1) + 0,7 . (-2) = -0,4$;

$-4 . (-1) + 7 . (-2) = -10$; $3 . (-1) + 8 . (-2) = -19$.

Vậy hệ phương trình ở các câu b, c nhận cặp số (– 1 ; – 2) là nghiệm.

Ví dụ 6 Hai trường A và B có tổng cộng 180 học sinh tham gia ngày hội STEM. Biết rằng 15% học sinh trường A tham gia và 10% học sinh trường B tham gia đạt giải. Tổng số học sinh hai trường A và B đạt giải là 22 học sinh. Gọi x và y lần lượt là số học sinh của trường A và trường B tham gia ngày hội đó.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số (80 ; 100) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

Giải

a) Số học sinh trường A đạt giải là: $15\% . x = \frac{3}{20}x$;

Số học sinh trường B đạt giải là: $10\% . y = \frac{1}{10}y$.

Tổng số học sinh hai trường A và B đạt giải là: $\frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y$.

Do hai trường A và B có tổng cộng 180 học sinh tham gia ngày hội STEM và tổng số học sinh hai trường A và B đạt giải là 22 học sinh nên ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y = 22. \end{cases}$$

b) Thay $x = 80$, $y = 100$ vào mỗi phương trình trong hệ phương trình ở câu a, ta có:

$80 + 100 = 180$; $\frac{3}{20} \cdot 80 + \frac{1}{10} \cdot 100 = 22$.

Vậy cặp số (80 ; 100) là nghiệm của hệ phương trình ở câu a.

C. BÀI TẬP

9. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y?

a) $2x + 7y = 15$. b) $0,7x^2 - 0,5y^2 = 11$. c) $x + 0y = 9$.

10. Cho phương trình bậc nhất hai ẩn x, y: $2x - 3y = 5$ (1)

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Cặp số $(1 ; -1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

b) Cặp số $(4 ; 1)$ là một nghiệm của phương trình (1).

c) Cặp số $(-2 ; -3)$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

11. a) Chứng tỏ rằng các cặp số $(-5 ; 2)$, $(0 ; 2)$, $(2 ; 2)$ đều là nghiệm của phương trình $0x - 2y = -4$.

b) Trong các cặp số $(7 ; 1)$, $(1 ; 7)$, $(1 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $\left(1 ; -\frac{5}{2}\right)$, cho biết cặp số nào là nghiệm của phương trình $3x - 0y = 3$.

12. Ba bạn An, Bình, Chi cùng đi nhà sách. Cả ba bạn đã mua hết 279 000 đồng. Ba bạn đã mua 3 quyển truyện với giá 45 000 đồng/quyển và mua thêm bút bi, bút chì màu. Giá của bút bi và bút chì màu lần lượt là 3 600 đồng/chiếc và 5 000 đồng/chiếc. Gọi x và y lần lượt là số chiếc bút bi và bút chì màu mà ba bạn đã mua. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà ba bạn đã dùng để mua bút bi, bút chì màu và chỉ ra một nghiệm của phương trình đó.

13. Cô Hà sử dụng dịch vụ điện thoại di động với giá cước gọi nội mạng và gọi ngoại mạng lần lượt là 1 190 đồng/phút và 1 390 đồng/phút. Trong tháng 10, cô Hà đã sử dụng 500 phút gọi (cả nội mạng và ngoại mạng) với tiền cước là 635 000 đồng. Gọi x và y lần lượt là số phút gọi nội mạng và ngoại mạng trong tháng 10 của cô Hà.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

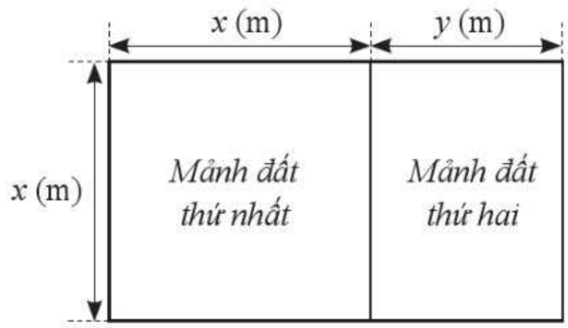
b) Cặp số $(300 ; 200)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

14. Người ta chia một khu đất có dạng hình chữ nhật thành hai mảnh đất: mảnh đất thứ nhất có dạng hình vuông với độ dài cạnh x (m); mảnh đất thứ hai có dạng hình chữ nhật với chiều dài x (m) và chiều rộng y (m) $(x > y > 0)$ được minh hoạ ở *Hình 3*. Chu vi của mảnh đất thứ nhất lớn hơn chu vi của mảnh đất thứ hai là

6,8 m. Trên một cạnh là chiều dài của khu đất, người ta đã xây một tường rào với chi phí 1 130 000 đồng theo giá 50 000 đồng/mét.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số (13 ; 9,6) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?



Hình 3

15. Người ta muốn pha dung dịch HNO_3 30% với dung dịch HNO_3 55% để được dung dịch HNO_3 50%. Gọi x và y lần lượt là số gam dung dịch HNO_3 30% và HNO_3 55% cần dùng để pha được 100 g dung dịch HNO_3 50%.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số (20 ; 80) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

16. Một ô tô đi từ địa điểm A đến địa điểm B với tốc độ x (km/h) thì đi hết y (giờ) với $x > 10$ và $y > 0,5$. Nếu tốc độ của ô tô giảm 10 km/h thì thời gian ô tô đi tăng 45 phút. Nếu tốc độ của ô tô tăng 10 km/h thì thời gian ô tô đi giảm 30 phút.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số (50 ; 3) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

§3 GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế theo các bước sau:

Bước 1. (*Thế*) Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình một ẩn

Bước 2. (*Giải phương trình một ẩn*) Giải phương trình (một ẩn) nhận được ở *Bước 1* để tìm giá trị của ẩn đó

Bước 3. (*Tìm ẩn còn lại và kết luận*) Thay giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở *Bước 2* vào biểu thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia ở *Bước 1* để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số theo các bước sau:

Bước 1. (*Làm cho hai hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau hoặc đối nhau*) Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

Bước 2. (*Đưa về phương trình một ẩn*) Cộng (hay trừ) từng vế hai phương trình của hệ phương trình nhận được ở *Bước 1* để nhận được một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0, tức là nhận được phương trình một ẩn. Giải phương trình một ẩn đó.

Bước 3. (*Tìm ẩn còn lại và kết luận*) Thay giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở *Bước 2* vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} 0,1x + 0,2y = 0,5 \\ -2x + 3y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{7}x - \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3} \\ x - 1,4y = 1,2. \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} 0,1x + 0,2y = 0,5 & (1) \\ -2x + 3y = 4 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1), ta có: $x + 2y = 5$ hay $x = 5 - 2y$ (3)

Thế $x = 5 - 2y$ vào phương trình (2), ta được: $-2(5 - 2y) + 3y = 4$ (4)

Giải phương trình (4):

$$\begin{aligned} -2(5 - 2y) + 3y &= 4 \\ -10 + 4y + 3y &= 4 \\ 7y &= 14 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Thay $y = 2$ vào phương trình (3), ta có: $x = 5 - 2 . 2 = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (1 ; 2)$.

b) Ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{7}x - \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3} & (5) \\ x - 1,4y = 1,2 & (6) \end{cases}$

Từ phương trình (6), ta có: $x = 1,2 + 1,4y$ (7)

Thế $x = 1,2 + 1,4y$ vào phương trình (5), ta được: $\dfrac{1}{7}(1,2 + 1,4y) - \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3}$ (8)

Giải phương trình (8):
$$\dfrac{1}{7}(1,2 + 1,4y) - \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3}$$
$$\dfrac{6}{35} + \dfrac{1}{5}y - \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3}$$
$$0y = \dfrac{17}{105}.$$

Do đó, phương trình (8) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} 5x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 8,6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 6y = 2 \\ -3x + 9y = -3. \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} 5x - 3y = -5 & (1) \\ 3x + 4y = 8,6 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình (1) với 3 và nhân hai vế của phương trình (2) với 5, ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases} 15x - 9y = -15 & (3) \\ 15x + 20y = 43 & (4) \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình (4) và (3), ta nhận được phương trình:
$$29y = 58 \quad (5)$$

Giải phương trình (5):
$$29y = 58$$
$$y = 2.$$

Thay $y = 2$ vào phương trình (1), ta có: $5x - 3 \cdot 2 = -5$ (6)

Giải phương trình (6):
$$5x - 3 \cdot 2 = -5$$
$$5x - 6 = -5$$
$$5x = 1$$
$$x = 0,2.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (0,2 ; 2)$.

b) Ta có: $\begin{cases} 2x - 6y = 2 & (7) \\ -3x + 9y = -3 & (8) \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình (7) với 3 và nhân hai vế của phương trình (8) với 2, ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases} 6x - 18y = 6 & (9) \\ -6x + 18y = -6 & (10) \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình (9) và (10), ta nhận được phương trình:

$$0x + 0y = 0 \qquad (11)$$

Do phương trình (11) có vô số nghiệm nên hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

Từ phương trình (7), ta có: $x - 3y = 1$ hay $x = 3y + 1$. Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm $(x\,;y) = (3a + 1\,;a)$ với $a \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3 Để mở rộng kinh doanh, một cửa hàng đã vay 600 triệu đồng kì hạn 12 tháng từ hai ngân hàng A và B với lãi suất lần lượt là 8%/năm và 9%/năm. Tổng số tiền lãi một năm phải trả cho cả hai ngân hàng đó của cửa hàng là 51,5 triệu đồng. Tính số tiền mà cửa hàng đã vay từ mỗi ngân hàng.

Giải

Gọi x (triệu đồng), y (triệu đồng) lần lượt là số tiền mà cửa hàng đã vay từ ngân hàng A, B ($x > 0, y > 0$).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $x + y = 600$.

Mặt khác, ta có phương trình: $8\% \,.\, x + 9\% \,.\, y = 51{,}5$ hay $8x + 9y = 5\,150$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 600 & (1) \\ 8x + 9y = 5\,150 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1), ta có: $y = 600 - x$.

Thế $y = 600 - x$ vào phương trình (2), ta được: $8x + 9(600 - x) = 5\,150 \quad (3)$

Giải phương trình (3):

$$\begin{aligned} 8x + 9(600 - x) &= 5\,150 \\ 8x + 5\,400 - 9x &= 5\,150 \\ -x + 5\,400 &= 5\,150 \\ x &= 250 \text{ (thoả mãn } x > 0). \end{aligned}$$

Thay $x = 250$ vào phương trình $y = 600 - x$, ta có:

$$y = 600 - 250 = 350 \text{ (thoả mãn } y > 0).$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x\,;y) = (250\,;350)$.

Vậy số tiền mà cửa hàng đã vay từ ngân hàng A, B lần lượt là 250 triệu đồng, 350 triệu đồng.

Ví dụ 4 Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số bằng 11. Nếu đổi vị trí hai chữ số của số đó cho nhau thì ta được một số mới lớn hơn số ban đầu là 63 đơn vị.

Giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ và $1 \le a \le 9$, $1 \le b \le 9$).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $a + b = 11$.

Mặt khác, ta có phương trình: $\overline{ba} - \overline{ab} = 63$ hay $(10b + a) - (10a + b) = 63$, tức là $-9a + 9b = 63$ hay $-a + b = 7$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 11 & (1) \\ -a + b = 7 & (2) \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình:

$$2b = 18 \qquad (3)$$

Giải phương trình (3): $2b = 18$

$b = 9$ (thoả mãn $b \in \mathbb{N}$ và $1 \le b \le 9$).

Thay $b = 9$ vào phương trình (1), ta có: $a + 9 = 11$ (4)

Giải phương trình (4): $a + 9 = 11$

$a = 2$ (thoả mãn $a \in \mathbb{N}$ và $1 \le a \le 9$)

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(a\,;\,b) = (2\,;\,9)$.

Vậy số cần tìm là 29.

Ví dụ 5 Tìm các hệ số x, y để cân bằng phương trình phản ứng hoá học:

$$Fe + xFeCl_3 \rightarrow yFeCl_2.$$

Giải

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và Cl, ta có: $\begin{cases} 1 + x = y \\ 3x = 2y. \end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + x = y & (1) \\ 3x = 2y & (2) \end{cases}$

Thế $y = 1 + x$ vào phương trình (2), ta được: $3x = 2(x + 1)$ (3)

Giải phương trình (3): $3x = 2(x + 1)$

$$3x = 2x + 2$$

$$x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào phương trình (1), ta có: $1 + 2 = y$ hay $y = 3$.

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (2 ; 3)$.

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $Fe + 2FeCl_3 \rightarrow 3FeCl_2$.

C. BÀI TẬP

17. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} 10x - 3y = -0,5 \\ x + 2y = 0,41; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{3} - 2y = -\dfrac{5}{3}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 0,7y = 1 \\ -10x + 1,4y = -2. \end{cases}$

18. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ -3x + 7y = 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,3x - 2y = -0,7 \\ 2x - 0,2y = 1,9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -5x + 7y = 3 \\ 7x - 9,8y = -4. \end{cases}$

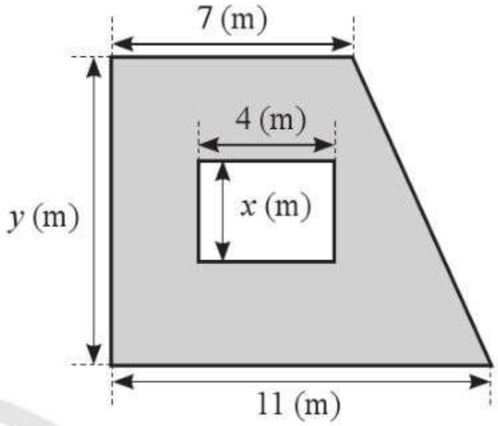
19. Tìm hai số, biết rằng bốn lần số thứ nhất cộng với ba lần số thứ hai bằng 6 120 và ba lần số thứ nhất hơn hai lần số thứ hai là 1 615.

20. Một nhà máy sản xuất hai loại xi măng: loại I và loại II. Cứ sản xuất mỗi tấn xi măng loại I thì nhà máy thải ra 0,5 kg CO_2 (carbon dioxide) và 0,3 kg SO_3 (sulfur trioxide), sản xuất mỗi tấn xi măng loại II thì nhà máy thải ra 0,8 kg CO_2 và 0,45 kg SO_3. Trung bình mỗi ngày, nhà máy nhận được thông số lượng khí thải CO_2 và SO_3 lần lượt là 1 700 kg và 975 kg. Tính khối lượng xi măng loại I và loại II trung bình mỗi ngày nhà máy sản xuất được.

21. Bác Lan có 500 triệu đồng để đầu tư vào hai khoản: trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 12 tháng. Lãi suất của trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng lần lượt là 7%/năm và 6%/năm. Tính số tiền mà bác Lan đầu tư vào mỗi khoản để mỗi năm nhận được tiền lãi là 32 triệu đồng từ hai khoản đầu tư đó.

22. Một ô tô dự định đi từ địa điểm A đến địa điểm B trong một khoảng thời gian nhất định. Nếu ô tô đi với tốc độ 40 km/h thì ô tô đến địa điểm B chậm hơn 90 phút so với dự định. Nếu ô tô đi với tốc độ 60 km/h thì ô tô đến địa điểm B nhanh hơn 30 phút so với dự định. Tính quãng đường AB và thời gian ô tô dự định đi.

23. Một cửa sổ có dạng hình chữ nhật được xây trên bức tường có dạng hình thang vuông với các kích thước như *Hình 4*. Tìm x, y, biết rằng diện tích của bức tường không tính phần làm cửa sổ là 69 m^2 và $2x = y - 3$.



Hình 4

24. Tìm các hệ số x, y để cân bằng phương trình phản ứng hoá học:

$$x\mathrm{FeO} + \mathrm{O_2} \rightarrow y\mathrm{Fe_2O_3}.$$

25*. Hai đội công nhân cùng đào đất để đắp đê ngăn triều cường. Nếu hai đội cùng làm thì 2 ngày hoàn thành công việc. Nếu đội thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ, đội thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Tính thời gian mỗi đội làm riêng để hoàn thành công việc.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

26. Tổng các nghiệm của phương trình $(x - 3)(2x + 6) = 0$ là

A. -6. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 6.

27. Trong các cặp số $(-1 ; 0)$, $(2 ; -2)$, $(6 ; -1)$, $(4 ; -3)$, $\left(0 ; \dfrac{-3}{5}\right)$, có bao nhiêu cặp số là nghiệm của phương trình $3x + 5y = -3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

28. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{16}{x^2-1}$;

b) $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{x-1}{x(x-2)} + \dfrac{x-4}{x(x+2)} = 0$.

29. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 7x + 2y = 9; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - \dfrac{y}{2} = -1 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{-2}{3}. \end{cases}$

30. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} 0,7x + 0,5y = 1,2 \\ -x + 2y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ -15x - 6y = -4. \end{cases}$

31. Hai khu công nghiệp A và B có tổng cộng 2 200 công nhân. Sau khi chuyển 100 công nhân ở khu A sang khu B thì $\dfrac{2}{3}$ số công nhân ở khu A bằng $\dfrac{4}{5}$ số công nhân ở khu B. Tính số công nhân ở mỗi khu công nghiệp lúc ban đầu.

32. Một công ty du lịch tiến hành giảm giá cho gói du lịch loại A trong các dịp lễ:

– Tuần lễ kích cầu du lịch: Hà Nội đi Đà Lạt giảm 15% giá niêm yết, Hà Nội đi Huế giảm 10% giá niêm yết;

– Ngày lễ Quốc tế Lao động: Hà Nội đi Đà Lạt giảm 20% giá niêm yết, Hà Nội đi Huế giảm 15% giá niêm yết.

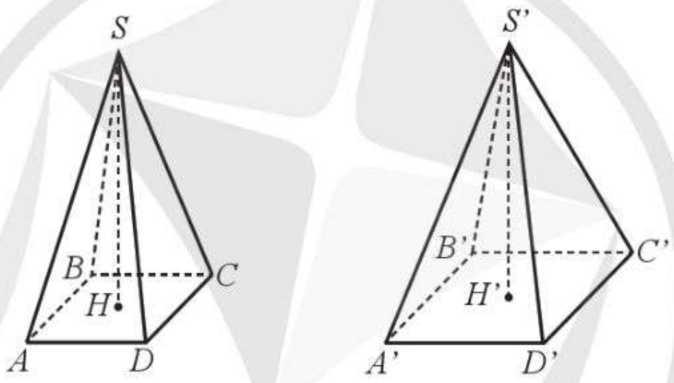
Trong tuần lễ kích cầu du lịch, nếu 3 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và 2 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Huế thì khách hàng phải trả 15 000 000 đồng. Trong ngày lễ Quốc tế Lao động, nếu 2 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và 3 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Huế thì khách hàng phải trả 14 810 000 đồng. Tính giá niêm yết của gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và chuyến Hà Nội đi Huế.

33. Một tam giác có chiều cao bằng $\dfrac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu tăng chiều cao thêm 3 dm và giảm cạnh đáy đi 3 dm thì diện tích của tam giác tăng thêm 6 dm^2. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác đó.

34. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì bể đó đầy nước sau 4 giờ 48 phút. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ và vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể nước. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng một mình đầy bể.

35*. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc. Xe máy thứ nhất đi từ địa điểm A đến địa điểm B và xe máy thứ hai đi từ địa điểm B đến địa điểm A (trên cùng quãng đường). Tốc độ của xe máy thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ tốc độ của xe máy thứ nhất và sau 2 giờ hai xe gặp nhau. Hỏi mỗi xe đi cả quãng đường AB trong bao lâu?

36*. Ở *Hình 5*, cho hai hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và $S'.A'B'C'D'$ có cùng chiều cao $SH = S'H' = 30$ cm. Thể tích của hình chóp $S.ABCD$ nhỏ hơn thể tích của hình chóp $S'.A'B'C'D'$ là 240 cm^3. Tính độ dài cạnh đáy của mỗi hình chóp, biết rằng $A'B' - AB = 2$ cm.



Hình 5

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Ta có: $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. Do đó, điều kiện xác định của phương trình $\frac{13}{4 - x^2} = 1$ là $4 - x^2 \neq 0$ hay $x \neq 2$ và $x \neq -2$.

b) $x \neq 3$. c) $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

2. a) $x = -\frac{5}{3}$; $x = \frac{6}{5}$. b) $x = \frac{3}{11}$; $x = -\frac{1}{3}$. c) $x = -\frac{15}{32}$.

d*) Ta có: $x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 4x + 4) - 9 = (x + 2)^2 - 3^2 = (x - 1)(x + 5)$.

Điều kiện xác định: $x \neq 1$ và $x \neq -5$.

$$\frac{x}{x^2 + 4x - 5} - \frac{2}{x - 1} = 0$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+5)} - \frac{2(x+5)}{(x-1)(x+5)} = 0$$

$$x - 2(x + 5) = 0$$

$$x - 2x - 10 = 0$$

$$x = -10 \text{ (thoả mãn } x \neq 1 \text{ và } x \neq -5\text{)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -10$.

3. Gọi x (km/h) là tốc độ ban đầu của ô tô với $x > 0$. Ta lập được phương trình: $\frac{30}{x} = \frac{31,5}{x + 2}$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 40$ (thoả mãn $x > 0$). Vậy tốc độ ban đầu của ô tô là 40 km/h.

4. Gọi x (km/h) là tốc độ của ca nô khi nước yên lặng với $x > 3$. Ta lập được phương trình: $\frac{24}{x - 3} - \frac{24}{x + 3} = \frac{2}{3}$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 15$ (thoả mãn $x > 3$) hoặc $x = -15$ (không thoả mãn $x > 3$). Vậy tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 15 km/h.

5. Gọi x là tử số của phân số cần tìm với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq -2$; $x \neq 0$; $x \neq 4$. Ta lập được phương trình: $\frac{x - 3}{x + 2 - 6} = \frac{x + 2}{x}$ hay $\frac{x - 3}{x - 4} = \frac{x + 2}{x}$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 8$ (thoả mãn $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq -2$; $x \neq 0$; $x \neq 4$). Vậy phân số cần tìm là $\frac{8}{10}$.

6. Gọi x (kg/m^3) là khối lượng riêng của kim loại B với $x > 0$. Ta lập được phương trình: $\dfrac{45}{x} = \dfrac{149}{x + 6,24}$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 2,7$ (thoả mãn $x > 0$). Vậy khối lượng riêng của kim loại B là 2,7 kg/m^3.

7. Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mỗi kilôgam gạo mà bác Lan đã mua với $x > 2$. Ta lập được phương trình: $\dfrac{480}{x} = \dfrac{15}{16} \cdot \dfrac{480}{x-2}$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 32$ (thoả mãn $x > 2$). Vậy giá tiền mỗi kilôgam gạo mà bác Lan đã mua là 32 nghìn đồng.

8*. a) Gọi x (m) là chiều dài của mảnh vườn với $x > 10$. Khi đó, diện tích của mảnh vườn là $10x$ (m^2). Diện tích của con đường thảm cỏ là:

$$2 \,.\, 10 \,.\, 1 + 2 \,.\, (x - 2) \,.\, 1 + 1 \,.\, (10 - 2) = 2x + 24 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\dfrac{2x + 24}{10x} = \dfrac{1}{3}$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 18$ (thoả mãn $x > 10$). Vậy chiều dài của mảnh vườn là 18 m.

b) 6 000 000 đồng.

9. Phương trình ở các câu a, c là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

10. Phát biểu ở câu b là đúng. Phát biểu ở các câu a, c là sai.

11. Học sinh tự làm.

12. Phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà ba bạn đã dùng để mua bút bi, bút chì màu là: $3\,600x + 5\,000y = 144\,000$ hay $18x + 25y = 720$.

Một nghiệm của phương trình trên là: $(15 ; 18)$.

13. a) Ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 1\,190x + 1\,390y = 635\,000 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = 500 \\ 119x + 139y = 63\,500. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

14. a) Do chu vi của mảnh đất thứ nhất lớn hơn chu vi của mảnh đất thứ hai là 6,8 m nên ta có phương trình: $4x - 2(x + y) = 6,8$ hay $x - y = 3,4$. Vậy hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x - y = 3,4 \\ x + y = 22,6. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

15. a) Do pha dung dịch HNO_3 30% với dung dịch HNO_3 55% để được 100 g dung dịch HNO_3 50% nên ta có phương trình:

$$\frac{30\% \,.\, x + 55\% \,.\, y}{100} = 50\% \text{ hay } 6x + 11y = 1\,000.$$

Vậy hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + \quad y = 100 \\ 6x + 11y = 1\,000. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

16. a) Do tốc độ của ô tô giảm 10 km/h thì thời gian ô tô đi tăng 45 phút nên ta có phương trình: $(x - 10)\left(y + \frac{3}{4}\right) = xy$ hay $3x - 40y = 30$. Mặt khác, tốc độ của ô tô tăng 10 km/h thì thời gian ô tô đi giảm 30 phút nên ta có phương trình: $(x + 10)\left(y - \frac{1}{2}\right) = xy$ hay $-x + 20y = 10$. Vậy hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} 3x - 40y = 30 \\ -x + 20y = 10. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

17. a) $(x ; y) = (0,01 ; 0,2)$. b) $(x ; y) = (1 ; 1)$. c) Vô số nghiệm.

18. a) $(x ; y) = (2 ; 3)$. b) $(x ; y) = (1 ; 0,5)$. c) Vô nghiệm.

19. Gọi x là số thứ nhất, y là số thứ hai. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6\,120 \\ 3x - 2y = 1\,615. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 1\,005$ và $y = 700$. Vậy hai số cần tìm là 1 005 và 700.

20. Gọi x (tấn), y (tấn) lần lượt là khối lượng xi măng loại I, loại II trung bình mỗi ngày nhà máy sản xuất được với $x > 0$, $y > 0$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,8y = 1\,700 \\ 0,3x + 0,45y = 975. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 1\,000$ (thoả mãn $x > 0$) và $y = 1\,500$ (thoả mãn $y > 0$). Vậy khối lượng xi măng loại I và loại II trung bình mỗi ngày nhà máy sản xuất được lần lượt là 1 000 tấn và 1 500 tấn.

21. Gọi x (triệu đồng), y (triệu đồng) lần lượt là số tiền mà bác Lan đầu tư vào trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng với $x > 0$, $y > 0$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,07x + 0,06y = 32. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 200$ (thoả mãn $x > 0$) và $y = 300$ (thoả mãn $y > 0$). Vậy số tiền mà bác Lan đầu tư vào trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng lần lượt là 200 triệu đồng và 300 triệu đồng.

22. Gọi x (km) là quãng đường AB và y (giờ) là thời gian ô tô dự định đi với $x > 0$, $y > \frac{1}{2}$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{40} - y = \dfrac{3}{2} \\ y - \dfrac{x}{60} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x - 40y = 60 \\ -x + 60y = 30. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 240$ (thoả mãn $x > 0$) và $y = 4,5$ (thoả mãn $y > \frac{1}{2}$). Vậy quãng đường AB dài 240 km và thời gian ô tô dự định đi là 4,5 giờ.

23. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{(7+11)y}{2} - 4x = 69 \\ 2x = y - 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -4x + 9y = 69 \\ 2x - y = -3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 3$ và $y = 9$.

24. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 2 = 3y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 4$ và $y = 2$. Vậy ta có phương trình sau cân bằng:

$$4FeO + O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3.$$

25*. Gọi x, y lần lượt là số ngày làm riêng để hoàn thành công việc của đội thứ nhất, đội thứ hai với $x > 0$, $y > 0$. Khi đó, trong mỗi ngày thì đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc và đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} = 1 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

Coi $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ là hai ẩn và giải hệ phương trình, ta tìm được $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ và $\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$. Suy ra $x = 6$ (thoả mãn $x > 0$) và $y = 3$ (thoả mãn $y > 0$). Vậy thời gian làm riêng để hoàn thành công việc của đội thứ nhất và đội thứ hai lần lượt là 6 ngày và 3 ngày.

26. **B**.

27. **C**.

28. a) $x = 4$.

b) Vô nghiệm.

29. a) $(x ; y) = (1 ; 1)$.

b) $(x ; y) = (0 ; 2)$.

30. a) $(x ; y) = (1 ; 1)$.

b) Vô nghiệm.

31. Gọi x, y lần lượt là số công nhân ở khu công nghiệp A, khu công nghiệp B lúc ban đầu với $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$ và $x > 100$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2\ 200 \\ \dfrac{2}{3}(x - 100) = \dfrac{4}{5}(y + 100) \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x + y = 2\ 200 \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{5}y = \dfrac{440}{3}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 1\ 300$ (thoả mãn $x \in \mathbb{N}^*$ và $x > 100$) và $y = 900$ (thoả mãn $y \in \mathbb{N}^*$). Vậy số công nhân ở khu công nghiệp A và khu công nghiệp B lúc ban đầu lần lượt là 1 300 công nhân và 900 công nhân.

32. Gọi x (triệu đồng), y (triệu đồng) lần lượt là giá niêm yết của gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt, chuyến Hà Nội đi Huế với $x > 0$, $y > 0$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3 \,.\, 0{,}85x + 2 \,.\, 0{,}9y = 15 \\ 2 \,.\, 0{,}8x + 3 \,.\, 0{,}85y = 14{,}81 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} 2{,}55x + 1{,}8y = 15 \\ 1{,}6x + 2{,}55y = 14{,}81. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 3{,}2$ (thoả mãn $x > 0$) và $y = 3{,}8$ (thoả mãn $y > 0$). Vậy giá niêm yết của gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và chuyến Hà Nội đi Huế lần lượt là 3,2 triệu đồng và 3,8 triệu đồng.

33. Gọi x (dm), y (dm) lần lượt là chiều cao, cạnh đáy của tam giác với $x > 0$, $y > 3$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}y \\ (x+3)(y-3) = xy + 12 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \dfrac{3}{4}y \\ -x + y = 7. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 21$ (thoả mãn $x > 0$) và $y = 28$ (thoả mãn $y > 3$). Vậy tam giác đó có chiều cao là 21 dm, cạnh đáy là 28 dm.

34. Thời gian chảy riêng một mình để đầy bể của vòi thứ nhất và vòi thứ hai lần lượt là 8 giờ và 12 giờ.

35*. Gọi x (km/h), y (km/h) lần lượt là tốc độ của xe máy thứ nhất, xe máy thứ hai với $x > 0$, $y > 0$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{5}x \\ 2x + 2y = AB. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = \dfrac{5AB}{18}$ và $y = \dfrac{2AB}{9}$.

Xe máy thứ nhất đi cả quãng đường AB trong:

$$AB : \frac{5AB}{18} = 3{,}6 \text{ (giờ)}.$$

Xe máy thứ hai đi cả quãng đường AB trong:

$$AB : \frac{2AB}{9} = 4{,}5 \text{ (giờ)}.$$

36*. Đặt $AB = x$ (cm), $A'B' = y$ (cm). Theo giả thiết, ta có: $\frac{1}{3}y^2 . 30 - \frac{1}{3}x^2 . 30 = 240$ hay $y^2 - x^2 = 24$, tức là $(y - x)(y + x) = 24$. Mặt khác, ta lại có: $y - x = 2$ nên $2(y + x) = 24$ hay $y + x = 12$. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y + x = 12 \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được $x = 5$ (cm) và $y = 7$ (cm). Vậy cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$ và $S'.A'B'C'D'$ lần lượt là 5 cm và 7 cm.

Chương II

BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1 BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhắc lại về thứ tự trong tập hợp số thực

Ta có các kết quả sau:

– Trên trục số nằm ngang, nếu số thực a nằm bên trái số thực b thì $a < b$ hay $b > a$.

– Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.

– Với hai số thực a, b, ta có:

$ab > 0$ khi a, b cùng dương hoặc cùng âm (hay a, b cùng dấu) và ngược lại;

$ab < 0$ khi a, b trái dấu và ngược lại.

– Với mỗi số thực a, ta có $a^2 \geq 0$. Ngoài ra, $a^2 = 0$ khi $a = 0$ và ngược lại.

– Với a, b là hai số thực dương, nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ và ngược lại.

Bất đẳng thức

– *Khái niệm:* Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

– *Tính chất:*

+ Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$ với mọi số thực c.

+ Nếu $a > b$ thì $ac > bc$ với $c > 0$.

+ Nếu $a > b$ thì $ac < bc$ với $c < 0$.

+ Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Chứng minh:

a) $3(b-1) > 3(a-1)$ với $a < b$;

b) $3 - 2m < 4 - 3n$ với $2m > 3n$;

c) $p - q - \frac{1}{3} > 2q - p - \frac{1}{2}$ với $3q \le 2p$.

Giải

a) Xét hiệu: $3(b-1) - 3(a-1) = 3b - 3 - 3a + 3 = 3b - 3a = 3(b-a)$.

Do $a < b$ nên $b - a > 0$ hay $3(b-a) > 0$.

Vậy $3(b-1) - 3(a-1) > 0$ hay $3(b-1) > 3(a-1)$.

b) Xét hiệu: $(3-2m) - (4-3n) = 3 - 2m - 4 + 3n = 3n - 2m - 1$.

Do $2m > 3n$ nên $3n - 2m < 0$ hay $3n - 2m - 1 < 0$.

Vậy $(3-2m) - (4-3n) < 0$ hay $3 - 2m < 4 - 3n$.

c) Xét hiệu: $\left(p - q - \frac{1}{3}\right) - \left(2q - p - \frac{1}{2}\right) = p - q - \frac{1}{3} - 2q + p + \frac{1}{2} = 2p - 3q + \frac{1}{6}$.

Do $3q \le 2p$ nên $2p - 3q \ge 0$ hay $2p - 3q + \frac{1}{6} > 0$.

Vậy $\left(p - q - \frac{1}{3}\right) - \left(2q - p - \frac{1}{2}\right) > 0$ hay $p - q - \frac{1}{3} > 2q - p - \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2 Cho a, b là hai số dương. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$;

b) $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$;

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$;

d) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ với $a < b$.

Giải

a) Xét hiệu: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$.

Với hai số a, b dương, ta có: $(a-b)^2 \ge 0$, $ab > 0$. Suy ra $\frac{(a-b)^2}{ab} \ge 0$.

Vậy $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \ge 0$ hay $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$.

b) Xét hiệu: $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2$.

Với hai số a, b dương, ta có: $(a-b)^2 \geq 0$ và $a+b>0$. Suy ra $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$.

Vậy $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

c) Xét hiệu: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{4}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}.$$

Với hai số a, b dương, ta có: $(a-b)^2 \geq 0$, $ab>0$, $a+b>0$. Suy ra $\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$.

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

d) Xét hiệu: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$. Do $a<b$ nên $b-a>0$. Mặt khác, ta có $ab>0$ với hai số a, b dương tuỳ ý nên $\frac{b-a}{ab}>0$ với $0<a<b$.

Vậy $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Ví dụ 3 Chứng minh:

a) $\frac{1}{12}-\sqrt{16}>\frac{1}{13}-\sqrt{17}$;

b) $\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\cdots+\frac{1}{2\,022\,.\,2\,023}+\frac{1}{2\,023\,.\,2\,024}>\frac{1}{3}$;

c) $\frac{2\,021}{2\,023}+\frac{2\,022}{2\,024}>\frac{2\,022+2\,021}{2\,024+2\,023}$.

Giải

a) Do $17>16$ nên $\sqrt{17}>\sqrt{16}$ hay $-\sqrt{16}>-\sqrt{17}$.

Mặt khác, ta có $\frac{1}{12}>\frac{1}{13}$ nên $\frac{1}{12}-\sqrt{16}>\frac{1}{13}-\sqrt{17}$.

b) Ta có: $\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\cdots+\frac{1}{2\,022\,.\,2\,023}+\frac{1}{2\,023\,.\,2\,024}$

$$=\frac{3-2}{2\,.\,3}+\frac{4-3}{3\,.\,4}+\cdots+\frac{2\,023-2\,022}{2\,022\,.\,2\,023}+\frac{2\,024-2\,023}{2\,023\,.\,2\,024}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,022}-\frac{1}{2\,023}\right)+\left(\frac{1}{2\,023}-\frac{1}{2\,024}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,024}=\frac{1\,011}{2\,024}.$$

Mặt khác, ta lại có $\frac{1}{3} = \frac{1\,011}{3\,033}$ và $\frac{1\,011}{2\,024} > \frac{1\,011}{3\,033}$ nên $\frac{1\,011}{2\,024} > \frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \cdots + \frac{1}{2\,022\,.\,2\,023} + \frac{1}{2\,023\,.\,2\,024} > \frac{1}{3}$.

c) Ta có: $\frac{2\,022 + 2\,021}{2\,024 + 2\,023} = \frac{2\,021}{2\,024 + 2\,023} + \frac{2\,022}{2\,024 + 2\,023}$.

Mặt khác, ta lại có $\frac{2\,021}{2\,023} > \frac{2\,021}{2\,024 + 2\,023}$; $\frac{2\,022}{2\,024} > \frac{2\,022}{2\,024 + 2\,023}$ nên

$$\frac{2\,021}{2\,023} + \frac{2\,022}{2\,024} > \frac{2\,021}{2\,024 + 2\,023} + \frac{2\,022}{2\,024 + 2\,023}.$$

Vậy $\frac{2\,021}{2\,023} + \frac{2\,022}{2\,024} > \frac{2\,022 + 2\,021}{2\,024 + 2\,023}$.

Ví dụ 4 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Giải

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Ta có: $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$; $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}$ nên $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{2}{a+b+c}$.

Mặt khác, ta lại có $c + a > b$ nên $a + b + c < 2(a + c)$. Suy ra $\frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{2(a+c)}$ hay $\frac{2}{a+b+c} > \frac{1}{a+c}$. Do đó $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{c+a}$.

Tương tự, ta chứng minh được $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b}$ và $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{b+c}$.

Vậy $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Ví dụ 5* Cho các số x, y, z thoả mãn $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$. Chứng minh có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là **sai**:

$$x(1-y) > 0{,}25;\ y(1-z) > 0{,}25;\ z(1-x) > 0{,}25.$$

Giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng. Khi đó, ta có:

$$x(1-y)\,.\,y(1-z)\,.\,z(1-x) > 0{,}25\,.\,0{,}25\,.\,0{,}25$$

hay $$x(1-x)\,.\,y(1-y)\,.\,z(1-z) > \frac{1}{64} \qquad (1)$$

Ta xét: $x(1-x) = x - x^2 = -\left(x^2 - 2\,.\,x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Với số x tuỳ ý, ta có $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ hay $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$, tức là $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$. Suy ra $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Tương tự, ta chứng minh được $y(1-y) \leq \frac{1}{4}$; $z(1-z) \leq \frac{1}{4}$. Do đó

$$x(1-x)\,.\,y(1-y)\,.\,z(1-z) \leq \frac{1}{64} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta thấy giả thiết ban đầu là vô lí. Vậy có ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là sai.

Ví dụ 6 *Bảng 1* cho biết sản lượng lúa các vụ của nước ta trong năm 2021. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Tổng sản lượng lúa của cả ba vụ lớn hơn hai lần sản lượng lúa vụ đông xuân.

b) Sản lượng lúa vụ mùa lớn hơn 70% sản lượng lúa vụ đông xuân.

c) Tổng sản lượng lúa vụ hè thu và thu đông với sản lượng lúa vụ mùa lớn hơn sản lượng lúa vụ đông xuân.

Vụ lúa	Sản lượng (triệu tấn)
Đông xuân	20,63
Hè thu và thu đông	15,16
Mùa	8,06

Bảng 1

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Giải

a) Tổng sản lượng lúa của cả ba vụ là:

$$20,63 + 15,16 + 8,06 = 43,85 \text{ (triệu tấn).}$$

Hai lần sản lượng lúa vụ đông xuân là:

$$2\,.\,20,63 = 41,26 \text{ (triệu tấn).}$$

Do 43,85 > 41,26 nên tổng sản lượng lúa của cả ba vụ lớn hơn hai lần sản lượng lúa vụ đông xuân. Vậy phát biểu ở câu a là đúng.

b) 70% sản lượng lúa vụ đông xuân là:

$$70\%\,.\,20,63 = 14,441 \text{ (triệu tấn).}$$

Do 8,06 < 14,441 nên sản lượng lúa vụ mùa nhỏ hơn 70% sản lượng lúa vụ đông xuân. Vậy phát biểu ở câu b là sai.

c) Tổng sản lượng lúa vụ hè thu và thu đông với sản lượng lúa vụ mùa là:

$$15,16 + 8,06 = 23,22 \text{ (triệu tấn)}.$$

Do $23,22 > 20,63$ nên tổng sản lượng lúa vụ hè thu và thu đông với sản lượng lúa vụ mùa lớn hơn sản lượng lúa vụ đông xuân. Vậy phát biểu ở câu c là đúng.

C. BÀI TẬP

1. Cho các số a, b, c, d đều khác 0 thoả mãn $a > b$ và $c > d$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào đúng?

a) $a + c > b + d$.

b) $ac > bd$.

c) $a - d > b - c$.

d) $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$.

2. Cho $a < b$. So sánh:

a) $M = -24(a + 23)$ và $N = -24(b + 23)$;

b) $P = a\sqrt{12} - 24$ và $Q = b\sqrt{12} - 23$.

3. Cho x, y là các số thực tuỳ ý thoả mãn $x > y$. Bất đẳng thức $x^2 > y^2$ là đúng hay sai? Vì sao?

4. Cho a, b, c, d là các số không âm thoả mãn $a > c + d$, $b > c + d$. Chứng minh:

a) $a + 2b > 3c + 3d$;

b) $a^2 + b^2 > 2c^2 + 2cd + 2d^2$;

c) $ab > c^2 + cd + d^2$.

5. Cho x, y, z là các số thực tuỳ ý. Chứng minh:

a) $x^2 + y^2 \geq -2xy$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

c) $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$.

6. Chứng minh:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - 2$;

b) $\sqrt{10} + \sqrt{11} - \sqrt{7} < \sqrt{10} + \sqrt{13} - \sqrt{5}$;

c) $3 \,.\, 1\,024^2 > 2^{21}$.

7. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$;

b) $\dfrac{1}{a+b-c} + \dfrac{1}{b+c-a} + \dfrac{1}{c+a-b} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

8. Theo Tổng cục Môi trường, chỉ số chất lượng không khí được tính theo thang điểm (khoảng giá trị AQI) tương ứng với biểu tượng và màu sắc để cảnh báo chất lượng không khí và mức độ ảnh hưởng tới sức khoẻ con người, cụ thể như sau (*Bảng 2*):

Khoảng giá trị AQI	**Chất lượng không khí**	**Màu sắc**
0 – 50	Tốt	Xanh
51 – 100	Trung bình	Vàng
101 – 150	Kém	Da cam
151 – 200	Xấu	Đỏ
201 – 300	Rất xấu	Tím
301 – 500	Nguy hại	Nâu

Bảng 2

Chỉ số AQI tại Hà Nội, Thái Nguyên, Hưng Yên, Sơn La ghi nhận vào sáng ngày 09/01/2023 lần lượt là: 338; 406; 312,9; 78 (*Nguồn: Tạp chí điện tử Môi trường và Cuộc sống*). Dựa vào *Bảng 2*, cho biết chất lượng không khí vào sáng 09/01/2023 tại Hà Nội, Thái Nguyên, Hưng Yên, Sơn La ở mức nào trong các mức sau: Tốt, Trung bình, Kém, Xấu, Rất xấu, Nguy hại.

9. Một cửa hàng nhập về 60 chiếc điện thoại từ nước ngoài với giá nhập vào là 20 triệu đồng/chiếc. Thuế và phí vận chuyển của 60 chiếc điện thoại đó lần lượt là 36 triệu đồng và 20 triệu đồng. Khi về Việt Nam, cửa hàng đó đã bán mỗi chiếc điện thoại với giá bán bằng 125% giá nhập vào. Nhận định "Sau khi bán hết 60 chiếc điện thoại đó, cửa hàng đã lãi hơn 250 triệu đồng" là đúng hay sai? Vì sao?

10. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh diện tích của tứ giác $ABCD$ không lớn hơn
$$\frac{AB\ .\ BC + AD\ .\ DC}{2}.$$

11*. Bác Long dùng 80 m lưới thép gai để rào một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật. Bác Long đã tận dụng bờ giậu có sẵn để làm một cạnh hàng rào của mảnh vườn. Tìm các kích thước của mảnh vườn có diện tích lớn nhất mà bác Long rào được bằng 80 m lưới thép gai.

§2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Mở đầu về bất phương trình một ẩn

– Một bất phương trình với ẩn x có dạng $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$) trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.

– Khi thay giá trị $x = a$ vào bất phương trình với ẩn x, ta được một khẳng định đúng thì số a (hay giá trị $x = a$) gọi là nghiệm của bất phương trình đó.

Bất phương trình bậc nhất một ẩn

– *Định nghĩa:* Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

– *Cách giải:*

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$) được giải như sau:

$$ax + b > 0$$
$$ax > -b$$
$$x > \frac{-b}{a}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > \frac{-b}{a}$.

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$) được giải như sau:

$$ax + b > 0$$
$$ax > -b$$
$$x < \frac{-b}{a}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < \frac{-b}{a}$.

Chú ý: Các bất phương trình bậc nhất $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được giải bằng cách tương tự.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Đối với những bất phương trình bậc nhất một ẩn đó, xác định hệ số a của x, hệ số tự do b.

a) $-7x + 2 < 0$.

b) $x^2 - 0,23 > 0$.

c) $21x + \dfrac{1}{2x} \geq 0$.

d) $\sqrt{10}\,x \leq 0$.

Giải

Bất phương trình ở các câu a, d là bất phương trình bậc nhất một ẩn. Bất phương trình ở các câu b, c không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình $-7x + 2 < 0$ có $a = -7$, $b = 2$.

Bất phương trình $\sqrt{10}\,x \leq 0$ có $a = \sqrt{10},\ b = 0$.

Ví dụ 2 Kiểm tra xem giá trị $x = -2$ có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất sau hay không:

a) $-x + 3 > 0$;

b) $2 + 2x < 0$;

c) $-45x \leq 0$.

Giải

a) Thay $x = -2$, ta có: $-(-2) + 3 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình $-x + 3 > 0$.

b) Thay $x = -2$, ta có: $2 + 2 \,.\, (-2) < 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình $2 + 2x < 0$.

c) Thay $x = -2$, ta có: $-45 \,.\, (-2) \leq 0$ là khẳng định không đúng.

Vậy $x = -2$ không là nghiệm của bất phương trình $-45x \leq 0$.

Ví dụ 3 Giải các bất phương trình:

a) $2x - 6 \geq 0$;

b) $-0,3x + 0,63 < 0,6x - 1,8$;

c) $0,5x + 0,5 > 5(x - 1)$.

Giải

a) $2x - 6 \geq 0$

$2x \geq 6$

$x \geq 3$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq 3$.

b) $-0,3x + 0,63 < 0,6x - 1,8$

$$-0,9x < -2,43$$

$$x > 2,7.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2,7$.

c) $0,5x + 0,5 > 5(x - 1)$

$$0,5x + 0,5 > 5x - 5$$

$$-4,5x > -5,5$$

$$x < \frac{11}{9}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < \frac{11}{9}$.

Ví dụ 4 Tìm giá trị của a để bất phương trình $(a + 1)x - 2 \geq 0$ nhận giá trị $x = -3$ làm nghiệm.

Giải

Do bất phương trình $(a + 1)x - 2 \geq 0$ nhận giá trị $x = -3$ làm nghiệm nên ta có:

$$(a + 1) . (-3) - 2 \geq 0.$$

Giải bất phương trình trên: $(a + 1) . (-3) - 2 \geq 0$

$$-3a - 3 - 2 \geq 0$$

$$-3a \geq 5$$

$$a \leq -\frac{5}{3}.$$

Vậy với các giá trị của a sao cho $a \leq -\frac{5}{3}$ thì bất phương trình $(a + 1)x - 2 \geq 0$ nhận giá trị $x = -3$ làm nghiệm.

Ví dụ 5 Cho $t > 2$. Viết một bất phương trình cho mỗi biểu thức sau:

a) $2t + 1$; b) $0,5(3t - 5)$; c) $-6(2t - 4)$.

Giải

a) Do $t > 2$ nên $2t + 1 > 2 . 2 + 1$ hay $2t + 1 > 5$.

b) Do $t > 2$ nên $3t - 5 > 3 . 2 - 5$ hay $3t - 5 > 1$. Do đó $0,5(3t - 5) > 0,5$.

c) Do $t > 2$ nên $2t - 4 > 2 . 2 - 4$ hay $2t - 4 > 0$. Do đó $-6(2t - 4) < 0$.

Ví dụ 6 Cô Hạnh mang 500 nghìn đồng để mua thức ăn chuẩn bị cho bữa tiệc gia đình. Số tiền mua cá là x (nghìn đồng) với $x > 0$. Số tiền mua thịt lợn nhiều hơn số tiền mua cá là 20 nghìn đồng. Số tiền mua thịt bò gấp ba lần số tiền mua thịt lợn.

a) Viết một bất phương trình bậc nhất ẩn x, biết rằng sau khi mua cá, thịt lợn, thịt bò thì cô Hạnh vẫn còn tiền.

b) Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn ở câu a.

Giải

a) Số tiền mà cô Hạnh mua thịt lợn và thịt bò lần lượt là $x + 20$ (nghìn đồng) và $3(x + 20)$ (nghìn đồng) với $x > 0$. Do sau khi mua cá, thịt lợn, thịt bò thì cô Hạnh vẫn còn tiền nên ta có bất phương trình:

$$500 - [x + x + 20 + 3(x + 20)] > 0 \text{ hay } 420 - 5x > 0 \qquad (1)$$

b) Giải bất phương trình (1): $420 - 5x > 0$

$$-5x > -420$$

$$x < 84.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình ở câu a là $0 < x < 84$.

Ví dụ 7 Bà Mai dành không quá 4 giờ để gói bánh tẻ và bánh nếp. Bánh tẻ cần 3 phút để gói xong một chiếc, còn bánh nếp cần 2 phút để gói xong một chiếc. Tính số bánh tẻ mà bà Mai có thể gói nhiều nhất, biết bà Mai đã gói được 75 chiếc bánh nếp.

Giải

Gọi x là số chiếc bánh tẻ mà bà Mai gói ($x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, tổng thời gian bà Mai dùng để gói hai loại bánh là: $3x + 2 \,.\, 75$ (phút).

Do bà Mai dành không quá 4 giờ để gói hai loại bánh nên ta có bất phương trình:

$$3x + 2 \,.\, 75 \leq 4 \,.\, 60.$$

Giải bất phương trình trên: $3x + 2 \,.\, 75 \leq 4 \,.\, 60$

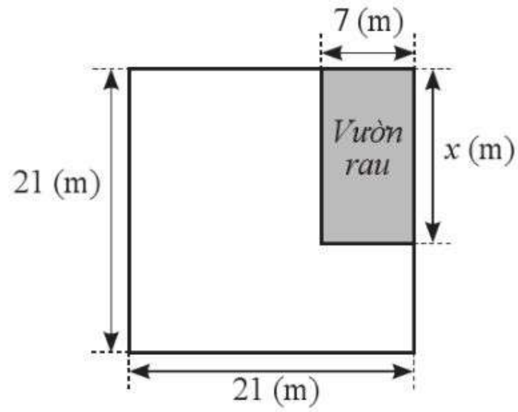
$$3x + 150 \leq 240$$

$$3x \leq 90$$

$$x \leq 30.$$

Vậy bà Mai có thể gói được nhiều nhất 30 chiếc bánh tẻ.

Ví dụ 8 Cho một khu đất có dạng hình vuông với độ dài cạnh 21 (m). Bác Lan muốn dành ra một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với chiều rộng 7 (m), chiều dài x (m) ở góc của khu đất để trồng rau như *Hình 1* ($7 < x < 21$). Tìm giá trị nhỏ nhất của x để diện tích của phần đất còn lại không quá 350 m^2.



Hình 1

Giải

Diện tích của phần đất còn lại là: $21^2 - 7x$ (m^2).

Do diện tích của phần đất còn lại không quá 350 m^2 nên ta có bất phương trình:

$$21^2 - 7x \le 350.$$

Giải bất phương trình trên:

$$\begin{aligned} 21^2 - 7x &\le 350 \\ 441 - 7x &\le 350 \\ -7x &\le -91 \\ x &\ge 13. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 13 m.

C. BÀI TẬP

12. Kiểm tra xem giá trị $x = 3$ có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình sau hay không:

a) $2x - 7 < 0$; b) $-0,3x + 1,7 \le 0$; c) $-5x^2 + 2x > 0$.

13. Giải các bất phương trình:

a) $3x + 7 < -x + 2$;

b) $3(x + 2) + 0,5 > 4(x - 1)$;

c) $\dfrac{x+1}{6} + \dfrac{x+1}{12} \ge \dfrac{5x+5}{4} + \dfrac{1}{15}$.

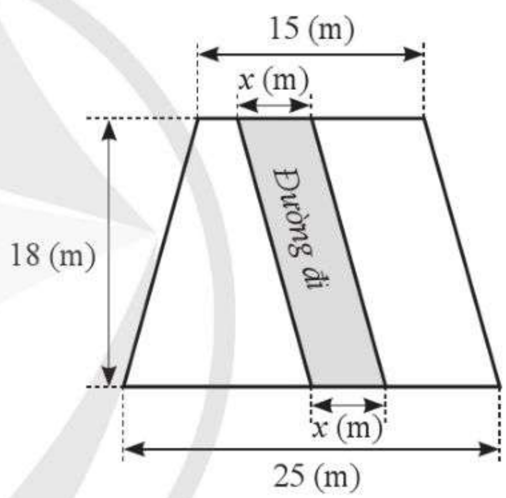
14. Cho $u \le -1$. Viết một bất phương trình cho mỗi biểu thức sau:

a) $-3,2u + 3$; b) $\dfrac{3}{13}(2u - 4)$; c) $-5(5u - 2)$.

15. Tổng chi phí của một công ty sản xuất nước rửa tay là 80 triệu đồng/quý. Giá mỗi chai nước rửa tay là 18 000 đồng. Hỏi trung bình mỗi quý, công ty đó phải bán ít nhất bao nhiêu chai nước rửa tay để thu lợi nhuận không dưới 328 triệu đồng sau bốn quý?

16. Một xí nghiệp đã sản xuất hai loại hộp giấy có dạng hình hộp chữ nhật để đựng đồ ăn. Hộp giấy loại I có chiều rộng là x (cm), chiều dài hơn chiều rộng là 9 (cm), chiều cao là 18 (cm) và hộp giấy loại II có chiều rộng là 10 (cm), chiều dài hơn chiều rộng là 5 (cm), chiều cao là $x + 1$ (cm) với $x > 0$. Tổng diện tích xung quanh của 25 hộp giấy loại I hơn tổng diện tích xung quanh của 20 hộp giấy loại II không dưới 175 dm^2. Tìm giá trị nhỏ nhất của x, biết rằng diện tích giấy dán mép hộp không đáng kể.

17. Cho một khu đất có dạng hình thang với đáy nhỏ 15 (m), đáy lớn 25 (m), chiều cao 18 (m). Bác Lâm muốn dành ra một mảnh vườn có dạng hình bình hành với cạnh đáy x (m), chiều cao 18 (m) như *Hình 2* ($0 < x < 15$). Tìm giá trị lớn nhất của x để diện tích của phần đất còn lại không dưới 270 m^2.



Hình 2

18. Số đo tính theo độ của ba góc A, B, C trong tứ giác $ABCD$ lần lượt là x, $2x$, $3(x - 10)$ với $x > 10$.

a) Viết một bất phương trình bậc nhất ẩn x.

b) Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn ở câu a.

c) Các góc có số đo là $2x$ và $3(x - 10)$ có bằng nhau được hay không? Vì sao?

19. Bạn Minh mang 120 nghìn đồng đi mua vở. Bạn Minh mua hai loại vở: loại I giá 10 nghìn đồng/quyển; loại II giá 8 nghìn đồng/quyển. Tìm số quyển vở loại I nhiều nhất mà bạn Minh có thể mua được, biết bạn Minh đã mua 5 quyển vở loại II.

20. Vòi thứ nhất chảy vào bể không chứa nước, chảy được 60 l nước mỗi phút. Cùng lúc đó, vòi thứ hai chảy từ bể ra, chảy được lượng nước bằng $\frac{1}{3}$ lượng nước chảy vào của vòi thứ nhất. Hỏi hai vòi chảy sau ít nhất bao nhiêu giờ thì trong bể có không ít hơn 1 200 l nước?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

21. Cho a, b, c là các số bất kì thoả mãn $a > b$. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 > b^2$. **B.** $ac > bc$. **C.** $c - a > c - b$. **D.** $a + c > b + c$.

22. Cho a, b, c, d là các số dương thoả mãn $a > b$ và $c > d$. Bất đẳng thức nào sau đây **không** đúng?

A. $ac > bd$. **B.** $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. **C.** $a + c > b + d$. **D.** $a - d > b - c$.

23. Giá trị của m để phương trình $x - 2 = 3m + 4$ có nghiệm lớn hơn 3 là

A. $m > 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m > -1$. **D.** $m < -1$.

24. Nghiệm của bất phương trình $-\frac{x+2}{5} + \frac{x}{4} > 1$ là

A. $x < 28$. **B.** $x > 28$. **C.** $x < 9$. **D.** $x > 9$.

25. Cho a, b là hai số thực tuỳ ý. Chứng minh: $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$.

26. a) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $a < b$. Chứng minh: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh:

$$M = \frac{10^{2\,023} + 1}{10^{2\,024} + 1} \text{ và } N = \frac{10^{2\,022} + 1}{10^{2\,023} + 1}.$$

27. Một hãng taxi có giá cước như sau (*Bảng 3*):

Loại xe	Giá mở cửa (0 km đến 1 km)	Giá cước 29 km tiếp theo (trên 1 km đến 30 km)	Giá cước từ kilômét thứ 31 (trên 30 km)
Xe 4 chỗ	11 000 đồng	14 500 đồng/km	11 600 đồng/km
Xe 7 chỗ	11 000 đồng	15 500 đồng/km	13 600 đồng/km

Bảng 3

Hai nhóm khách A và B đã sử dụng dịch vụ của hãng taxi này để di chuyển. Nhóm khách A đã đi 45 km bằng loại xe 4 chỗ. Nhóm khách B đã đi 40 km bằng loại xe 7 chỗ. Nhận định "Số tiền nhóm khách A phải trả cao hơn số tiền nhóm khách B phải trả và số tiền chênh lệch lớn hơn 10 000 đồng" là đúng hay sai? Vì sao?

28. Giải các bất phương trình:

a) $-3x + 22 < -13x + 17$;

b) $5(x-1) + 0,7(2x+1) > 1,4x + 0,6$;

c) $\frac{x-1}{6} + \frac{x+1}{2} \leq \frac{3x-5}{4} + \frac{1}{2}$.

29*. Cô Ngọc đi du lịch từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh với quãng đường 1 595 km. Trung bình mỗi ngày, cô Ngọc đi được 295 km. Gọi t là số ngày mà cô Ngọc đã đi. Tìm t sao cho quãng đường còn lại cô Ngọc phải đi ít hơn 415 km sau t ngày đã đi.

30. Bác Lan sử dụng dịch vụ điện thoại di động với giá cước gọi nội mạng và gọi ngoại mạng lần lượt là 1 200 đồng/phút và 2 000 đồng/phút. Trong tháng 10, bác Lan đã sử dụng 90 phút gọi nội mạng. Hỏi bác Lan có thể sử dụng nhiều nhất bao nhiêu phút gọi ngoại mạng nếu tiền cước bác Lan phải trả trong tháng 10 không vượt quá 200 000 đồng.

31. Một trang trại thu được ít nhất 20,8 triệu đồng do bán cà chua và khoai tây. Giá bán cà chua là 18 nghìn đồng/kg và giá bán khoai tây là 25 nghìn đồng/kg. Tính số kilôgam cà chua ít nhất mà trang trại đó đã bán, biết trang trại này đã bán 400 kg khoai tây.

32. Một người muốn sử dụng yến mạch và gạo lứt để tạo món ăn kiêng. Giá yến mạch và gạo lứt lần lượt là 70 000 đồng/kg và 30 000 đồng/kg. Tìm số kilôgam gạo lứt nhiều nhất mà người đó có thể mua, biết người đó đã mua 1 kg yến mạch và số tiền người đó bỏ ra không vượt quá 190 000 đồng.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Bất đẳng thức ở các câu a, c là đúng.

2. a) $M > N$. b) $P < Q$.

3. Bất đẳng thức $x^2 > y^2$ là sai. Chẳng hạn, chọn $x = -1$ và $y = -2$, ta có: $x^2 = 1$ và $y^2 = 4$. Khi đó $x > y$ nhưng $x^2 < y^2$.

4. Do a, b, c, d là các số không âm nên $c + d$ cũng không âm. Khi đó, với $a > c + d$, $b > c + d$, ta có:

a) $a + 2b > c + d + 2(c + d)$ hay $a + 2b > 3c + 3d$;

b) $a^2 + b^2 > (c + d)^2 + (c + d)^2$ hay $a^2 + b^2 > 2c^2 + 4cd + 2d^2$, suy ra

$a^2 + b^2 > 2c^2 + 2cd + 2d^2$;

c) $ab > (c + d)(c + d)$ hay $ab > c^2 + 2cd + d^2$, suy ra $ab > c^2 + cd + d^2$.

5. a) Với hai số thực x, y tuỳ ý, ta có: $(x + y)^2 \geq 0$ hay $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$. Do đó $x^2 + y^2 \geq -2xy$.

b) Với ba số thực x, y, z tuỳ ý, ta có: $(x - y)^2 \geq 0$, $(y - z)^2 \geq 0$, $(z - x)^2 \geq 0$ hay $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. Suy ra $x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$ hay $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$. Do đó $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

c) Xét hiệu: $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$. Do $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ (theo câu b) nên $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \geq 0$. Vậy $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$.

6. a) Ta có: $2 = \sqrt{4}$. Do $5 < 6$ và $7 > 4$ nên $\sqrt{5} < \sqrt{6}$ và $\sqrt{7} > \sqrt{4}$.

Do đó $\sqrt{5} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - \sqrt{4}$ hay $\sqrt{5} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - 2$.

b) Học sinh tự làm.

c) Ta có: $2^{21} = 2 . 2^{20} = 2 . \left(2^{10}\right)^2 = 2 . 1\,024^2$. Do $3 > 2$ nên $3 . 1\,024^2 > 2 . 1\,024^2$.

Do đó $3 . 1\,024^2 > 2^{21}$.

7. a) Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$. Suy ra $a^2 < a(b + c)$, $b^2 < b(c + a)$, $c^2 < c(a + b)$. Do đó $a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)$ hay $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

b) Theo kết quả *Ví dụ 2c* (trang 32), ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{(a+b-c)+(b+c-a)}$$

hay $$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a} \geq \frac{2}{b}.$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{2}{c}; \quad \frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c} \geq \frac{2}{a}.$$

Do đó $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b} \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}.$

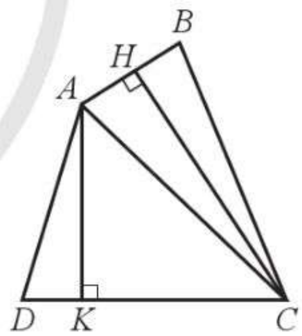
8. Chất lượng không khí vào sáng ngày 09/01/2023 tại Hà Nội, Thái Nguyên, Hưng Yên, Sơn La lần lượt ở mức Nguy hại, Nguy hại, Nguy hại, Trung bình.

9. Số tiền lãi mà cửa hàng đó thu được khi bán hết 60 chiếc điện thoại đó là:

$$(125\% \,.\, 20 \,.\, 60) - (20 \,.\, 60 + 36 + 20) = 244 \text{ (triệu đồng)}.$$

Do $244 < 250$ nên nhận định đã cho là sai.

10. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, AK vuông góc với DC tại K (*Hình 3*). Khi đó, diện tích của tam giác ABC là: $S_1 = \dfrac{AB \,.\, CH}{2}$ và diện tích của tam giác ACD là: $S_2 = \dfrac{DC \,.\, AK}{2}$.



Hình 3

Diện tích của tứ giác $ABCD$ là:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{AB \,.\, CH + AK \,.\, DC}{2}.$$

Mà $CH \leq BC$ và $AK \leq AD$, suy ra

$$S \leq \frac{AB \,.\, BC + AD \,.\, DC}{2}.$$

Vậy diện tích của tứ giác $ABCD$ không lớn hơn $\dfrac{AB \,.\, BC + AD \,.\, DC}{2}$.

11*. Gọi x (m) là độ dài cạnh song song với bờ giậu và y (m) là độ dài cạnh vuông góc với bờ giậu ($x > 0$, $y > 0$). Khi đó, ta có: $x + 2y = 80$ hay $x = 80 - 2y$.

Diện tích của mảnh vườn là:

$$S = xy = (80 - 2y)y = -2y^2 + 80y = -2(y^2 - 40y + 400) + 800$$
$$= -2(y-20)^2 + 800 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Do $(y-20)^2 \geq 0$ với số y tuỳ ý nên $-2(y-20)^2 + 800 \leq 800$. Do đó, diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Long rào được là 800 m^2. Dấu "=" xảy ra khi $y - 20 = 0$ hay $y = 20$. Thay $y = 20$ vào $x = 80 - 2y$, ta được: $x = 80 - 2 \,.\, 20 = 40$.

Vậy mảnh vườn có diện tích lớn nhất mà bác Long rào được có chiều dài 40 m và chiều rộng 20 m.

12. Học sinh tự làm.

13. a) $x < -\dfrac{5}{4}$. b) $x < 10{,}5$. c) $x \leq -\dfrac{16}{15}$.

14. a) $-3{,}2u + 3 \geq 6{,}2$. b) $\dfrac{3}{13}(2u-4) \leq -\dfrac{18}{13}$. c) $-5(5u-2) \geq 35$.

15. Gọi x là số chai nước rửa tay mà công ty đó bán được trung bình mỗi quý ($x \in \mathbb{N}^*$). Ta lập được bất phương trình: $4 \,.\, (18\,000x - 80\,000\,000) \geq 328\,000\,000$. Giải bất phương trình, ta tìm được $x \geq 9\,000$. Vậy trung bình mỗi quý công ty đó phải bán ít nhất 9 000 chai nước rửa tay sau bốn quý.

16. Ta lập được bất phương trình:

$$25 \,.\, 2(x + x + 9) \,.\, 18 - 20 \,.\, 2(10 + 15)(x + 1) \geq 17\,500.$$

Giải bất phương trình, ta tìm được $x \geq 13$. Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 13.

17. Ta lập được bất phương trình: $\dfrac{(15 + 25) \,.\, 18}{2} - 18x \geq 270$. Giải bất phương trình, ta tìm được $x \leq 5$. Vậy giá trị lớn nhất của x là 5.

18. a) $x + 2x + 3(x - 10) < 360$ hay $6x - 30 < 360$ với $x > 10$.

b) $10 < x < 65$.

c) Giả sử $2x$ và $3(x-10)$ bằng nhau. Khi đó, ta có phương trình: $2x = 3(x - 10)$. Giải phương trình, ta tìm được $x = 30$ (thoả mãn $10 < x < 65$). Vậy các góc có số đo là $2x$ và $3(x - 10)$ có thể bằng nhau.

19. Gọi x là số quyển vở loại I mà bạn Minh đã mua ($x \in \mathbb{N}^*$). Ta lập được bất phương trình: $10x + 8 \,.\, 5 \leq 120$. Giải bất phương trình, ta tìm được $x \leq 8$. Vậy bạn Minh có thể mua được nhiều nhất 8 quyển vở loại I.

20. Gọi x (phút) là thời gian hai vòi chảy ($x > 0$). Ta lập được bất phương trình:

$$60x - \frac{1}{3} \cdot 60x \geq 1\,200.$$

Giải bất phương trình, ta tìm được $x \geq 30$. Vậy hai vòi chảy sau ít nhất 30 phút hay 0,5 giờ thì trong bể có 1 200 l nước.

21. D. **22.** B. **23.** C. **24.** B.

25. Xét hiệu: $(a^2 + 1)(b^2 + 1) - 4ab = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - 4ab$

$$= (a^2b^2 - 2ab + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) = (ab - 1)^2 + (a - b)^2.$$

Với hai số thực a, b tuỳ ý, ta có: $(ab - 1)^2 \geq 0$, $(a - b)^2 \geq 0$. Suy ra

$$(ab - 1)^2 + (a - b)^2 \geq 0 \text{ hay } (a^2 + 1)(b^2 + 1) - 4ab \geq 0.$$

Vậy $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$.

26. a) Xét hiệu:

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{ab + bc - ab - ac}{b(b+c)} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}.$$

Do a, b, c là các số dương và $a < b$ nên $b - a > 0$, $b + c > 0$.

Suy ra $\dfrac{c(b-a)}{b(b+c)} > 0$. Vậy $\dfrac{a+c}{b+c} > \dfrac{a}{b}$.

b) Ta có:

$$N = \frac{10^{2\,022} + 1}{10^{2\,023} + 1} = \frac{10\left(10^{2\,022} + 1\right)}{10\left(10^{2\,023} + 1\right)} = \frac{10^{2\,023} + 10}{10^{2\,024} + 10} = \frac{\left(10^{2\,023} + 1\right) + 9}{\left(10^{2\,024} + 1\right) + 9}.$$

Theo câu a, ta có

$$\frac{\left(10^{2\,023} + 1\right) + 9}{\left(10^{2\,024} + 1\right) + 9} > \frac{10^{2\,023} + 1}{10^{2\,024} + 1} \text{ nên } M < N.$$

27. Số tiền nhóm khách A phải trả là:

$$11\,000 + 14\,500 \,.\, 29 + 11\,600 \,.\, (45 - 30) = 605\,500 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền nhóm khách B phải trả là:

$$11\,000 + 15\,500 \,.\, 29 + 13\,600 \,.\, (40 - 30) = 596\,500 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền nhóm khách A phải trả nhiều hơn số tiền nhóm khách B phải trả là:

$$605\,500 - 596\,500 = 9\,000 \text{ (đồng)}.$$

Do $9\,000 < 10\,000$ nên nhận định đã cho là sai.

28. a) $x < -0{,}5$. b) $x > 0{,}98$. c) $x \geq 13$.

29*. Ta lập được bất phương trình: $1\,595 - 295t < 415$. Giải bất phương trình, ta tìm được $t > 4$. Ngoài ra, t phải thoả mãn điều kiện $1\,595 - 295t > 0$ hay $t < 5{,}41$. Vậy $t = 5$.

30. Gọi x là số phút gọi ngoại mạng của bác Lan trong tháng 10 ($x > 0$). Ta lập được bất phương trình: $1\,200 \,.\, 90 + 2\,000x \leq 200\,000$. Giải bất phương trình, ta tìm được $x \leq 46$. Vậy bác Lan có thể sử dụng nhiều nhất 46 phút gọi ngoại mạng.

31. Gọi x là số kilôgam cà chua mà trang trại đó đã bán ($x > 0$). Ta lập được bất phương trình: $18\,000x + 25\,000 \,.\, 400 \geq 20\,800\,000$. Giải bất phương trình, ta tìm được $x \geq 600$. Vậy trang trại đó đã bán được ít nhất 600 kg cà chua.

32. Gọi x là số kilôgam gạo lứt mà người đó đã mua ($x > 0$). Ta lập được bất phương trình: $70\,000 + 30\,000x \leq 190\,000$. Giải bất phương trình, ta tìm được $x \leq 4$. Vậy người đó có thể mua nhiều nhất 4 kg gạo lứt.

Chương III
CĂN THỨC

§1 CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Căn bậc hai của số thực không âm

– Căn bậc hai của một số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

– Khi $a > 0$, số a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$; số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$. Ta gọi $\sqrt{a}$ là căn bậc hai số học của a.

– Căn bậc hai của số 0 bằng 0, kí hiệu là $\sqrt{0}$.

– Số âm không có căn bậc hai.

– Với $a \geq 0$, ta có: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

– Với hai số a, b không âm, ta có:

+ Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

+ Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

Căn bậc ba

– Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

– Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

– Ta có: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

– Với hai số a, b, ta có:

+ Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$;

+ Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Diện tích của một vườn hoa có dạng hình tròn là 50,24 m^2. Tính chu vi của vườn hoa đó, lấy $\pi = 3,14$.

Giải

Diện tích của hình tròn được tính bằng công thức $S = \pi R^2$ với R là bán kính hình tròn.

Do diện tích của vườn hoa là 50,24 m^2 nên $50,24 = 3,14 \cdot R^2$ hay $R^2 = 16$.

Vì $R > 0$ nên $R = \sqrt{16} = 4$ (m).

Chu vi của vườn hoa đó là:

$$2 . 3,14 . 4 = 25,12 \text{ (m)}.$$

Ví dụ 2 Tìm:

a) $\sqrt{49}$; b) $-\sqrt{1,44}$; c) $\sqrt{(-8)^2}$; d) Căn bậc hai của 225.

Giải

a) Do $7^2 = 49$ nên $\sqrt{49} = 7$.

b) Do $(1,2)^2 = 1,44$ nên $-\sqrt{1,44} = -1,2$.

c) Ta có: $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64}$. Do $8^2 = 64$ nên $\sqrt{(-8)^2} = 8$.

d) Do $15^2 = (-15)^2 = 225$ nên căn bậc hai của 225 có hai giá trị là 15 và -15. Cụ thể, ta có: $\sqrt{225} = 15$ và $-\sqrt{225} = -15$.

Ví dụ 3 Trong các số $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$, $-\sqrt{(-3)^2}$, $-\sqrt{3^2}$, những số nào là căn bậc hai số học của 9?

Giải

Các số $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$ là căn bậc hai số học của 9 do $\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 > 0$.

Ví dụ 4 So sánh:

a) 7 và $\sqrt{50}$; b) $\sqrt{14}$ và $\sqrt{\dfrac{48}{7}}$; c) 2 và $\sqrt{2} + 1$.

Giải

a) Ta có: $7 = \sqrt{49}$. Do $49 < 50$ nên $\sqrt{49} < \sqrt{50}$ hay $7 < \sqrt{50}$.

b) Ta có: $14 = \dfrac{98}{7}$. Do $\dfrac{98}{7} > \dfrac{48}{7}$ nên $\sqrt{\dfrac{98}{7}} > \sqrt{\dfrac{48}{7}}$ hay $\sqrt{14} > \sqrt{\dfrac{48}{7}}$.

c) Do $1 < 2$ nên $1 < \sqrt{2}$. Suy ra $1 + 1 < \sqrt{2} + 1$ hay $2 < \sqrt{2} + 1$.

Ví dụ 5

a) Số 3 có phải là căn bậc ba của 27 hay không?

b) Số -2 có phải là căn bậc ba của -8 hay không?

c) Số $\dfrac{1}{7}$ có phải là căn bậc ba của $\dfrac{1}{49}$ hay không?

Giải

a) Ta có: $3^3 = 27$ nên số 3 là căn bậc ba của 27.

b) Ta có: $(-2)^3 = -8$ nên số -2 là căn bậc ba của -8.

c) Ta có: $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343} \neq \frac{1}{49}$ nên số $\frac{1}{7}$ không phải là căn bậc ba của $\frac{1}{49}$.

Ví dụ 6 So sánh:

a) $\sqrt[3]{-115}$ và $\sqrt[3]{-65}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{210}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$; c) 5 và $\sqrt[3]{124}$.

Giải

a) Do $-115 < -65$ nên $\sqrt[3]{-115} < \sqrt[3]{-65}$.

b) Do $\frac{1}{210} > \frac{1}{216}$ nên $\sqrt[3]{\frac{1}{210}} > \sqrt[3]{\frac{1}{216}}$.

c) Ta có: $5 = \sqrt[3]{125}$. Do $125 > 124$ nên $\sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{124}$ hay $5 > \sqrt[3]{124}$.

C. BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Căn bậc hai của 25 là 5.

b) Căn bậc hai của 36 là 6 và -6.

c) Căn bậc hai số học của 0,01 là 0,1.

d) Căn bậc hai số học của 7 là $\sqrt{7}$.

2. Tìm căn bậc hai của:

a) 144; b) 2,56; c) $\frac{169}{81}$.

3. Tìm căn bậc ba của:

a) 343; b) $-0{,}512$; c) $\frac{27}{125}$.

4. So sánh:

a) $\sqrt{41}$ và 6; b) $\sqrt{0,82}$ và 0,9; c) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ và $\sqrt{\frac{7}{6}}$;

d) $\sqrt[3]{-65}$ và $\sqrt[3]{-64}$; e) $\sqrt[3]{3,03}$ và $\sqrt[3]{3,3}$; g) -8 và $\sqrt[3]{-888}$.

5. Chứng minh:

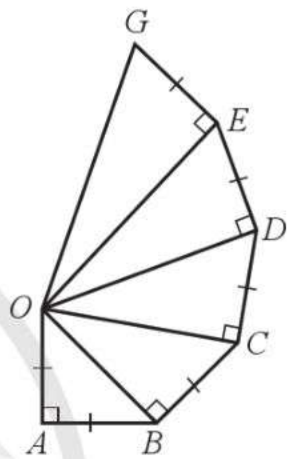
a) $\left(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,024}\right)\left(\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,024}\right)=1;$

b) $\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}+1\right]=2;$

c) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2\left(\sqrt{3}+2\right)^2=1.$

6. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB\ //\ CD$ và $AC \perp AD$. Tính độ dài cạnh AD, biết $AB = 5$ cm và $CD = 11$ cm.

7. Cho *Hình 1* có $OA = AB = BC = CD = DE = EG = 2$ cm và $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODE} = \widehat{OEG} = 90^{\circ}$. Tính độ dài các cạnh OB, OC, OD, OE, OG.



Hình 1

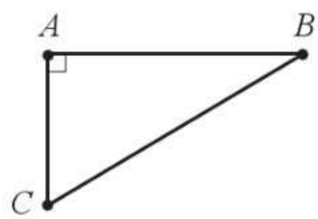
8. Trên một đoạn sông, tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông lớn hơn tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông. Gọi v (km/h) là tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông và f (km/h) là tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông. Khi đó, ta có công thức: $\sqrt{f} = \sqrt{v} - 1{,}3$.

a) Tính tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông, biết tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông là 9 km/h.

b) Tính tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông, biết tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông là 20,25 km/h.

9. Cho một hình hộp chữ nhật có các kích thước là 4,8 dm, 3 dm, 15 dm và một hình lập phương có cùng thể tích với hình hộp chữ nhật đó. Tính độ dài cạnh của hình lập phương.

10. Hàng ngày, hai anh em An và Bình cùng đi bộ từ nhà ở vị trí A đến trường. Trường của anh An ở vị trí B và trường của em Bình ở vị trí C theo hai hướng vuông góc với nhau (*Hình 2*). Anh An đi với tốc độ 4 km/h và đến trường sau 15 phút. Em Bình đi với tốc độ 3 km/h và đến trường sau 12 phút. Tính khoảng cách BC giữa hai trường (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Hình 2

§2 MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Căn bậc hai của một bình phương

Với mọi số a, ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Căn bậc hai của một tích

Với hai số không âm a và b, ta có: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Căn bậc hai của một thương

Với $a \geq 0$ và $b > 0$, ta có: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai

Cho hai số a, b với $b \geq 0$. Khi đó $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

Cụ thể, ta có:

– Nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$;

– Nếu $a < 0$, $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$.

Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

– Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

– Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một bình phương, hãy tính:

a) $\sqrt{19^2}$; b) $\sqrt{(-125)^2}$; c) $\sqrt{\left(-\dfrac{8}{11}\right)^2}$; d) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$.

Giải

a) $\sqrt{19^2} = |19| = 19$.

b) $\sqrt{(-125)^2} = |-125| = 125$.

c) $\sqrt{\left(-\dfrac{8}{11}\right)^2} = \left|-\dfrac{8}{11}\right| = \dfrac{8}{11}$.

d) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2} = \left|\sqrt{7}-5\right|$.

Do $\sqrt{7} < \sqrt{25}$ hay $\sqrt{7} < 5$ nên $\sqrt{7} - 5 < 0$. Vì thế, ta có $\left|\sqrt{7}-5\right| = 5 - \sqrt{7}$.

Vậy $\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2} = \left|\sqrt{7}-5\right| = 5 - \sqrt{7}$.

Ví dụ 2 Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{25\,.\,144}$; b) $\sqrt{52}\,.\,\sqrt{13}$; c) $\sqrt{\dfrac{25}{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{7}{9}}$; d) $\sqrt{1,2}\,.\,\sqrt{270}$.

Giải

a) $\sqrt{25\,.\,144} = \sqrt{25}\,.\,\sqrt{144} = 5\,.\,12 = 60$.

b) $\sqrt{52}\,.\,\sqrt{13} = \sqrt{52\,.\,13} = \sqrt{26\,.\,2\,.\,13} = \sqrt{26\,.\,26} = 26$.

c) $\sqrt{\dfrac{25}{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{7}{9}} = \sqrt{\dfrac{25}{7}\cdot\dfrac{7}{9}} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$.

d) $\sqrt{1,2}\,.\,\sqrt{270} = \sqrt{1,2\,.\,270} = \sqrt{324} = 18$.

Ví dụ 3 Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\dfrac{12,5}{0,5}}$; b) $\sqrt{\dfrac{625}{121}}$; c) $\dfrac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$; d) $\sqrt{\dfrac{27}{13}} : \sqrt{\dfrac{192}{13}}$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{12,5}{0,5}} = \sqrt{25} = 5$.

b) $\sqrt{\dfrac{625}{121}} = \dfrac{\sqrt{625}}{\sqrt{121}} = \dfrac{25}{11}$.

c) $\dfrac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}} = \sqrt{\dfrac{230}{2,3}} = \sqrt{100} = 10$.

d) $\sqrt{\dfrac{27}{13}} : \sqrt{\dfrac{192}{13}} = \sqrt{\dfrac{27}{13} : \dfrac{192}{13}} = \sqrt{\dfrac{27}{13}\cdot\dfrac{13}{192}} = \sqrt{\dfrac{9}{64}} = \dfrac{3}{8}$.

Ví dụ 4 Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{4^2\,.\,6}$; b) $\sqrt{(-12)^2\,.\,15}$; c) $\sqrt{1\,300}$; d) $\sqrt{\dfrac{108}{25}}$.

Giải

a) $\sqrt{4^2\,.\,6} = 4\sqrt{6}$.

b) $\sqrt{(-12)^2 . 15} = |-12| . \sqrt{15} = 12\sqrt{15}$.

c) $\sqrt{1\,300} = \sqrt{100 . 13} = \sqrt{10^2 . 13} = 10\sqrt{13}$.

d) $\sqrt{\dfrac{108}{25}} = \sqrt{\dfrac{36 . 3}{25}} = \sqrt{\dfrac{36}{25} \cdot 3} = \sqrt{\left(\dfrac{6}{5}\right)^2 \cdot 3} = \dfrac{6}{5}\sqrt{3}$.

Ví dụ 5 Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{98} - \sqrt{72}$;

b) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$;

c) $\dfrac{\sqrt{2,25 . 121 - 2,25 . 21}}{\sqrt{6,25}}$;

d) $\sqrt{\sqrt{2} - 1} . \sqrt{\sqrt{2} + 1}$.

Giải

a) $\sqrt{98} - \sqrt{72} = \sqrt{49 . 2} - \sqrt{36 . 2} = \sqrt{7^2 . 2} - \sqrt{6^2 . 2} = 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

b) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300} = \sqrt{25 . 3} + \sqrt{16 . 3} - \sqrt{100 . 3}$

$= \sqrt{5^2 . 3} + \sqrt{4^2 . 3} - \sqrt{10^2 . 3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

c) $\dfrac{\sqrt{2,25 . 121 - 2,25 . 21}}{\sqrt{6,25}} = \dfrac{\sqrt{2,25 . (121 - 21)}}{\sqrt{(2,5)^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2,25 . 100}}{2,5} = \dfrac{\sqrt{225}}{2,5} = \dfrac{15}{2,5} = 6$.

d) $\sqrt{\sqrt{2} - 1} . \sqrt{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$.

Ví dụ 6 So sánh:

a) $2\sqrt{10}$ và $\sqrt{41}$;

b) $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$ và $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$;

c) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{63}$ và $-2\sqrt{2}$;

d) $-3\sqrt{7}$ và $-\dfrac{1}{2}\sqrt{260}$.

Giải

a) Ta có: $2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 . 10} = \sqrt{40}$. Do $40 < 41$ nên $\sqrt{40} < \sqrt{41}$ hay $2\sqrt{10} < \sqrt{41}$.

b) Ta có: $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} = \sqrt{\dfrac{52}{117}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Do $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{4}$ nên $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{4}$

hay $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

c) Ta có: $-\frac{1}{3}\sqrt{63} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 63} = -\sqrt{7}$; $-2\sqrt{2} = -\sqrt{2^2 . 2} = -\sqrt{8}$. Do $7 < 8$ nên $\sqrt{7} < \sqrt{8}$. Suy ra $-\sqrt{7} > -\sqrt{8}$ hay $-\frac{1}{3}\sqrt{63} > -2\sqrt{2}$.

d) Ta có: $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 . 7} = -\sqrt{63}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{260} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 260} = -\sqrt{65}$. Do $63 < 65$ nên $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Suy ra $-\sqrt{63} > -\sqrt{65}$ hay $-3\sqrt{7} > -\frac{1}{2}\sqrt{260}$.

C. BÀI TẬP

11. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một bình phương, hãy tính:

a) $\sqrt{2^2 . (-9)^2}$; b) $\sqrt{\left(\sqrt{11}-4\right)^2}$;

c) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$; d*) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

12. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{9}{100}\cdot 121}$; b) $\sqrt{17 . 51 . 27}$;

c) $\sqrt{600} . \sqrt{11^2-5^2}$; d) $\sqrt{\sqrt{7}+3} . \sqrt{3-\sqrt{7}}$.

13. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{1,21}{0,49}}$; b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$; c) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$; d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4^4 . 2^3}}$.

14. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\frac{13^2-12^2}{225}}$; b) $\frac{\sqrt{(6,2)^2-(5,9)^2}}{\sqrt{2,43}}$;

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; d*) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$.

15. So sánh:

a) $\frac{\sqrt{1\,404}}{\sqrt{351}}$ và $\sqrt{\frac{98}{25}}$; b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{35}}$;

c) $-5\sqrt{8}$ và $-\sqrt{190}$; d) 16 và $\sqrt{15} . \sqrt{17}$.

16. Sắp xếp $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{4}$; $4\sqrt{5}$; $5\sqrt{4}$; $3\sqrt{6}$ theo thứ tự tăng dần.

17. Cho các biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{35^3+1}}{\sqrt{35^2-34}}$; $B = \left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

Chứng minh: $A = 6$; $B = -2$.

18. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$;

b) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{120}$;

c) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{45}-\sqrt{13}\right)$;

d) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\sqrt{3} - \sqrt{60}$.

19. Cho $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ và $b = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$. Chứng minh:

a) $a - b$ là một số nguyên;

b) ab là một số tự nhiên.

20. So sánh:

a) $\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023}$ và $\sqrt{2\,023} - \sqrt{2\,022}$;

b) $\sqrt{a+b}$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ với $a > 0$, $b > 0$.

21. Tốc độ v (m/s) cần có của một vệ tinh để giữ nó chuyển động tròn ổn định trên quỹ đạo với bán kính r (m) quanh Trái Đất được cho bởi công thức $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$. Tính tốc độ của một vệ tinh cách tâm Trái Đất $15{,}92796 \cdot 10^6$ m, biết hằng số hấp dẫn là $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 và khối lượng Trái Đất là $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

22. Độ dài đường chéo của một hình vuông lớn hơn độ dài cạnh của nó là 4 cm. Tính độ dài cạnh của hình vuông đó.

23. Tốc độ v (m/s) của một tàu lượn siêu tốc di chuyển trên một cung tròn bán kính r (m) được cho bởi công thức $v = \sqrt{ar}$, trong đó a (m/s^2) là gia tốc hướng tâm.

a) Nếu tàu lượn đang di chuyển với tốc độ 14 m/s và muốn đạt mức gia tốc hướng tâm tối đa là 7 m/s^2 thì bán kính tối thiểu của cung tròn phải là bao nhiêu để tàu lượn không văng ra khỏi đường ray?

b) Nếu tàu lượn đang di chuyển với tốc độ 8 m/s trên cung tròn bán kính 25 m thì gia tốc hướng tâm là bao nhiêu?

§3 CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Căn thức bậc hai

– Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

– Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

Căn thức bậc ba

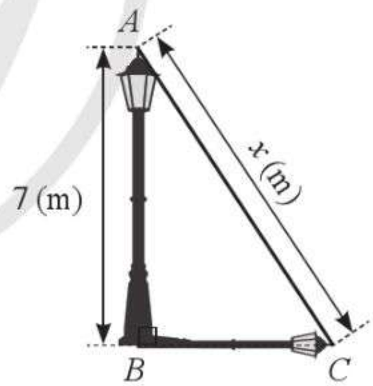
– Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

– Điều kiện xác định cho căn thức bậc ba $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định của biểu thức A.

Chú ý: Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa, khai căn (bậc hai hoặc bậc ba) làm thành một biểu thức đại số.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Tam giác ABC vuông tại B ở *Hình 3* mô tả cột đèn với chiều cao $AB = 7$ (m) và khoảng cách $AC = x$ (m). Viết công thức tính độ dài bóng BC của cột đèn theo x.



Hình 3

Giải

Do tam giác ABC vuông tại B nên $AC^2 = AB^2 + BC^2$ hay $BC^2 = AC^2 - AB^2$. Suy ra

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - 7^2} = \sqrt{x^2 - 49} \text{ (m)}.$$

Ví dụ 2 Tính giá trị của $\sqrt{x^2 - 49}$ tại:

a) $x = 8$; b) $x = -9$; c) $x = \sqrt{50}$.

Giải

a) Thay $x = 8$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt{8^2 - 49} = \sqrt{15}$.

b) Thay $x = -9$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt{(-9)^2 - 49} = \sqrt{32} = \sqrt{16 . 2} = 4\sqrt{2}$.

c) Thay $x = \sqrt{50}$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2 - 49} = \sqrt{50 - 49} = \sqrt{1} = 1$.

Ví dụ 3 Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau:

a) $\sqrt{\dfrac{x}{19}}$; b) $\sqrt{x-2\,023}$; c) $\sqrt{2\,024-x}$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{x}{19}}$ xác định khi $\dfrac{x}{19} \geq 0$ hay $x \geq 0$.

b) $\sqrt{x-2\,023}$ xác định khi $x - 2\,023 \geq 0$ hay $x \geq 2\,023$.

c) $\sqrt{2\,024-x}$ xác định khi $2\,024 - x \geq 0$ hay $x \leq 2\,024$.

Ví dụ 4

a) Tính giá trị của $\sqrt[3]{\dfrac{-x}{5}}$ tại $x = -135$; $x = 320$.

b) Tính giá trị của $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3x+1}}$ tại $x = 21$; $x = \dfrac{7}{3}$.

Giải

a) Thay $x = -135$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt[3]{\dfrac{-(-135)}{5}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Thay $x = 320$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt[3]{\dfrac{-320}{5}} = \sqrt[3]{-64} = -4$.

b) Thay $x = 21$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3\,.\,21+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{4}$.

Thay $x = \dfrac{7}{3}$ vào biểu thức, ta được: $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3\cdot\dfrac{7}{3}+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5 Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{2\,023+x}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{2\,022}{x^2}}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{x-4}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{2\,023+x}$ xác định với mọi số thực x vì $2\,023 + x$ xác định với mọi số thực x.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{2\,022}{x^2}}$ xác định với $x \neq 0$ vì $\dfrac{2\,022}{x^2}$ xác định với $x^2 \neq 0$ hay $x \neq 0$.

c) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{x-4}}$ xác định với $x \neq 4$ vì $\dfrac{5}{x-4}$ xác định với $x - 4 \neq 0$ hay $x \neq 4$.

C. BÀI TẬP

24. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $\sqrt{2x+7}$ tại $x = 1$; $x = \frac{2}{3}$; $x = 2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{-x^2+2x+11}$ tại $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$ tại $x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$; $x = \sqrt{2}$.

25. Tìm điều kiện xác định cho mỗi biểu thức sau:

a) $\sqrt{x+2\,024}$; b) $\sqrt{-7x+1}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$; d) $\sqrt{\frac{x^2+1}{1-2x}}$;

e) $\sqrt[3]{x^2+5}$; g) $\sqrt[3]{\frac{1}{32-x}}$; h) $\sqrt[3]{\frac{4}{x+3}}$; i) $\sqrt[3]{\frac{2\,024}{x^2+10}}$.

26. Điện áp U (V) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi công thức $U = \sqrt{P\,.\,R}$, trong đó P (W) là công suất tiêu thụ của điện trở và R (Ω) là giá trị điện trở.

a) Tính điện áp để thắp sáng cho bóng đèn A có công suất tiêu thụ là 100 W và giá trị điện trở là 110 Ω (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của vôn).

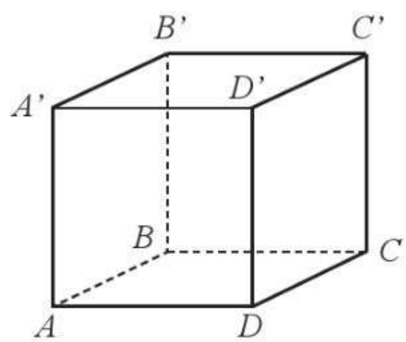
b) Bóng đèn B có điện áp 110 V và giá trị điện trở là 88 Ω. Công suất tiêu thụ của bóng đèn B có lớn hơn công suất tiêu thụ của bóng đèn A hay không? Vì sao?

27. Tốc độ v (m/s) của một chiếc ca nô được tính theo độ dài đường sóng nước sau đuôi l (m) của ca nô bởi công thức $v = 5\sqrt{l}$.

a) Một ca nô để lại đường sóng nước sau đuôi dài 4 m thì tốc độ của nó là bao nhiêu kilômét trên giờ?

b) Khi ca nô di chuyển với tốc độ 54 km/h thì đường sóng nước sau đuôi dài bao nhiêu mét?

28. Một chất điểm di chuyển từ đỉnh A' đến đỉnh C trên bề mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh 1 dm (*Hình 4*). Quãng đường ngắn nhất mà chất điểm đó di chuyển là bao nhiêu decimét?



Hình 4

29. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 5 + \sqrt{2x-1}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = 2\,024 - \sqrt{5x+2}$.

30*. Tìm x không âm, biết:

a) $2\sqrt{x} = 14$; b) $\sqrt{0,9x} = 6$; c) $\sqrt{25x} = \sqrt{3}$;

d) $\sqrt{x} < 3$; e) $\sqrt{x} > 1$; g) $\sqrt{5x} \le 6$.

§4 MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Căn thức bậc hai của một bình phương

Với mỗi biểu thức A, ta có: $\sqrt{A^2} = |A|$, tức là:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \ge 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

Căn thức bậc hai của một tích

Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$.

Căn thức bậc hai của một thương

Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

Trục căn thức ở mẫu

– Phép biến đổi làm mất căn thức ở mẫu thức của một biểu thức được gọi là trục căn thức ở mẫu của biểu thức đó.

– Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

– Với các biểu thức A, B, C mà $B \ge 0$ và $A^2 \ne B$, ta có:

$$\frac{C}{A+\sqrt{B}} = \frac{C\left(A-\sqrt{B}\right)}{A^2-B}; \quad \frac{C}{A-\sqrt{B}} = \frac{C\left(A+\sqrt{B}\right)}{A^2-B}.$$

Lưu ý: $A - \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $A + \sqrt{B}$ và ngược lại.

– Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B};\ \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}.$$

Lưu ý: $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ và ngược lại.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $2\sqrt{x^2}$ với $x < 0$;

b) $\sqrt{x^8}$;

c) $\sqrt{(x-5)^2}$ với $x \leq 5$;

d) $\sqrt{4x^2-4x+1}$ với $x \geq \frac{1}{2}$.

Giải

a) $2\sqrt{x^2} = 2|x| = -2x$ (vì $x < 0$).

b) $\sqrt{x^8} = \sqrt{(x^4)^2} = |x^4| = x^4$ (vì $x^4 \geq 0$ với mọi số thực x).

c) $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5| = 5-x$ (vì $x-5 \leq 0$ khi $x \leq 5$).

d) $\sqrt{4x^2-4x+1} = \sqrt{(2x)^2-2\,.\,2x\,.\,1+1^2} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = 2x-1$ (vì $2x-1 \geq 0$ khi $x \geq \frac{1}{2}$).

Ví dụ 2 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{13x}\cdot\sqrt{\frac{52}{x}}$ với $x > 0$;

b) $(3+x)^2 - \sqrt{0,2}\,.\,\sqrt{180x^2}$ với $x \geq 0$;

c) $5\sqrt{25x^2} - 25x$ với $x \leq 0$;

d) $\sqrt{16x^4} + 6x^2$.

Giải

a) $\sqrt{13x}\cdot\sqrt{\frac{52}{x}} = \sqrt{13x\cdot\frac{52}{x}} = \sqrt{13\,.\,13\,.\,4} = \sqrt{13^2}\,.\,\sqrt{4} = 13\,.\,2 = 26.$

b) Do $x \geq 0$ nên $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}(3+x)^2-\sqrt{0,2}\,.\,\sqrt{180x^2} &= 3^2+2\,.\,3\,.\,x+x^2-\sqrt{0,2\,.\,180x^2} = 9+6x+x^2-\sqrt{36x^2}\\ &= 9+6x+x^2-\sqrt{36}\,.\,\sqrt{x^2} = 9+6x+x^2-6x = x^2+9.\end{aligned}$$

c) Do $x \leq 0$ nên $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Khi đó, ta có:

$$5\sqrt{25x^2} - 25x = 5\sqrt{25}\,.\,\sqrt{x^2} - 25x = 5\,.\,5\,.\,(-x) - 25x = -25x - 25x = -50x.$$

d) $\sqrt{16x^4} + 6x^2 = \sqrt{16}\,.\,\sqrt{(x^2)^2} + 6x^2 = 4|x^2| + 6x^2 = 4x^2 + 6x^2 = 10x^2.$

Ví dụ 3 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\dfrac{\sqrt{28x^6}}{\sqrt{7x^4}}$ với $x < 0$;

b) $\dfrac{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^3 x^3}}{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)x}}$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{\dfrac{x^4y^2}{169x^2}}$;

d) $\sqrt{\dfrac{225}{(x-6)^2}}$ với $x < 6$.

Giải

a) Do $x < 0$ nên $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Khi đó, ta có:

$$\frac{\sqrt{28x^6}}{\sqrt{7x^4}} = \sqrt{\frac{28x^6}{7x^4}} = \sqrt{4x^2} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{x^2} = 2\,.\,(-x) = -2x.$$

b) $$\frac{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^3 x^3}}{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)x}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^3 x^3}{\left(2-\sqrt{3}\right)x}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 x^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\,.\,\sqrt{x^2}$$

$$= \left|2-\sqrt{3}\right|.\,|x| = \left(2-\sqrt{3}\right)x \text{ (vì } 2-\sqrt{3} > 0 \text{ và } x > 0\text{)}.$$

c) $$\sqrt{\frac{x^4y^2}{169x^2}} = \sqrt{\frac{x^2y^2}{169}} = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{\sqrt{169}} = \frac{\sqrt{(xy)^2}}{13} = \frac{|xy|}{13}.$$

d) $$\sqrt{\frac{225}{(x-6)^2}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{(x-6)^2}} = \frac{15}{|x-6|} = \frac{15}{6-x} \text{ (vì } x-6<0 \text{ khi } x<6\text{)}.$$

Ví dụ 4 Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{2\,023}{\sqrt{x-25}}$ với $x > 25$;

b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

d) $\dfrac{x-36}{\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 36$.

Giải

a) $$\frac{2\,023}{\sqrt{x-25}} = \frac{2\,023\sqrt{x-25}}{\sqrt{x-25}\,.\,\sqrt{x-25}} = \frac{2\,023\sqrt{x-25}}{x-25}.$$

b) $$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\,.\,\sqrt{5}\,.\,\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}$

$= \dfrac{5 - 2\sqrt{5\,.\,3} + 3}{5-3} = \dfrac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}.$

d) $\dfrac{x-36}{\sqrt{x}-6} = \dfrac{(x-36)\left(\sqrt{x}+6\right)}{\left(\sqrt{x}-6\right)\left(\sqrt{x}+6\right)} = \dfrac{(x-36)\left(\sqrt{x}+6\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 6^2}$

$= \dfrac{(x-36)\left(\sqrt{x}+6\right)}{x-36} = \sqrt{x} + 6.$

Ví dụ 5 Cho hai số không âm a, b. Chứng minh: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Áp dụng:

a) Cho $x + y = 10$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của xy.

b) Cho $xy = 5$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x + y$.

Giải

Với $a \geq 0$, $b \geq 0$, xét hiệu:

$$a + b - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\,.\,\sqrt{a}\,.\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

Ta có $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$ nên $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$. Do đó $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ hay $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, suy ra $a = b$.

a) Với $x \geq 0$, $y \geq 0$, ta có: $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Suy ra $2\sqrt{xy} \leq 10$ hay $\sqrt{xy} \leq 5$.

Do đó $xy \leq 25$. Vậy giá trị lớn nhất của xy là 25 khi $x = y = \dfrac{10}{2} = 5$.

b) Với $x \geq 0$, $y \geq 0$, ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Suy ra $x + y \geq 2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x + y$ là $2\sqrt{5}$ khi $x = y = \sqrt{5}$.

C. BÀI TẬP

31. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{25 - 10x + x^2}$ với $x \leq 5$;

b) $\sqrt{\left(9 + 12x + 4x^2\right)^2}$;

c) $\sqrt{(3x+1)^6}$ với $x \geq -\dfrac{1}{3}$;

d) $\sqrt{\dfrac{49x^2(x+5)^2}{16}}$ với $x \geq 0$.

32. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích và một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{98x^2}\,.\,\sqrt{y^3}$ với $x < 0, y \geq 0$;

b) $\sqrt{x^3(x-1)^2}$ với $x \geq 1$;

c) $\sqrt{x^4}\,.\,\sqrt{(x-7)^2}$ với $x > 7$;

d) $\sqrt{\dfrac{x^2}{36-12x+x^2}}$ với $x > 6$;

e) $\dfrac{\sqrt{1\,250(x-5)^3}}{\sqrt{2(x-5)^5}}$ với $x < 5$;

g) $\sqrt{\dfrac{1+x-2\sqrt{x}}{1+x+2\sqrt{x}}}$ với $x \geq 0$.

33. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

c) $\dfrac{8}{3\sqrt{5}+3}$;

d*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$.

34. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3x-1}}$ với $x > \dfrac{1}{3}$;

b) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$;

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ với $x \geq 0, x \neq 7$;

d) $\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

35. Chứng minh:

a) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{13-\sqrt{5}}{2}$;

b) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x-y$ với $x > 0, y > 0, x \neq y$.

36. a) Cho biểu thức:

$$A=\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}.$$

Chứng minh: $A = 5$.

b*) Cho biểu thức: $B=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Chứng minh: $B=\sqrt{6}$.

37. a) Cho biểu thức: $C = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{25}}$.

Chứng minh: $C > \frac{24}{5}$.

b*) Cho biểu thức: $D = \left(\frac{y-2}{y+2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}+2}\right) \cdot \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}$ với $y > 0, y \neq 1$.

Chứng minh: $D = \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}}$.

38. Cho biểu thức: $M = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị của biểu thức M tại $x = \frac{4}{9}$.

c*) Tìm giá trị của x để $|M| = \frac{1}{3}$.

39. Cho biểu thức: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức N.

b*) Tìm giá trị nhỏ nhất của N.

40. Cho biểu thức: $P = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = 4$.

c*) Tìm giá trị của x để P có giá trị là số nguyên.

41*. Tìm x, biết:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{9x} + 24\sqrt{\frac{x}{64}} = -17$ với $x \geq 0$;

b) $\sqrt{\frac{x}{5}} = 4$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{25x^2} = 10$;

d) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$;

e) $2 - \sqrt[3]{5-x} = 0$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

42. Đưa thừa số vào dấu căn bậc hai của $3\sqrt{5}$ ta được

A. $\sqrt{15}$. **B.** 15. **C.** $\sqrt{45}$. **D.** 45.

43. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $-2\sqrt{2}$.

44. Nếu $x^3 = -2$ thì x bằng

A. -8. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt[3]{2}$. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

45. So sánh:

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{36+16}$ và $\sqrt{36}+\sqrt{16}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ và $2\sqrt{\dfrac{1}{15}}$;

d*) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ và 1.

46. Tốc độ lăn v (m/s) của vật thể có khối lượng m (kg) chịu tác động từ lực E_k (J) được cho bởi công thức $v=\sqrt{\dfrac{2E_k}{m}}$.

a) Tính tốc độ lăn của quả bóng nặng 3 kg khi một người tác động lực $E_k = 18$ J lên quả bóng.

b) Muốn lăn một quả bóng 3 kg với tốc độ 6 m/s thì cần tác động lực bao nhiêu jun lên quả bóng đó?

47. Rút gọn biểu thức:

a) $\left(5\sqrt{\dfrac{1}{5}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)\sqrt{5}$;

b) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}-\sqrt{\dfrac{9}{7}}+\sqrt{7}\right):\sqrt{7}$;

c) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$;

d) $\dfrac{\sqrt{312^2-191^2}}{\sqrt{503}}$;

e) $\sqrt{27\,.\,(1-\sqrt{3})^4}:3\sqrt{15}$;

g*) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}-\sqrt[3]{54}\,.\,\sqrt[3]{4}$.

48*. Cho biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 121$.

c) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$.

d) Tìm giá trị của x để $A = \sqrt{x} - 1$.

49. Cho biểu thức:

$$B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > 0.$$

a) Rút gọn biểu thức B.

b*) Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c*) Tìm giá trị của $x \in \mathbb{N}^*$ để B có giá trị là số nguyên.

50. Cho biểu thức:

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức C.

b*) Tìm giá trị lớn nhất của C.

c*) Tìm giá trị của x để C có giá trị là số dương.

51*. Tìm x, biết:

a) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$ với $x \geq 0$;

b) $\sqrt{9x^2} = |-18|$;

c) $x^2 - 8 = 0$;

d) $\sqrt{x^2 - 49} - \sqrt{x-7} = 0$ với $x \geq 7$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Phát biểu ở các câu b, c, d là đúng. Phát biểu ở câu a là sai.

2. a) 12 và – 12. b) 1,6 và – 1,6. c) $\frac{13}{9}$ và $-\frac{13}{9}$.

3. a) 7. b) – 0,8. c) $\frac{3}{5}$.

4. a) $\sqrt{41} > 6$. b) $\sqrt{0,82} > 0,9$. c) $\sqrt{\frac{6}{7}} < \sqrt{\frac{7}{6}}$.

d) $\sqrt[3]{-65} < \sqrt[3]{-64}$. e) $\sqrt[3]{3,03} < \sqrt[3]{3,3}$. g) $-8 > \sqrt[3]{-888}$.

5. a) Ta có: $\left(\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024}\right)\left(\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}\right)$

$= \left(\sqrt{2\,025}\right)^2 - \left(\sqrt{2\,024}\right)^2 = 2\,025 - 2\,024 = 1.$

Vậy $\left(\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024}\right)\left(\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}\right) = 1$.

b) Ta có: $\left(\sqrt[3]{3} - 1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3} + 1\right] = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 - 1^3 = 3 - 1 = 2.$

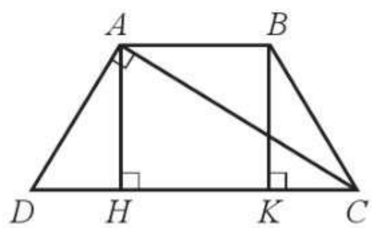
Vậy $\left(\sqrt[3]{3} - 1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{3} + 1\right] = 2$.

c) Ta có: $\left(\sqrt{3} - 2\right)^2\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 = \left[\left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right)\right]^2$

$= \left[\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2^2\right]^2 = (3 - 4)^2 = (-1)^2 = 1.$

Vậy $\left(\sqrt{3} - 2\right)^2\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 = 1$.

6. Kẻ AH, BK vuông góc với CD lần lượt tại H, K (*Hình 5*). Khi đó, ta chứng minh được $ABKH$ là hình chữ nhật. Suy ra $HK = AB = 5$ cm.



Hình 5

Do $\Delta ADH = \Delta BCK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $HD = KC = \dfrac{CD - HK}{2} = 3$ cm.

Do $\Delta ACD \backsim \Delta HAD$ nên $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{AD}{HD}$ hay $AD^2 = CD \,.\, HD$. Suy ra

$$AD = \sqrt{CD \,.\, HD} = \sqrt{33} \text{ cm}.$$

7. Áp dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông OAB, OBC, OCD, ODE, OEG, ta tính được $OB = \sqrt{8}$ cm, $OC = \sqrt{12}$ cm, $OD = 4$ cm, $OE = \sqrt{20}$ cm, $OG = \sqrt{24}$ cm.

8. a) Thay $v = 9$ (km/h) vào $\sqrt{f} = \sqrt{v} - 1,3$, ta được: $\sqrt{f} = \sqrt{9} - 1,3 = 1,7$. Suy ra $f = (1,7)^2 = 2,89$ (km/h).

Vậy tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông khi đó là 2,89 km/h.

b) Thay $f = 20,25$ (km/h) vào $\sqrt{f} = \sqrt{v} - 1,3$, ta được: $\sqrt{20,25} = \sqrt{v} - 1,3$ hay $\sqrt{v} = 5,8$. Suy ra $v = (5,8)^2 = 33,64$ (km/h).

Vậy tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông khi đó là 33,64 km/h.

9. Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $4,8 \,.\, 3 \,.\, 15 = 216$ (dm^3).

Gọi a (dm) là độ dài cạnh của hình lập phương với $a > 0$. Khi đó, ta có: $a^3 = 216$.

Suy ra $a = \sqrt[3]{216} = 6$ (dm).

Vậy độ dài cạnh của hình lập phương là 6 dm.

10. Quãng đường anh An đi từ nhà đến trường là: $4 \cdot \dfrac{15}{60} = 1$ (km).

Quãng đường em Bình đi từ nhà đến trường là: $3 \cdot \dfrac{12}{60} = 0,6$ (km).

Do tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + (0,6)^2 = 1,36$ hay $BC = \sqrt{1,36} \approx 1,17$ (km). Vậy khoảng cách BC giữa hai trường xấp xỉ 1,17 km.

11. a) 18. b) $4 - \sqrt{11}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

d*) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{2^2 + 2\,.\,2\,.\,\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 + \sqrt{5}\right| = 2 + \sqrt{5}$.

12. a) $\dfrac{33}{10}$. b) 153. c) 240.

d) $\sqrt{\sqrt{7} + 3}\,.\,\sqrt{3 - \sqrt{7}} = \sqrt{\left(\sqrt{7} + 3\right)\left(3 - \sqrt{7}\right)} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9 - 7} = \sqrt{2}$.

13. a) $\dfrac{11}{7}$. b) $\dfrac{1}{7}$. c) 5.

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4^4\,.\,2^3}} = \sqrt{\dfrac{8}{4^4\,.\,2^3}} = \sqrt{\dfrac{2^3}{\left(2^2\right)^4\,.\,2^3}} = \sqrt{\dfrac{1}{\left(2^4\right)^2}} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

14. a) $\dfrac{1}{3}$. b) $\dfrac{11}{9}$.

c) $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

d*) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2.1.\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5}$

$= \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 1 - \sqrt{5}.$

15. a) $\dfrac{\sqrt{1\,404}}{\sqrt{351}} > \sqrt{\dfrac{98}{25}}.$ b) $\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{1}{6}} > 6\sqrt{\dfrac{1}{35}}.$ c) $-5\sqrt{8} < -\sqrt{190}.$

d) Ta có: $16 = \sqrt{256}$; $\sqrt{15}\,.\,\sqrt{17} = \sqrt{15\,.\,17} = \sqrt{255}.$

Do $256 > 255$ nên $\sqrt{256} > \sqrt{255}$ hay $16 > \sqrt{15}\,.\,\sqrt{17}.$

16. Ta có: $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$; $3\sqrt{4} = \sqrt{36}$; $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$; $5\sqrt{4} = \sqrt{100}$; $3\sqrt{6} = \sqrt{54}$. Do $36 < 48 < 54 < 80 < 100$ nên $\sqrt{36} < \sqrt{48} < \sqrt{54} < \sqrt{80} < \sqrt{100}$ hay

$$3\sqrt{4} < 4\sqrt{3} < 3\sqrt{6} < 4\sqrt{5} < 5\sqrt{4}.$$

Vậy ta có sắp xếp theo thứ tự tăng dần là: $3\sqrt{4}$; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{6}$; $4\sqrt{5}$; $5\sqrt{4}$.

17. Học sinh tự làm.

18. a) 0. b) 11. c) 32. d) $6 - \sqrt{15}$.

19. Ta có: $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\,.\,\sqrt{2}\,.\,1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2} - 1;$

$b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\,.\,\sqrt{2}\,.\,1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2} + 1.$

a) $a - b = (\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}+1) = -2.$

Vậy $a - b$ là một số nguyên.

b) $ab = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2 - 1 = 1.$

Vậy ab là một số tự nhiên.

20. a) Ta có: $(\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023})(\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023}) = 2\,024 - 2\,023 = 1$. Suy ra $\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023}}.$

Tương tự, ta chứng minh được $\sqrt{2\,023} - \sqrt{2\,022} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,023} + \sqrt{2\,022}}.$

Do $\sqrt{2\,024} > \sqrt{2\,022}$ nên $\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023} > \sqrt{2\,023} + \sqrt{2\,022}.$

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{2\,024} + \sqrt{2\,023}} < \dfrac{1}{\sqrt{2\,023} + \sqrt{2\,022}}$ hay

$\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023} < \sqrt{2\,023} - \sqrt{2\,022}.$

b) Với $a > 0$, $b > 0$, ta có: $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$; $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.
Do $a + b < a + b + 2\sqrt{ab}$ nên $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$. Mặt khác, ta lại có $\sqrt{a+b} > 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ nên $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

21. Tốc độ của vệ tinh đó là:

$$\sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{15,92796 \cdot 10^{6}}} = \sqrt{2,5 \cdot 10^{7}} = \sqrt{25 \cdot 10^{6}} = 5\,000 \text{ (m/s)}.$$

22. Gọi x (cm) là độ dài cạnh của hình vuông với $x > 0$. Khi đó, độ dài đường chéo của hình vuông đó là $x\sqrt{2}$ (cm). Ta lập được phương trình: $x\sqrt{2} - x = 4$. Giải phương trình, ta tìm được $x = \dfrac{4}{\sqrt{2}-1} = 4\left(\sqrt{2}+1\right)$ (thoả mãn $x > 0$). Vậy độ dài cạnh của hình vuông đó là $4\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm.

23. a) 28 m. b) 2,56 m/s^2.

24. Học sinh tự làm.

25. a) $x \geq -2\,024$. b) $x \leq \dfrac{1}{7}$. c) $x \neq 0$. d) $x < \dfrac{1}{2}$.

e) $x \in \mathbb{R}$. g) $x \neq 32$. h) $x \neq -3$. i) $x \in \mathbb{R}$.

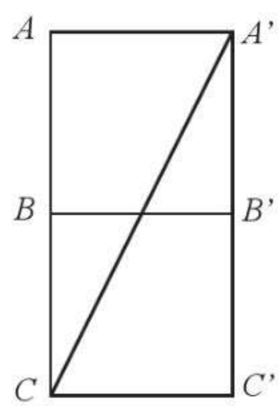
26. a) Khoảng 105 V.

b) Thay $U = 110$ (V) và $R = 88$ (Ω) vào $U = \sqrt{P \cdot R}$, ta tính được $P = 137,5$ (W). Do $137,5 > 100$ nên công suất tiêu thụ của bóng đèn B lớn hơn công suất tiêu thụ của bóng đèn A.

27. a) 36 km/h. b) 9 m.

28. Giả sử chất điểm đó di chuyển qua các mặt $ABB'A'$ và $BCC'B'$ của hình lập phương (các trường hợp khác tương tự). *Hình 6* là hình khai triển của các mặt $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Do tam giác $AA'C$ vuông tại A nên $A'C^2 = AA'^2 + AC^2$.

Suy ra $A'C^2 = AA'^2 + (AB + BC)^2 = 1^2 + (1 + 1)^2 = 5$. Do đó $A'C = \sqrt{5}$ (dm). Vậy quãng đường ngắn nhất mà chất điểm đó di chuyển là $\sqrt{5}$ dm.



Hình 6

29. a) Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{2}$. Khi đó, ta có $\sqrt{2x-1} \geq 0$ nên $5 + \sqrt{2x-1} \geq 5$ hay $A \geq 5$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 5 khi $2x - 1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$.

b) Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{2}{5}$. Khi đó, ta có $\sqrt{5x+2} \geq 0$ nên $-\sqrt{5x+2} \leq 0$. Suy ra $2\ 024 - \sqrt{5x+2} \leq 2\ 024$ hay $B \leq 2\ 024$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là 2 024 khi $5x + 2 = 0$ hay $x = -\frac{2}{5}$.

30*. Với $x \geq 0$, ta có:

a) $2\sqrt{x} = 14$
$\sqrt{x} = 7$
$x = 7^2$
$x = 49$;

b) $\sqrt{0,9x} = 6$
$0,9x = 6^2$
$0,9x = 36$
$x = 40$;

c) $\sqrt{25x} = \sqrt{3}$
$25x = 3$
$x = 0,12$;

d) $\sqrt{x} < 3$
$0 \leq x < 3^2$
$0 \leq x < 9$;

e) $\sqrt{x} > 1$
$x > 1^2 > 0$
$x > 1$;

g) $\sqrt{5x} \leq 6$
$0 \leq 5x \leq 6^2$
$0 \leq 5x \leq 36$
$0 \leq x \leq 7,2$.

31. a) $5 - x$. b) $(3 + 2x)^2$. c) $(3x + 1)^3$. d) $\frac{7x(x+5)}{4}$.

32. a) $-7xy\sqrt{2y}$. b) $x(x-1)\sqrt{x}$. c) $x^2(x-7)$.

d) $\frac{x}{x-6}$. e) $\frac{25}{5-x}$. g) $\frac{\left|1-\sqrt{x}\right|}{1+\sqrt{x}}$.

33. a) $\frac{2\sqrt{5}-5}{5}$. b) $3 + 2\sqrt{2}$. c) $\frac{2\sqrt{5}-2}{3}$.

d*)
$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}} = \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - \sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{7} + \left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - \sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{7} + \left(\sqrt[3]{7}\right)^2\right]}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3\,.\,7} + \sqrt[3]{7^2}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{7}\right)^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49}}{3+7}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49}}{10}.$$

34. a) $\frac{2\sqrt{3x-1}}{3x-1}$. b) $\sqrt{x}$. c) $\frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{7}}{x-7}$.

d) $\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1-\left(\sqrt{x}\right)^3}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left[1+\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2\right]}{1-\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}+x.$

35. Học sinh tự làm.

36. a) Ta có: $A=\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=3+\sqrt{8}-\sqrt{8}-\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{5}+2=5.$

Vậy $A=5$.

b*) Ta có: $B=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}+\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3-1}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3-1}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}.$

Vậy $B=\sqrt{6}$.

37. a) Do $2<3<4<...<24<25$ nên $\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{4}<...<\sqrt{24}<\sqrt{25}$. Suy ra

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}>\dfrac{1}{\sqrt{4}}>\cdots>\dfrac{1}{\sqrt{24}}>\dfrac{1}{\sqrt{25}}$. Do đó

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{24}}+\frac{1}{\sqrt{25}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{25}}+\frac{1}{\sqrt{25}}+\frac{1}{\sqrt{25}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{25}}+\frac{1}{\sqrt{25}}}_{\text{gồm 24 số hạng } \frac{1}{\sqrt{25}}}.$$

Vậy $C>24\cdot\dfrac{1}{\sqrt{25}}$ hay $C>\dfrac{24}{5}$.

b*) Ta có: $D=\left(\dfrac{y-2}{y+2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}+2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}=\dfrac{y-2+\sqrt{y}}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}+2\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}.$

Ta xét: $y-2+\sqrt{y}=(y-1)+\left(\sqrt{y}-1\right)=\left(\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)+\left(\sqrt{y}-1\right)$

$=\left(\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{y}+1+1\right)=\left(\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{y}+2\right).$

Do đó $D = \dfrac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}-1)} = \dfrac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}}$.

Vậy $D = \dfrac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}}$.

38. a) $M = \dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}$. b) Giá trị của biểu thức M tại $x = \dfrac{4}{9}$ là $\dfrac{-3}{5}$.

c*) Với $x \geq 0$, $x \neq 1$, để $|M| = \dfrac{1}{3}$ thì $\left|\dfrac{-1}{\sqrt{x}+1}\right| = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $|\sqrt{x}+1| = 3$. Mà $\sqrt{x} + 1 > 0$, suy ra $\sqrt{x} + 1 = 3$ hay $\sqrt{x} = 2$. Do đó $x = 4$ (thoả mãn $x \geq 0$, $x \neq 1$).

Vậy $x = 4$ thì $|M| = \dfrac{1}{3}$.

39. a) $N = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b*) Ta có: $N = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Do $\sqrt{x} > 0$ và $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$ với $x > 0$ nên theo kết quả *Ví dụ 5* (trang 65), ta có: $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ hay $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$, suy ra $\sqrt{x} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 + 1$ hay $N \geq 3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của N là 3 khi $\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ hay $x = 1$ (thoả mãn $x > 0$).

40. a) $P = \dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$. b) Giá trị của biểu thức P tại $x = 4$ là $\dfrac{5}{3}$.

c*) Với $x \geq 0$, $x \neq 1$, ta có $\sqrt{x} + 1 \geq 1$ nên $\dfrac{5}{\sqrt{x}+1} > 0$ và $\dfrac{5}{\sqrt{x}+1} \leq 5$. Do đó $0 < P \leq 5$. Vì vậy, để P có giá trị là số nguyên thì $P \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Nếu $P = 1$ thì $\dfrac{5}{\sqrt{x}+1} = 1$. Suy ra $\sqrt{x} + 1 = 5$ hay $\sqrt{x} = 4$. Do đó $x = 4^2$ hay $x = 16$ (thoả mãn $x \geq 0$, $x \neq 1$). Tương tự với các trường hợp còn lại, ta tìm được $x = \dfrac{9}{4}$; $x = \dfrac{4}{9}$; $x = \dfrac{1}{16}$; $x = 0$ đều thoả mãn $x \geq 0$, $x \neq 1$.

Vậy $x \in \left\{16; \dfrac{9}{4}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{1}{16}; 0\right\}$ thì P có giá trị là số nguyên.

41*. a) $x = 289$. b) $x = 80$. c) $x = 2$ hoặc $x = -2$.

d) $x = 2$ hoặc $x = -1$. e) $x = -3$.

42. C. **43.** D. **44.** C.

45. a) $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$. b) $\sqrt{36+16} < \sqrt{36} + \sqrt{16}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{60}} < 2\sqrt{\dfrac{1}{15}}$.

d*) Xét hiệu: $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 7 - 2\sqrt{12} = \sqrt{49} - \sqrt{48}$. Do $\sqrt{49} - \sqrt{48} > 0$ nên $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 > 1$. Mà $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 0$, suy ra $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 1$.

46. a) $2\sqrt{3}$ m/s. b) 54 J.

47. a) 5. b) $\dfrac{5}{7}$. c) $\dfrac{1}{6}$. d) 11. e) $\dfrac{4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{5}$.

g*) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}\,.\,\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\dfrac{135}{5}} - \sqrt[3]{54\,.\,4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{216} = 3 - 6 = -3$.

48*. a) Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.$$

Ta xét: $2x - 3\sqrt{x} + 1 = \left(2x - 2\sqrt{x}\right) - \left(\sqrt{x}-1\right) = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}-1\right)$

$$= \left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right).$$

Do đó $A = \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

b) Giá trị của biểu thức A tại $x = 121$ là $\dfrac{21}{12}$.

c) Để $A = \dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$. Mà $\sqrt{x} + 1 > 0$, suy ra $2\left(2\sqrt{x}-1\right) = \sqrt{x} + 1$ hay $\sqrt{x} = 1$. Do đó $x = 1$ (không thoả mãn $x \geq 0, x \neq 1$).

Vậy không có giá trị nào của x để $A = \dfrac{1}{2}$.

d) Để $A = \sqrt{x} - 1$ thì $\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1$. Mà $\sqrt{x} + 1 > 0$, suy ra

$$2\sqrt{x} - 1 = \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) \text{ hay } 2\sqrt{x} - 1 = x - 1.$$

Do đó $x-2\sqrt{x}=0$ hay $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)=0$. Suy ra $\sqrt{x}=0$ hoặc $\sqrt{x}=2$. Vì vậy $x=0$ (thoả mãn $x\geq 0, x\neq 1$) hoặc $x=4$ (thoả mãn $x\geq 0, x\neq 1$).

Vậy $x=0$ hoặc $x=4$ thì $A=\sqrt{x}-1$.

49. a) $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$.

b*) Ta có: $x=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Suy ra $\sqrt{x}=\sqrt{2}-1$.

Do đó giá trị của biểu thức B tại $x=3-2\sqrt{2}$ là:

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)-2}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3}{2-1}=-1-2\sqrt{2}.$$

c*) Ta có: $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Với $x\in\mathbb{N}^*$ thì B có giá trị là số nguyên khi $2\ \vdots\ \sqrt{x}$. Mà $\sqrt{x}>0$ với $x>0$, suy ra $\sqrt{x}=1$ hoặc $\sqrt{x}=2$. Do đó $x=1$ hoặc $x=4$ (đều thoả mãn $x>0$).

Vậy $x\in\{1; 4\}$ thì B có giá trị là số nguyên.

50. a) $C=\sqrt{x}-x$.

b*) Ta có: $C=\sqrt{x}-x=\dfrac{1}{4}-\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}-\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Với $x\geq 0, x\neq 1$, ta có: $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\geq 0$ hay $\dfrac{1}{4}-\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{1}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của C là $\dfrac{1}{4}$ khi $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$ hay $x=\dfrac{1}{4}$ (thoả mãn $x\geq 0, x\neq 1$).

c*) Ta có: $C=\sqrt{x}-x=\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$. Do $\sqrt{x}\geq 0$ với $x\geq 0$ nên $C>0$ khi $\sqrt{x}>0$ và $1-\sqrt{x}>0$ hay $x>0$ và $\sqrt{x}<1$. Suy ra $x>0$ và $x<1$.

Vậy $0<x<1$ thì C có giá trị là số dương.

51*. a) $x=\dfrac{12}{5}$. b) $x=6$ hoặc $x=-6$. c) $x=2\sqrt{2}$ hoặc $x=-2\sqrt{2}$.

d) Ta có: $\sqrt{x^2-49}-\sqrt{x-7}=\sqrt{(x-7)(x+7)}-\sqrt{x-7}$

$=\sqrt{x-7}\,.\,\sqrt{x+7}-\sqrt{x-7}$ (vì $x\geq 7$ hay $x-7\geq 0$)

$=\sqrt{x-7}\left(\sqrt{x+7}-1\right)$.

Do đó $\sqrt{x^2-49}-\sqrt{x-7}=0$ khi $\sqrt{x-7}=0$ hoặc $\sqrt{x+7}-1=0$. Suy ra $x=7$ (thoả mãn $x\geq 7$) hoặc $x=-6$ (không thoả mãn $x\geq 7$).

Vậy $x=7$.

Chương IV
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

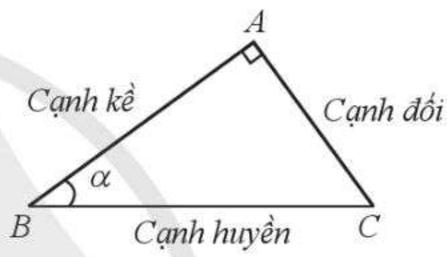
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Cho góc nhọn α. Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha$ (*Hình 1*).

– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là ***sin*** của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$.

– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là ***côsin*** của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$.



Hình 1

– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là ***tang*** của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$.

– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là ***côtang*** của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$.

Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Hai góc nhọn có tổng bằng 90° được gọi là hai góc phụ nhau.

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt

Tỉ số lượng giác \ α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

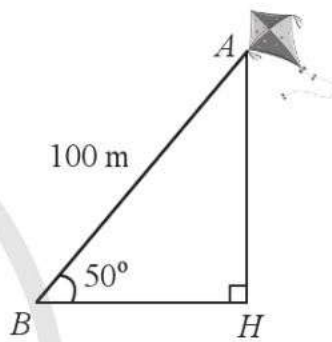
Tỉ số lượng giác \ α	30^o	45^o	60^o
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Tam giác vuông ABH mô tả hình ảnh một chiếc diều với dây thả dài 100 m, dây thả tạo với phương ngang một góc 50^o (*Hình 2*).

a) $\sin 50^o$ bằng tỉ số của hai đoạn thẳng nào?

b) Tính chiều cao AH của chiếc diều (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 2

Giải

a) Tam giác ABH vuông tại H nên $\sin 50^o = \frac{AH}{AB}$.

b) Do $\sin 50^o = \sin B = \frac{AH}{AB}$ nên

$$AH = AB\,.\,\sin 50^o = 100\,.\,\sin 50^o \approx 76{,}6\text{ (m)}.$$

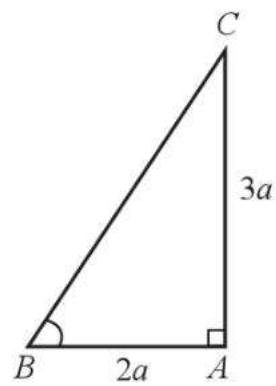
Vậy chiều cao AH của chiếc diều khoảng 76,6 m.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2a, AC = 3a$ (*Hình 3*).

a) Tính độ dài cạnh BC.

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc B.

c) Tính số đo góc B (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 3

Giải

a) Do tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (theo định lí Pythagore). Suy ra $BC^2 = (2a)^2 + (3a)^2 = 13a^2$. Do đó $BC = \sqrt{13a^2} = a\sqrt{13}$.

b) Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3a}{a\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}; \qquad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{2a}{a\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}; \qquad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

c) Do $\tan B = \frac{3}{2}$ nên $\widehat{B} \approx 56^\circ$.

Ví dụ 3 Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $\sin 45^\circ \,.\, \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$;

b) $1 + \tan^2 60^\circ$.

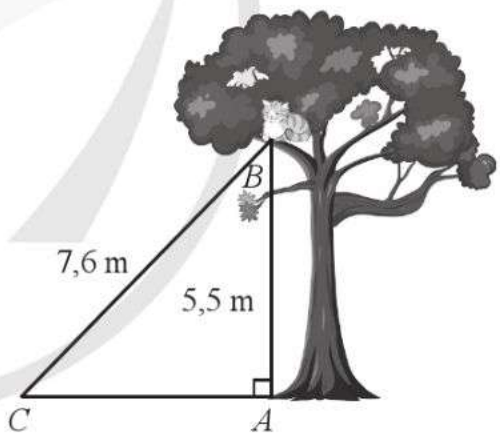
Giải

a) $\sin 45^\circ \,.\, \cos 45^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

b) $1 + \tan^2 60^\circ = 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4.$

C. BÀI TẬP

1. *Hình 4* mô tả một con mèo bị mắc kẹt ở vị trí B trên cành cây với độ cao $AB = 5{,}5$ m. Để đưa con mèo xuống, người ta cần phải đặt thang dựa vào cành cây đó. Khoảng cách từ chân thang đến điểm chạm vào cành cây là $BC = 7{,}6$ m. Góc giữa thang với phương nằm ngang là góc BCA. Tính các tỉ số lượng giác của góc BCA (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 4

2. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

3. Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, tính giá trị mỗi biểu thức sau:

a) $\dfrac{\sin 39^\circ}{\cos 51^\circ}$;

b) $\cos 37^\circ 30' - \sin 52^\circ 30'$;

c) $\tan 73^\circ - \cot 17^\circ$;

d) $\cot 44^\circ \,.\, \cot 46^\circ$.

4. Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $2 \sin 30^\circ - 2 \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$; b) $\sin 45^\circ + \cot 60^\circ . \cos 30^\circ$.

5. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 79^\circ + \cos^2 79$;

b) $B = \tan 73^\circ . \tan 37^\circ . \tan 53^\circ . \tan 17^\circ$;

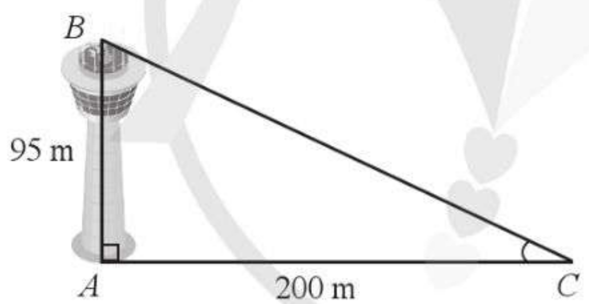
c) $C = \cos^2 73^\circ + \cos^2 53^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 37^\circ$;

d) $D = \sin 59^\circ + \cos 59^\circ - \sin 31^\circ - \cos 31^\circ$.

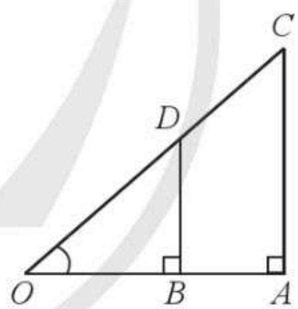
6. Sử dụng máy tính cầm tay để tính các tỉ số lượng giác của mỗi góc sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) 47°; b) $52^\circ 18'$; c) $63^\circ 36'$; d) $60^\circ 27' 46''$.

7. Một đài quan sát không lưu có độ cao là $AB = 95$ m. Ở một thời điểm nào đó vào ban ngày, Mặt Trời chiếu tạo bóng dài $AC = 200$ m trên mặt đất. Góc tạo bởi tia sáng Mặt Trời và phương nằm ngang là góc BCA (*Hình 5*). Tính số đo góc BCA (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



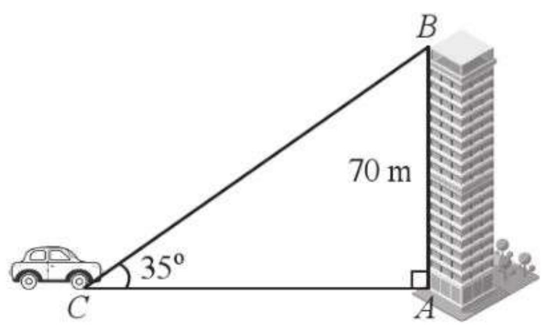
Hình 5



Hình 6

8. Cho *Hình 6* có $AB = 3$ cm, $CD = 4$ cm. Tính số đo góc AOC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

9. Từ vị trí B của toà nhà cao 70 m, một tia sáng chiếu xuống một ô tô đang đỗ tại vị trí C. Góc tạo bởi tia sáng và phương nằm ngang là $\widehat{ACB} = 35^\circ$ (*Hình 7*). Hỏi ô tô đỗ cách chân toà nhà (ở vị trí A) bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 7

§2 MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

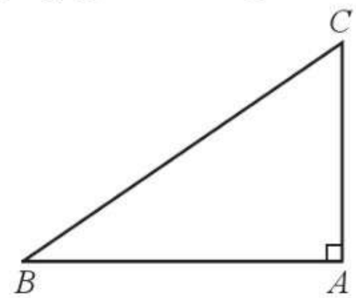
Tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với côsin của góc kề.

Trong *Hình 8*, ta có:

$AC = BC \,.\, \sin B = BC \,.\, \cos C$;

$AB = BC \,.\, \sin C = BC \,.\, \cos B$.



Hình 8

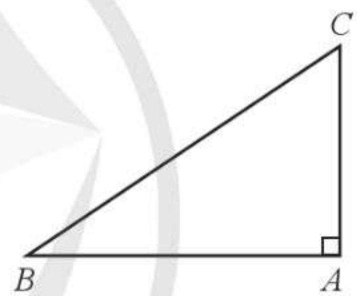
Tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông còn lại và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân với côtang của góc kề.

Trong *Hình 9*, ta có:

$AC = AB \,.\, \tan B = AB \,.\, \cot C$;

$AB = AC \,.\, \tan C = AC \,.\, \cot B$.



Hình 9

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Một chiếc thước thợ có dạng hình tam giác vuông. Khi sử dụng gặp sự cố nên phần góc vuông của chiếc thước đó bị gãy (*Hình 10*). Tính độ dài các cạnh góc vuông của chiếc thước ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét nếu cần).

Giải

Giả sử chiếc thước thợ có dạng là tam giác ABC vuông tại A (*Hình 11*).

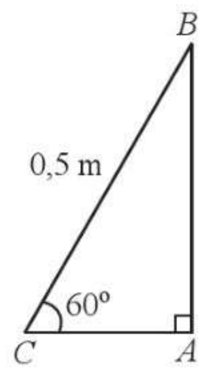
Vì tam giác ABC vuông tại A nên

$AB = BC \,.\, \sin C = 0{,}5 \,.\, \sin 60^o \approx 0{,}43$ (m);

$AC = BC \,.\, \cos C = 0{,}5 \,.\, \cos 60^o = 0{,}25$ (m).

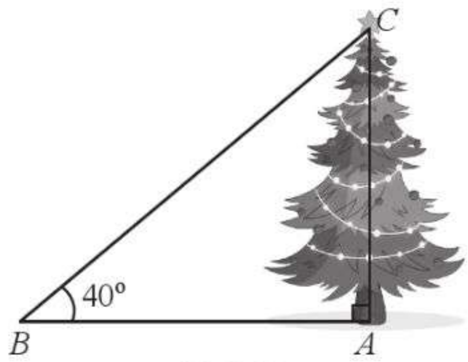
Vậy độ dài các cạnh góc vuông của chiếc thước ban đầu là khoảng 0,43 m và 0,25 m.

Hình 10



Hình 11

Ví dụ 2 Để trang trí một cây thông Noel cao 4 m, người ta dùng 10 đoạn dây bằng nhau có gắn đèn trang trí. Mỗi dây nối từ ngôi sao trên đỉnh cây xuống mặt đất và góc giữa mỗi dây với phương nằm ngang bằng 40^o (minh hoạ ở *Hình 12*). Tính số mét dây cần dùng để trang trí cây thông Noel đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 12

Giải

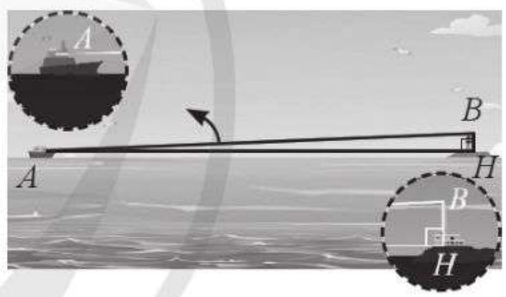
Ở *Hình 12*, độ dài mỗi đoạn dây có gắn đèn trang trí là BC, chiều cao của cây thông là $AC = 4$ m và góc giữa dây với phương nằm ngang là $\widehat{ABC} = 40^o$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC = BC \,.\, \sin B$.

Suy ra $BC = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{4}{\sin 40^o}$ (m).

Vậy số mét dây cần dùng để trang trí cây thông Noel đó là: $\dfrac{4}{\sin 40^o} \cdot 10 \approx 62{,}2$ (m).

Ví dụ 3 Từ điểm A trên một con tàu, người ta nhìn thấy đỉnh tháp hải đăng cao $BH = 40$ m theo một góc là $\widehat{BAH} = 2^o10'$ (*Hình 13*). Tính khoảng cách AH từ con tàu đến tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 13

Giải

Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$$AH = BH \,.\, \cot \widehat{BAH} = 40 \,.\, \cot 2^o10' \approx 1\,057 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách AH từ con tàu đến tháp hải đăng là khoảng 1 057 m.

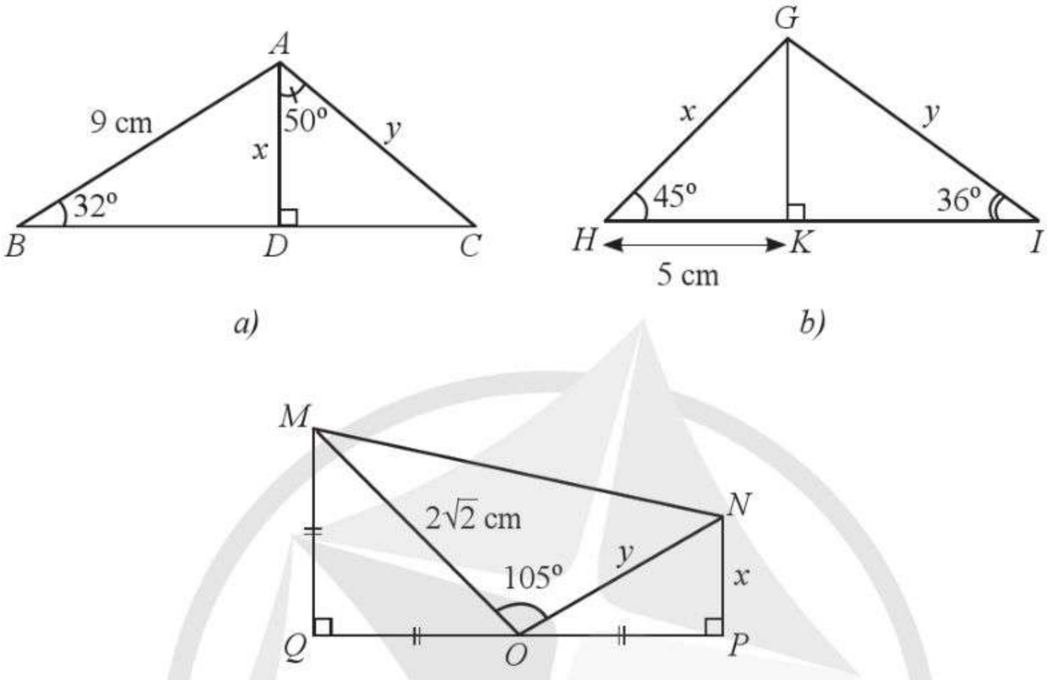
C. BÀI TẬP

10. Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = \dfrac{5}{13}AB$. Tính $\sin A$ và $\tan B$.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 21$ cm, $\widehat{C} = 47^o$. Tính độ dài đường phân giác BD của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimét).

12. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$. Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimét).

13. Tìm x, y trong mỗi hình *14a*, *14b*, *14c* (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).



a) *b)* *c)*

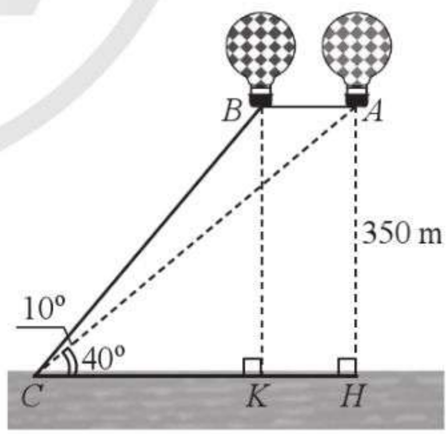
Hình 14

14. Chứng minh diện tích của tam giác đều cạnh a là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh:

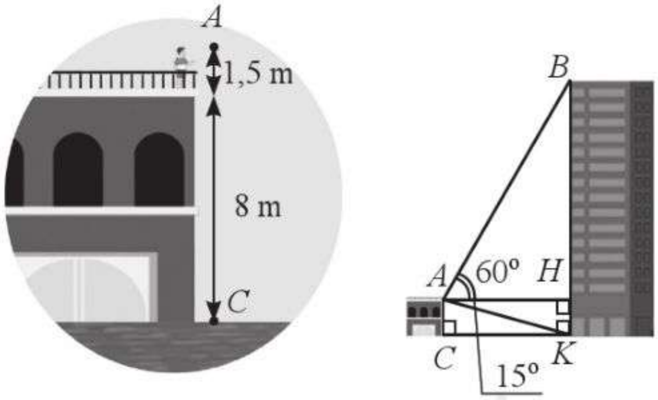
$$\tan\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

16. Hai khinh khí cầu được thả lên cùng độ cao là 350 m (ở hai vị trí A và B). Tại vị trí C trên mặt đất, người ta quan sát và đo được $\widehat{ACH} = 40^\circ$, $\widehat{ACB} = 10^\circ$ (*Hình 15*). Tính khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 15

17. Bạn Đức đứng trên nóc ngôi nhà ở độ cao 8 m. Vị trí mắt bạn Đức (tại vị trí A) cách nóc nhà 1,5 m. Bạn nhìn thấy vị trí B cao nhất của một toà nhà với góc tạo bởi tia AB và tia AH theo phương nằm ngang là $\widehat{BAH} = 60^\circ$. Bạn Đức cũng nhìn thấy vị trí K tại chân toà nhà đó với góc tạo bởi tia AK và tia AH là $\widehat{HAK} = 15^\circ$, AH vuông góc với BK tại H (*Hình 16*). Tính chiều cao BK của toà nhà (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 16

§3 ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn trong thực tế rất đa dạng và phong phú. Những ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn là:

– Ước lượng khoảng cách;

– Ước lượng độ dài.

B. VÍ DỤ

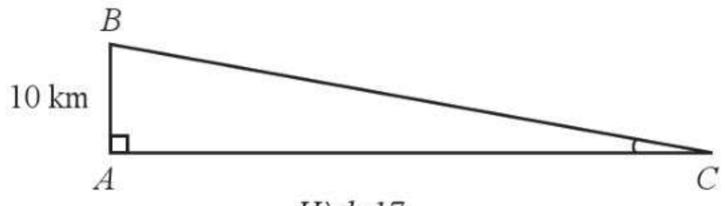
Ví dụ 1 Một máy bay đang bay ở độ cao 10 km so với mặt đất. Khi hạ cánh xuống mặt đất, đường bay của máy bay tạo một góc nghiêng so với phương nằm ngang.

a) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì khi máy bay cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

b) Nếu máy bay cách sân bay 350 km bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Giải

Hình 17 minh hoạ máy bay đang ở vị trí B, độ cao $AB = 10$ km và góc nghiêng so với phương nằm ngang là $\widehat{C}$.



Hình 17

a) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB = BC$. $\sin C$.

Suy ra $BC = \dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{10}{\sin 5^\circ} \approx 114{,}74$ (km).

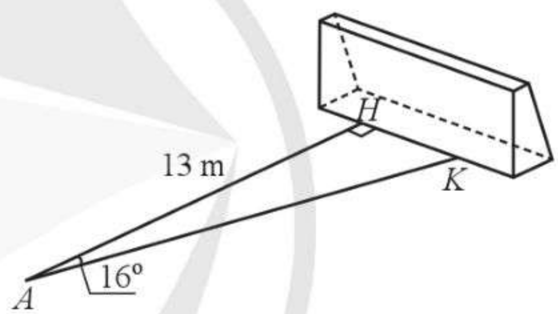
Vậy phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì khi máy bay cách sân bay khoảng 114,74 km phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh.

b) Trong tam giác ABC vuông tại A, ta có: $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{10}{350} = \dfrac{1}{35}$.

Suy ra $\widehat{C} \approx 1{,}64^\circ$.

Vậy khi máy bay cách sân bay 350 km bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng khoảng $1{,}64^\circ$.

Ví dụ 2 Một cầu thủ đứng ở vị trí A trước khung thành với khoảng cách $AH = 13$ m. Cầu thủ đó đá quả bóng nghiêng một góc là $\widehat{HAK} = 16^\circ$ (*Hình 18*). Tính khoảng cách từ cầu thủ tới vị trí K và độ dài HK (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 18

Giải

Vì tam giác AHK vuông tại H nên $\cos \widehat{HAK} = \dfrac{AH}{AK}$ và $HK = AH$. $\tan \widehat{HAK}$.

Suy ra $AK = \dfrac{AH}{\cos \widehat{HAK}} = \dfrac{13}{\cos 16^\circ} \approx 13{,}5$ (m) và $HK = 13$. $\tan 16^\circ \approx 3{,}7$ (m).

Vậy khoảng cách từ cầu thủ tới vị trí K và độ dài HK lần lượt khoảng 13, 5 m và 3,7 m.

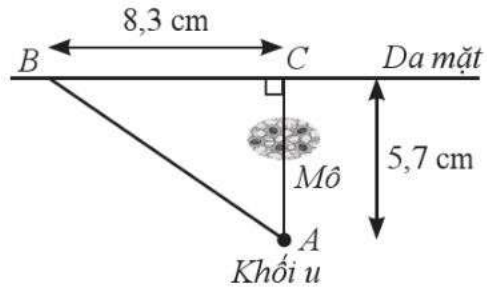
C. BÀI TẬP

18. Tính chiều cao của cột cờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết bóng của cột cờ được chiếu bởi ánh sáng Mặt Trời xuống mặt đất dài 10,5 m và góc tạo bởi tia sáng với phương nằm ngang là 36°.

19. Một khối u (ở vị trí A) của một bệnh nhân cách da mặt 5,7 cm, được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia (ở vị trí B) cách hình chiếu của khối u (ở vị trí C) trên da mặt là 8,3 cm (*Hình 19*).

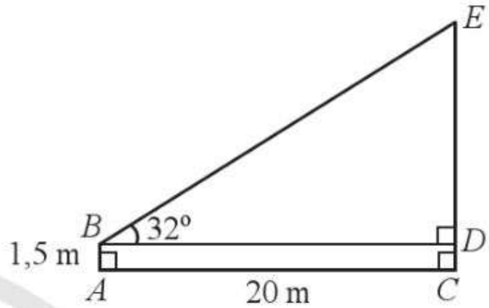
a) Hỏi góc tạo bởi chùm tia gamma với da mặt là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu centimét để đến được khối u (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



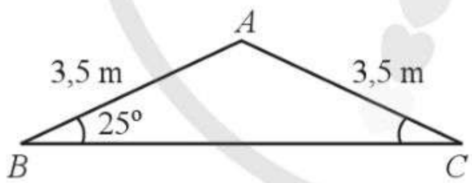
Hình 19

20. Một người đứng chào cờ (ở vị trí A) cách cột cờ (ở vị trí C) với $AC = 20$ m. Người đó đặt mắt tại vị trí B cách mặt đất một khoảng là $AB = 1,5$ m. Người đó nhìn lên đỉnh cột cờ (ở vị trí E) theo phương BE tạo với phương nằm ngang BD một góc là $\widehat{EBD} = 32^\circ$ (*Hình 20*). Tính chiều cao của cột cờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

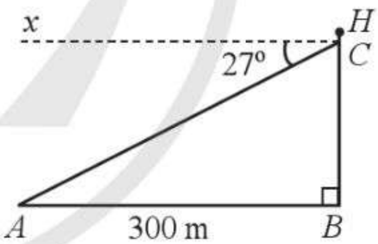


Hình 20

21. Bạn Hoà vẽ mặt cắt đứng phần mái của một ngôi nhà có dạng tam giác cân ABC (mái hai dốc). Biết rằng góc tạo bởi phần mái nhà và mặt phẳng nằm ngang là $\widehat{ABC} = 25^\circ$ và độ dài mỗi bên dốc mái là 3,5 m (*Hình 21*). Tính độ dài đoạn thẳng BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



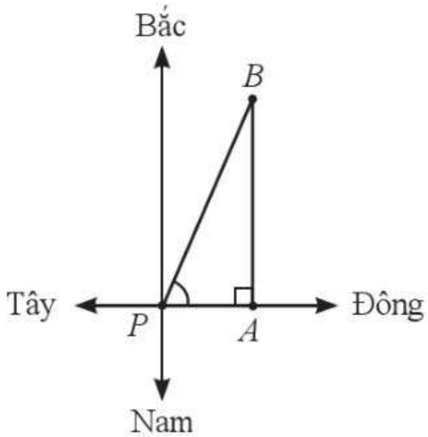
Hình 21



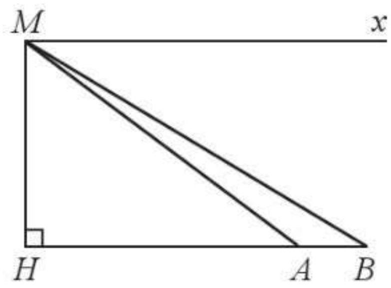
Hình 22

22. Trên mặt biển, khi khoảng cách từ ca nô đến chân tháp hải đăng là $AB = 300$ m, một người đứng trên tháp hải đăng đó, đặt mắt tại vị trí C và nhìn về phía ca nô theo phương CA tạo với phương nằm ngang Cx một góc là $\widehat{ACx} = 27^\circ$ (minh hoạ ở *Hình 22*). Tính chiều cao BH của tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết $AB \parallel Cx$ và độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh tháp hải đăng là $CH = 2,1$ m.

23. Một chiếc thuyền đi với tốc độ 20 km/h theo hướng Đông trong 1 giờ 30 phút từ vị trí P đến vị trí A. Sau đó, nó sẽ đi theo hướng Bắc với cùng tốc độ trong 3 giờ 30 phút đến vị trí B (*Hình 23*). Tính góc so với hướng Đông mà thuyền đi từ vị trí P đến vị trí B (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).



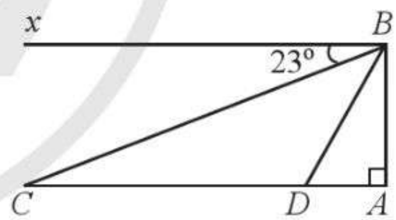
Hình 23



Hình 24

24. Từ một máy bay trực thăng, một người đặt mắt tại vị trí M ở độ cao $MH = 920$ m. Người đó nhìn hai vị trí A và B của hai đầu một cây cầu theo phương MA và MB tạo với phương nằm ngang Mx các góc lần lượt là $\widehat{AMx} = 37^\circ$ và $\widehat{BMx} = 31^\circ$ với $Mx \parallel AB$ (*Hình 24*). Hỏi độ dài AB của cây cầu là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

25. Từ một đài quan sát, một người đặt mắt tại vị trí B. Người đó nhìn thấy một chiếc ô tô ở vị trí C theo phương BC tạo với phương nằm ngang Bx một góc là $\widehat{CBx} = 23^\circ$ với $Bx \parallel AC$. Khi đó, khoảng cách giữa ô tô và chân đài quan sát là $AC = 1\,284$ m. Nếu ô tô từ vị trí C tiếp tục đi về phía chân đài quan sát với tốc độ 60 km/h thì sau 1 phút, người đó nhìn thấy ô tô ở vị trí D với góc $\widehat{DBx} = \alpha$ (*Hình 25*).



Hình 25

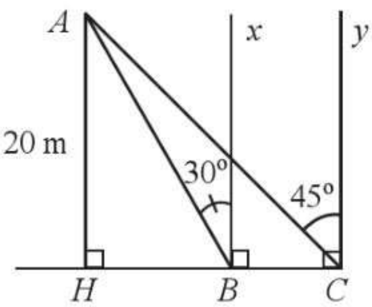
a) Tính chiều cao của đài quan sát (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét), biết độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh đài quan sát là 3 m.

b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

c) Tính khoảng cách từ mắt người quan sát đến vị trí D (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

26. Flycam là từ viết tắt của Fly camera. Đây là thiết bị bay không người lái có lắp camera hay máy ảnh để quay phim hoặc chụp ảnh từ trên cao. Một chiếc Flycam đang ở vị trí A cách cây cầu BC (theo phương thẳng đứng) một khoảng

$AH = 120$ m. Biết góc tạo bởi phương AB, AC với các phương vuông góc với mặt cầu tại B, C lần lượt là $\widehat{ABx} = 30^o$, $\widehat{ACy} = 45^o$ (*Hình 26*). Tính độ dài BC của cây cầu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



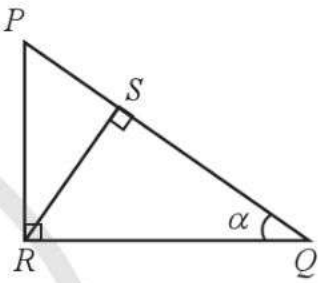
Hình 26

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

27. Cho tam giác PQR vuông tại R có đường cao RS và $\widehat{Q} = \alpha$ (*Hình 27*). Tỉ số lượng giác $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{PR}{RS}$. **B.** $\frac{PR}{QR}$.

C. $\frac{PS}{RS}$. **D.** $\frac{RS}{QR}$.

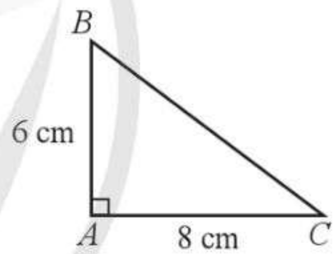


Hình 27

28. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm (*Hình 28*). Tỉ số lượng giác $\cot C$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.



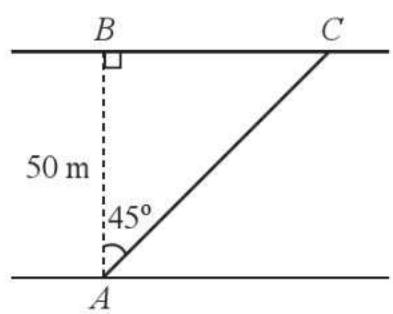
Hình 28

29. Một chiếc thang dài 6 m được đặt dựa vào tường và tạo với phương nằm ngang một góc 60^o. Khi đó, khoảng cách giữa chân thang và chân tường là

A. 3 m. **B.** $3\sqrt{3}$ m.

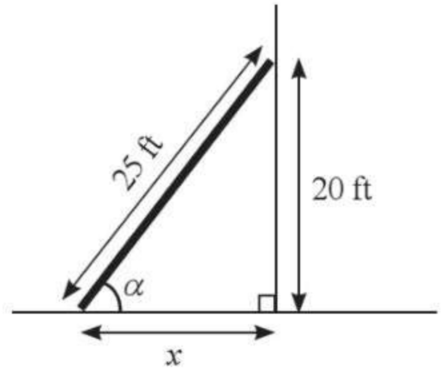
C. $3\sqrt{2}$ m. **D.** $2\sqrt{3}$ m.

30. Một con sông có bề rộng $AB = 50$ m. Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí A bên này bờ sông đến vị trí C bên kia bờ sông với góc tạo bởi phương AC và phương AB là $\widehat{BAC} = 45^o$ (*Hình 29*). Hỏi độ dài đoạn thẳng BC là bao nhiêu mét?



Hình 29

31. Một người lính cứu hoả dựng một chiếc thang dài 25 ft dựa vào tường với góc tạo bởi thang và phương nằm ngang là góc α. Biết đỉnh của chiếc thang cách mặt đất là 20 ft (*Hình 30*). Tính khoảng cách x từ chân thang đến chân tường và số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 30

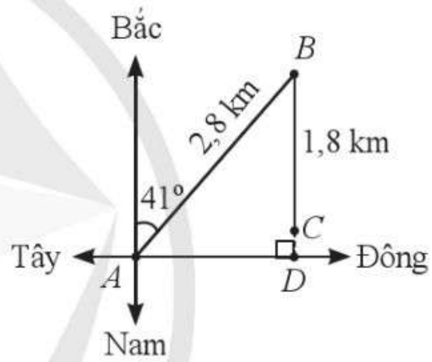
32. Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, tính giá trị mỗi biểu thức sau:

a) $\sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ$;

b) $\cot 20^\circ . \cot 40^\circ . \cot 50^\circ . \cot 70^\circ$.

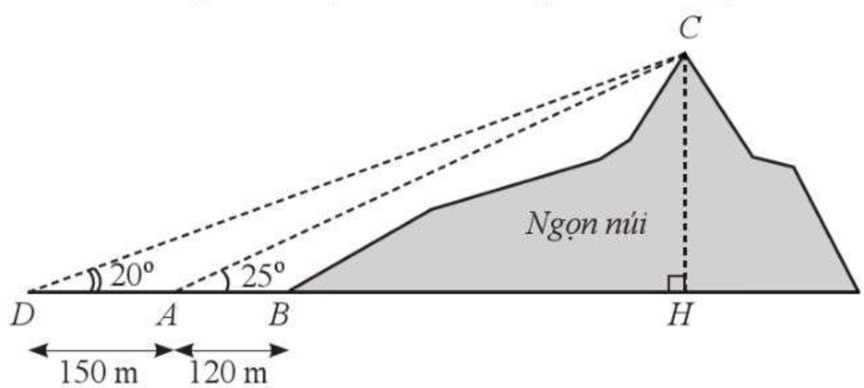
33. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^\circ$, $AB = 10$ cm, $AC = 15$ cm. Tính độ dài cạnh BC.

34. Một thuỷ thủ lái thuyền từ bờ (ở vị trí A) ra biển theo hướng Đông Bắc với góc nghiêng so với hướng Bắc là 41°. Đi được 2,8 km thì người đó phát hiện sắp hết nhiên liệu (ở vị trí B), vội quay thuyền vào bờ theo hướng Nam. Người đó đi tiếp được 1,8 km thì thuyền bị tắt máy (ở vị trí C) (*Hình 31*). Hỏi lúc đó thuyền còn cách bờ bao xa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của kilômét)?



Hình 31

35. Một người (ở vị trí A) đứng cách chân núi (ở vị trí B) là 120 m. Người này đo được góc tạo bởi phương AC và phương nằm ngang là $\widehat{BAC} = 25^\circ$ với vị trí C là đỉnh núi. Sau đó, người này di chuyển thêm 150 m ra phía xa ngọn núi hơn đến vị trí D và đo được góc tạo bởi phương DC và phương nằm ngang là $\widehat{BDC} = 20^\circ$ (*Hình 32*). Tính chiều cao CH của ngọn núi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 32

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Trong tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{27,51}$ (m); $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{BC} \approx 0,72$;

$\cos \widehat{BCA} = \dfrac{AC}{BC} \approx 0,69$; $\tan \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC} \approx 1,05$;

$\cot \widehat{BCA} = \dfrac{AC}{AB} \approx 0,95$.

2. Vì $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 3 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại A. Do $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau nên

$\sin B = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$; $\cos B = \sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$;

$\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $\cot B = \tan C = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. a) 1. b) 0. c) 0. d) 1.

4. a) 1. b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

5. Xét tam giác ABC vuông tại A với $\widehat{B} = \alpha$, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $\sin \alpha = \dfrac{AC}{BC}$ và $\cos \alpha = \dfrac{AB}{BC}$. Suy ra

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1.$$

a) $A = \sin^2 79^\circ + \cos^2 79 = 1$.

b) Do $73^\circ + 17^\circ = 90^\circ$; $37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$ nên

$B = \tan 73^\circ . \tan 37^\circ . \tan 53^\circ . \tan 17^\circ = (\tan 73^\circ . \tan 17^\circ)(\tan 37^\circ . \tan 53^\circ)$

$= (\tan 73^\circ . \cot 73^\circ)(\tan 37^\circ . \cot 37^\circ) = 1 . 1 = 1$.

c) $C = \cos^2 73^\circ + \cos^2 53^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 37^\circ$

$= (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 53^\circ + \cos^2 37^\circ)$

$= (\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ) = 1 + 1 = 2$.

d) Do $59^\circ + 31^\circ = 90^\circ$ nên

$$D = \sin 59^\circ + \cos 59^\circ - \sin 31^\circ - \cos 31^\circ$$
$$= (\sin 59^\circ - \cos 31^\circ) + (\cos 59^\circ - \sin 31^\circ)$$
$$= (\sin 59^\circ - \sin 59^\circ) + (\sin 31^\circ - \sin 31^\circ) = 0 + 0 = 0.$$

6. Học sinh tự làm.

7. Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\tan \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{95}{200} = 0{,}475$.

Suy ra $\widehat{BCA} \approx 25^\circ$.

8. Tam giác OAC có $BD \parallel AC$ (hai góc đồng vị bằng nhau) nên $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$.

Suy ra $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OA - OB}{OC - OD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{4}$.

Vì tam giác OAC vuông tại A nên $\cos \widehat{AOC} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{3}{4}$. Suy ra $\widehat{AOC} \approx 41^\circ$.

9. Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\tan \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC}$.

Suy ra $AC = \dfrac{AB}{\tan \widehat{ACB}} = \dfrac{70}{\tan 35^\circ} \approx 99{,}97$ (m).

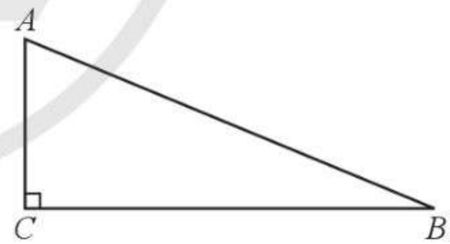
Vậy ô tô đỗ cách chân toà nhà khoảng 99,97 m.

10. (*Hình 33*)

Vì tam giác ABC vuông tại C nên

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \frac{12}{13}AB.$$

Vậy $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{13}$; $\tan B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{12}$.



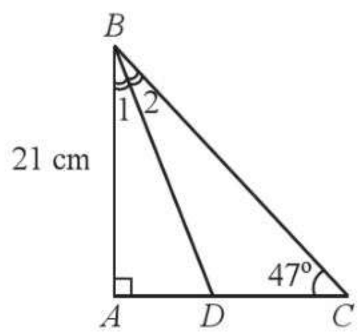
Hình 33

11. (*Hình 34*)

Do $\widehat{C} = 47^\circ$ nên ta tính được $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 21{,}5^\circ$.

Vì tam giác ABD vuông tại A nên $\cos B_1 = \dfrac{AB}{BD}$.

Suy ra $BD = \dfrac{AB}{\cos B_1} = \dfrac{21}{\cos 21{,}5^\circ} \approx 22{,}57$ (cm).



Hình 34

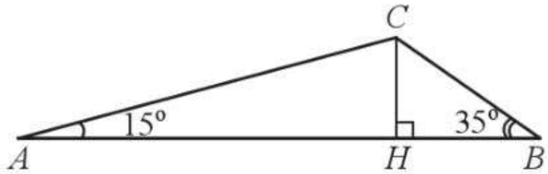
12. (*Hình 35*)

Vì tam giác ACH vuông tại H nên

$AH = CH \,.\, \cot \widehat{A} = CH \,.\, \cot 15^\circ$.

Vì tam giác BCH vuông tại H nên

$BH = CH \,.\, \cot \widehat{B} = CH \,.\, \cot 35^\circ$.



Hình 35

Mà $AH + BH = AB$, suy ra

$$CH = \frac{AB}{\cot 15^\circ + \cot 35^\circ} = \frac{6}{\cot 15^\circ + \cot 35^\circ} \approx 1{,}16 \text{ (cm)}.$$

13. a) $x \approx 4{,}8$ cm; $y \approx 7{,}4$ cm.

b) Ta chứng minh được tam giác GHK vuông cân tại K nên $GK = HK = 5$ cm. Từ đó, tính được $x \approx 7{,}1$ cm; $y \approx 8{,}5$ cm.

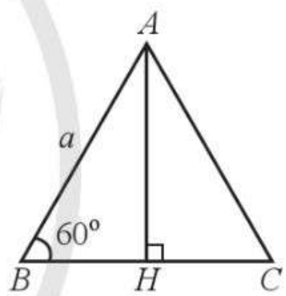
c) Tam giác MOQ vuông cân tại Q nên ta tính được $OP = OQ = MQ = 2$ cm; $\widehat{MOQ} = 45^\circ$; $\widehat{NOP} = 30^\circ$. Từ đó, tính được $x \approx 1{,}2$ cm; $y \approx 2{,}3$ cm.

14. Xét tam giác đều ABC cạnh a với đường cao AH.

Khi đó, ta có $AB = BC = a$ và $\widehat{B} = 60^\circ$ (*Hình 36*).

Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$$AH = AB \,.\, \sin \widehat{B} = a \,.\, \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

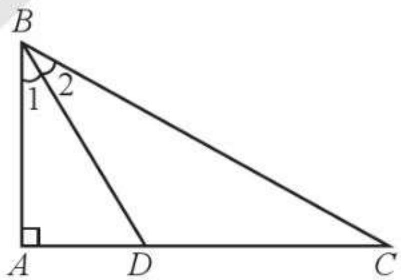


Hình 36

Vậy diện tích của tam giác ABC là:

$$\frac{1}{2} BC \,.\, AH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

15. Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC. Khi đó, ta có $\widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ (*Hình 37*).



Hình 37

Vì tam giác ABD vuông tại A nên $\tan B_1 = \dfrac{AD}{AB}$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{BC}$. Suy ra

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD + CD}{AB + BC} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

Vậy $\tan B_1 = \dfrac{AC}{AB + BC}$ hay $\tan \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{AC}{AB + BC}$.

16. Vì tam giác ACH vuông tại H nên $CH = AH \,.\, \cot \widehat{ACH} = 350 \,.\, \cot 40^{\circ}$.

Vì tam giác BCK vuông tại K nên $CK = BK \,.\, \cot \widehat{BCK} = 350 \,.\, \cot 50^{\circ}$.

Ta chứng minh được $ABKH$ là hình bình hành. Suy ra khoảng cách giữa hai khinh khí cầu là:

$$AB = HK = CH - CK = 350(\cot 40^{\circ} - \cot 50^{\circ}) \approx 123 \text{ (m)}.$$

17. Ta chứng minh được $ACKH$ là hình chữ nhật. Suy ra $HK = AC = 1,5 + 8 = 9,5$ (m).

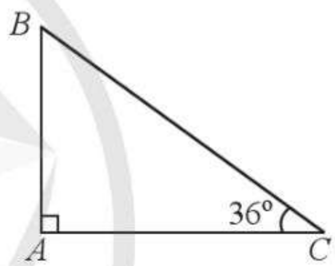
Vì tam giác AHK vuông tại H nên $AH = HK \,.\, \cot \widehat{HAK} = 9,5 \,.\, \cot 15^{\circ}$.

Vì tam giác AHB vuông tại H nên $BH = AH \,.\, \tan \widehat{BAH} = 9,5 \,.\, \cot 15^{\circ} \,.\, \tan 60^{\circ}$.

Chiều cao của toà nhà là:

$$BK = HK + BH = 9,5 + 9,5 \,.\, \cot 15^{\circ} \,.\, \tan 60^{\circ} \approx 70,9 \text{ (m)}.$$

18. Tam giác ABC vuông tại A ở *Hình 38* mô tả cột cờ AB có bóng nắng của cột cờ trên mặt đất là $AC = 10,5$ m và góc tạo bởi tia nắng với phương nằm ngang là $\widehat{ACB} = 36^{\circ}$.



Hình 38

Vì tam giác ABC vuông tại A nên

$$AB = AC \,.\, \tan \widehat{ACB} = 10,5 \,.\, \tan 36^{\circ} \approx 7,63 \text{ (m)}.$$

19. Theo đề bài, ta có: độ dài đường đi của chùm tia gamma tới khối u là AB; góc tạo bởi chùm tia gamma với da mặt là góc ABC.

a) Vì tam giác ABC vuông tại C nên $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5,7}{8,3} = \dfrac{57}{83}$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 34,5^{\circ}$. Vậy góc tạo bởi chùm tia gamma với da mặt xấp xỉ $34,5^{\circ}$.

b) Vì tam giác ABC vuông tại C nên

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(5,7)^2 + (8,3)^2} \approx 10,1 \text{ (cm)}.$$

20. Ta chứng minh được $ABDC$ là hình chữ nhật. Suy ra $CD = AB = 1,5$ m và $BD = AC = 20$ m.

Vì tam giác BDE vuông tại D nên $DE = BD \,.\, \tan \widehat{EBD} = 20 \,.\, \tan 32^{\circ}$.

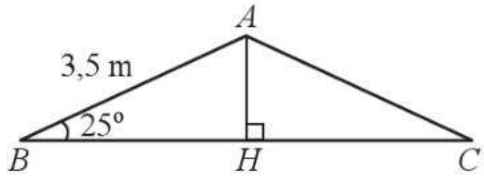
Vậy chiều cao của cột cờ là: $CE = CD + DE = 1,5 + 20 \,.\, \tan 32^{\circ} \approx 14$ (m).

21. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (*Hình 39*).

Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$$BH = AB \,.\, \cos \widehat{ABH} = 3,5 \,.\, \cos 25^o.$$

Do $\Delta ABH = \Delta ACH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $BH = CH$. Suy ra



Hình 39

$$BC = 2\,BH = 2 \,.\, 3,5 \,.\, \cos 25^o \approx 6,3 \text{ (m)}.$$

22. Do $AB \,//\, Cx$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{ACx} = 27^o$.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $BC = AB \,.\, \tan \widehat{BAC} = 300 \,.\, \tan 27^o$.

Chiều cao của tháp hải đăng là:

$$BH = BC + CH = 300 \,.\, \tan 27^o + 2,1 \approx 154,96 \text{ (m)}.$$

23. Đổi: 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ; 3 giờ 30 phút = 3,5 giờ.

Theo đề bài, ta có góc so với hướng Đông mà thuyền đi từ vị trí P đến vị trí B là góc APB.

Quãng đường PA là: $PA = 20 \,.\, 1,5 = 30$ (km).

Quãng đường AB là: $AB = 20 \,.\, 3,5 = 70$ (km).

Xét tam giác ABP vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{APB} = \dfrac{AB}{PA} = \dfrac{70}{30} = \dfrac{7}{3}$.

Suy ra $\widehat{APB} \approx 66^o48'$.

Vậy góc so với hướng Đông mà thuyền đi từ vị trí P đến vị trí B xấp xỉ $66^o48'$.

24. Do $Mx \,//\, AB$ nên $\widehat{HAM} = \widehat{AMx} = 37^o$; $\widehat{HBM} = \widehat{BMx} = 31^o$.

Vì tam giác AMH vuông tại H nên $AH = MH \,.\, \cot \widehat{HAM} = 920 \,.\, \cot 37^o$.

Vì tam giác BMH vuông tại H nên $BH = MH \,.\, \cot \widehat{HBM} = 920 \,.\, \cot 31^o$.

Mà $AB = BH - AH$, suy ra $AB = 920(\cot 31^o - \cot 37^o) \approx 310$ (m).

Vậy độ dài AB của cây cầu khoảng 310 m.

25. a) Do $Bx \,//\, AC$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{CBx} = 23^o$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB = AC \,.\, \tan \widehat{ACB} = 1\,284 \,.\, \tan 23^o \approx 545$ (m).

Vậy chiều cao của đài quan sát khoảng: 3 + 545 = 548 (m).

b) Đổi: 60 km/h = 1 000 m/phút.

Do $Bx \parallel AC$ nên ta tính được $\widehat{ABx} = 90^\circ$.

Quãng đường CD là: $CD = 1\,000 \,.\, 1 = 1\,000$ (m).

Suy ra $AD = AC - CD = 1\,284 - 1\,000 = 284$ (m).

Xét tam giác ABD vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{ABD} = \dfrac{AD}{AB} \approx \dfrac{284}{545}$.

Suy ra $\widehat{ABD} \approx 27^\circ 31'$.

Mà $\widehat{DBx} + \widehat{ABD} = \widehat{ABx} = 90^\circ$, suy ra $\alpha = 90^\circ - \widehat{ABD} \approx 90^\circ - 27^\circ 31' = 62^\circ 29'$.

c) Vì tam giác ABD vuông tại A nên $AB = BD \,.\, \cos \widehat{ABD}$. Suy ra

$$BD = \frac{AB}{\cos \widehat{ABD}} \approx \frac{545}{\cos 27^\circ 31'} \approx 615 \text{ (m)}.$$

26. Ta chứng minh được $AH \parallel Bx \parallel Cy$. Suy ra

$$\widehat{BAH} = \widehat{ABx} = 30^\circ \text{ và } \widehat{CAH} = \widehat{ACy} = 45^\circ.$$

Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$$BH = AH \,.\, \tan \widehat{BAH} = 120 \,.\, \tan 30^\circ = 40\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vì tam giác ACH vuông tại H nên

$$CH = AH \,.\, \tan \widehat{CAH} = 120 \,.\, \tan 45^\circ = 120 \text{ (m)}.$$

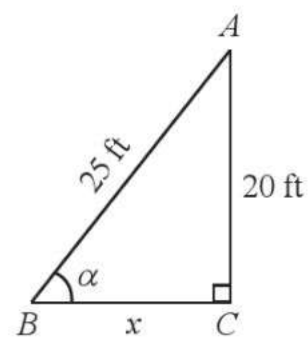
Vậy độ dài của cây cầu là: $BC = CH - BH = 120 - 40\sqrt{3} \approx 50{,}72$ (m).

27. D. **28. A.** **29. A.**

30. Vì tam giác ABC vuông tại B nên

$$BC = AB \,.\, \tan \widehat{BAC} = 50 \,.\, \tan 45^\circ = 50 \text{ (m)}.$$

31. Tam giác ABC vuông tại C ở *Hình 40* mô tả chiếc thang dài $AB = 25$ ft dựa vào tường với góc tạo bởi thang và phương nằm ngang là góc $\widehat{ABC} = \alpha$; đỉnh của chiếc thang cách mặt đất là $AC = 20$ ft; khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BC = x$.



Hình 40

Vì tam giác ABC vuông tại C nên

$$x = BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ (ft)};$$

$$\sin \alpha = \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \text{ suy ra } \alpha \approx 53^\circ.$$

32. a) Do $25^o + 65^o = 90^o$; $35^o + 55^o = 90^o$ nên

$\sin^2 25^o + \sin^2 35^o + \sin^2 55^o + \sin^2 65^o$

$= (\sin^2 25^o + \sin^2 65^o) + (\sin^2 35^o + \sin^2 55^o)$

$= (\sin^2 25^o + \cos^2 25^o) + (\sin^2 35^o + \cos^2 35^o) = 1 + 1 = 2.$

b) Do $20^o + 70^o = 90^o$; $40^o + 50^o = 90^o$ nên

$\cot 20^o . \cot 40^o . \cot 50^o . \cot 70^o$

$= (\cot 20^o . \cot 70^o)(\cot 40^o . \cot 50^o)$

$= (\tan 70^o . \cot 70^o)(\tan 50^o . \cot 50^o) = 1 . 1 = 1.$

33. Kẻ đường cao BH của tam giác ABC (*Hình 41*).

Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$BH = AB . \sin \widehat{A} = 10 . \sin 70^o \approx 9,397$ (cm);

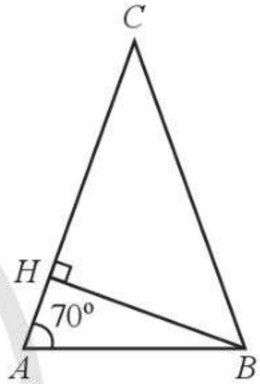
$AH = AB . \cos \widehat{A} = 10 . \cos 70^o \approx 3,42$ (cm).

Mà $CH = AC - AH$, suy ra $CH \approx 15 - 3,42 = 11,58$ (cm).

Vì tam giác BCH vuông tại H nên

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2}$$

$$\approx \sqrt{(9,397)^2 + (11,58)^2} \approx 15 \text{ (cm)}.$$



Hình 41

34. Gọi tia Ax là hướng Bắc (*Hình 42*). Khi đó, ta có:

$\widehat{BAx} = 41^o$; $AB = 2,8$ km; $BC = 1,8$ km.

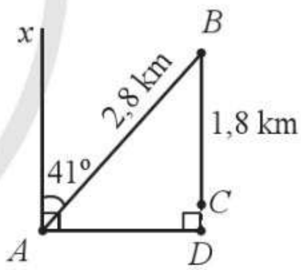
Ta tính được $\widehat{BAD} = 49^o$.

Vì tam giác ABD vuông tại D nên

$BD = AB . \sin \widehat{BAD} = 2,8. \sin 49^o$.

Vậy khoảng cách giữa thuyền và bờ là:

$CD = BD - BC = 2,8 . \sin 49^o - 1,8 \approx 0,3$ (km).



Hình 42

35. Vì tam giác ACH vuông tại H nên $AH = CH . \cot \widehat{CAH} = CH . \cot 25^o$.

Vì tam giác DCH vuông tại H nên $DH = CH . \cot \widehat{CDH} = CH . \cot 20^o$.

Mà $DH - AH = AD$, suy ra $CH(\cot 20^o - \cot 25^o) = 150$.

Vậy chiều cao của ngọn núi là:

$$CH = \frac{150}{\cot 20^o - \cot 25^o} \approx 249 \text{ (m)}.$$

Chương V
ĐƯỜNG TRÒN

§1 ĐƯỜNG TRÒN. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R là tập hợp các điểm cách điểm O một khoảng bằng R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$.

Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn

– Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là *dây* (hay *dây cung*) của đường tròn.

– Dây đi qua tâm là *đường kính* của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Tính đối xứng của đường tròn

– Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

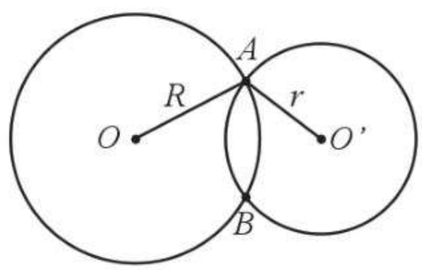
– Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mỗi đường thẳng đi qua tâm là một trục đối xứng của đường tròn đó.

Vị trí tương đối của hai đường tròn

– *Hai đường tròn cắt nhau:*

+ Hai đường tròn có đúng hai điểm chung được gọi là hai đường tròn cắt nhau.

+ Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại hai điểm A và B (*Hình 1*).



Hình 1

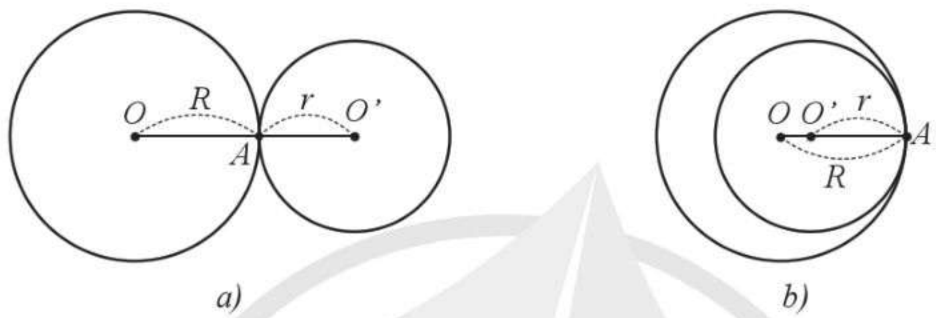
– *Hai đường tròn tiếp xúc nhau:*

+ Hai đường tròn có đúng một điểm chung được gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau (tại điểm chung đó).

+ Ta có hai trường hợp về hai đường tròn tiếp xúc nhau:

• Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại tiếp điểm A (*Hình 2a*);

• Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc trong tại tiếp điểm A (*Hình 2b*).



Hình 2

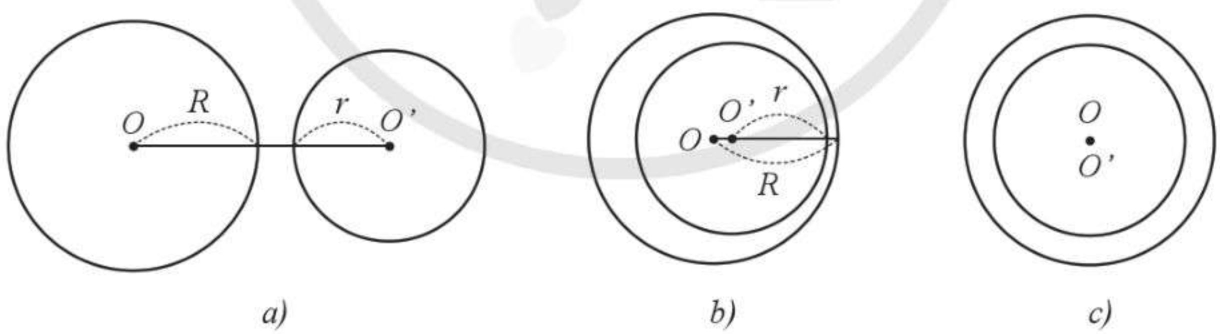
– *Hai đường tròn không giao nhau:*

+ Hai đường tròn không có điểm chung được gọi là hai đường tròn không giao nhau.

+ Ta có hai trường hợp về hai đường tròn không giao nhau:

• Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ở ngoài nhau (*Hình 3a*);

• Đường tròn $(O; R)$ đựng đường tròn $(O'; r)$ với $R > r$ (*Hình 3b*).



Hình 3

Nhận xét

Ta có thể nhận biết vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$, $(O'; r)$ $(R \geq r)$ thông qua hệ thức giữa OO' với R và r được tóm tắt trong bảng sau:

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ $(R \geq r)$	**Số điểm chung**	**Hệ thức giữa OO' với R và r**
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	 $OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau: – (O) và (O') ở ngoài nhau – (O) đựng (O')	0	 $OO' > R + r$ $OO' < R - r$

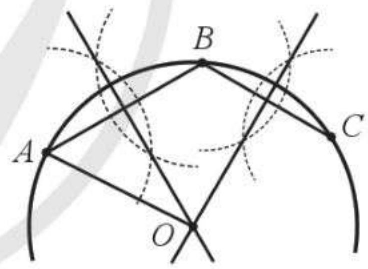
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Có một chi tiết (đường viền ngoài có dạng là đường tròn) bị gãy được minh hoạ như *Hình 4*. Làm thế nào để xác định được bán kính của đường viền này?

Hình 4

Giải

Lấy ba điểm A, B, C bất kì trên đường tròn. Kẻ đường trung trực của đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BC. Gọi O là giao điểm của hai đường trung trực. Khi đó, độ dài đoạn thẳng OA là bán kính của đường viền chi tiết máy (*Hình 5*).

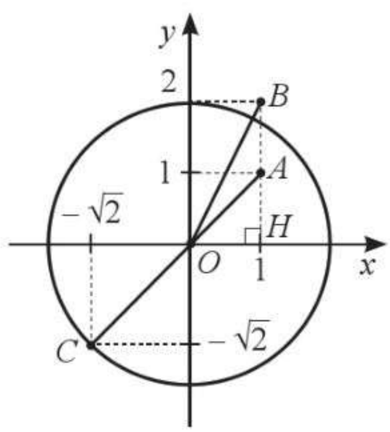


Hình 5

Ví dụ 2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(1\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 2)$, $C\left(-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}\right)$. Xét vị trí của các điểm A, B, C với đường tròn $(O; 2)$.

Giải

Gọi H là hình chiếu của A trên Ox (*Hình 6*). Khi đó, ta có: $AH = 1$, $OH = 1$.



Hình 6

Vì tam giác OAH vuông tại H nên $OA^2 = AH^2 + OH^2$ (theo định lí Pythagore).

Suy ra $OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Tương tự, ta tính được:

$$OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

$$OC = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

Ta có: $OA < 2$ (vì $\sqrt{2} < 2$) nên điểm A nằm trong đường tròn $(O; 2)$;

$OB > 2$ (vì $\sqrt{5} > 2$) nên điểm B nằm ngoài đường tròn $(O; 2)$;

$OC = 2$ nên điểm C nằm trên đường tròn $(O; 2)$.

Ví dụ 3 Cho hai đường tròn (O; 3 cm) và (O'; 1 cm) với $OO' = 3$ cm. Hỏi hai đường tròn đó có cắt nhau hay không?

Giải

Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O) và (O') lần lượt là $R = 3$ cm, $r = 1$ cm.

Do $R - r = 3 - 1 = 2$ (cm), $R + r = 3 + 1 = 4$ (cm) và $2 < 3 < 4$ nên

$$R - r < OO' < R + r.$$

Vậy hai đường tròn (O; 3 cm) và (O'; 1 cm) cắt nhau.

C. BÀI TẬP

1. Cho đường tròn (O; 25 cm). Tính độ dài dây lớn nhất của đường tròn đó.

2. Cho hai đường tròn (O; 4 cm), (O'; 1 cm). Xét vị trí tương đối của hai đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

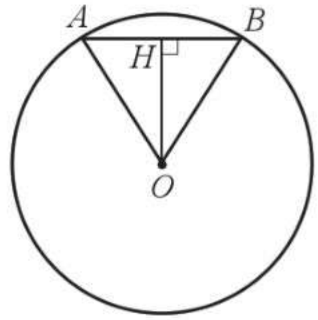
a) $OO' = 4,5$ cm; b) $OO' = 6$ cm; c) $OO' = 2$ cm.

3. Cho hai đường tròn (O; 3,5 cm) và (O'; 4,5 cm). Tìm độ dài OO' sao cho hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài.

4. Cho hai đường tròn (O; 17 cm) và (O'; 10 cm) cắt nhau tại A và B. Biết rằng $OO' = 21$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

5. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại A và B. Chứng minh tứ giác $OAO'B$ là hình thoi; từ đó, suy ra AB cắt OO' tại trung điểm của mỗi đường.

6. *Hình 7* mô tả công trình xây dựng cây cầu bắc qua một hồ nước với mặt hồ có dạng hình tròn tâm O bán kính 2 km. Cây cầu có hai đầu cầu là hai điểm A, B nằm trên đường tròn tâm O. Tính chiều dài của cây cầu để khoảng cách từ tâm O của hồ nước đến cây cầu là OH = 1 732 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 7

7. Hai hòn đảo được xem như hai hình tròn có khoảng cách từ tâm hòn đảo này đến tâm hòn đảo kia là khoảng 950 m. Biết rằng hòn đảo lớn có bán kính khoảng 500 m, còn đảo nhỏ có bán kính khoảng 300 m. Người ta cần xây dựng một cây cầu bắc từ đảo này sang đảo kia. Hãy chọn vị trí để xây cầu sao cho chiều dài cây cầu là ngắn nhất, khi đó tính chiều dài cây cầu.

8. Cho đường tròn tâm O bán kính OA và đường tròn tâm O' đường kính OA.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O').

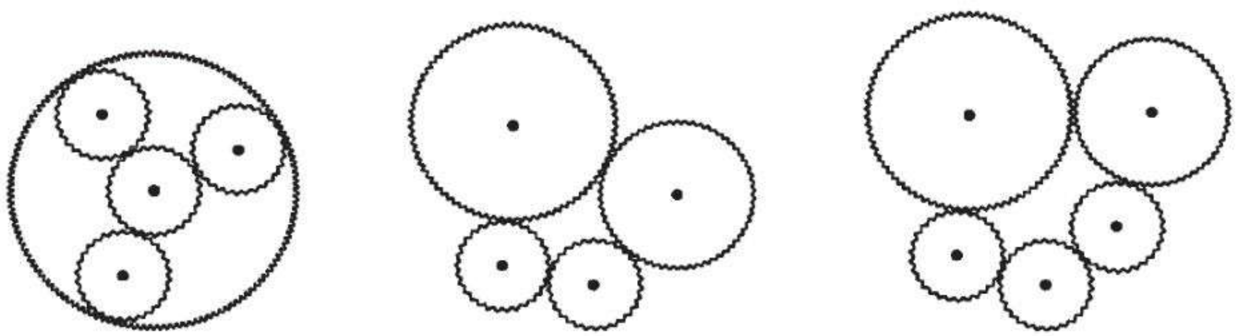
b) Dây AD của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại C. Chứng minh $AC = CD$.

9. Cho đường tròn (O; 3 cm) và (O'; 2 cm) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng đi qua A cắt (O) và (O') lần lượt tại B và C (B và C khác A).

a) Chứng minh $OB \parallel O'C$.

b) Cho AB = 5 cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC.

10. Trong mỗi hình *8a*, *8b*, *8c*, các bánh xe tròn có răng cưa được khớp với nhau. Hình nào có hệ thống bánh răng chuyển động được? Hình nào có hệ thống bánh răng không chuyển động được?


a) *b)* *c)*

Hình 8

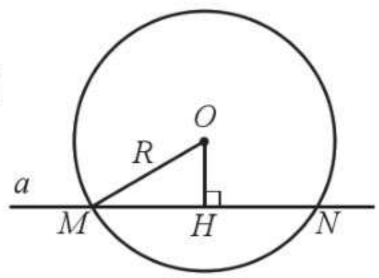
§2 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

– Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

– Đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại (*Hình 9*).

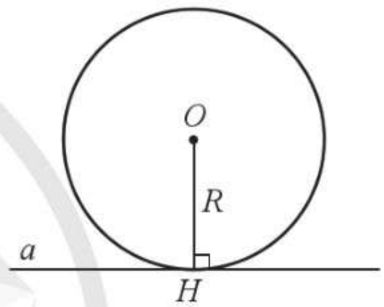


Hình 9

Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

– Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

– Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại (*Hình 10*).

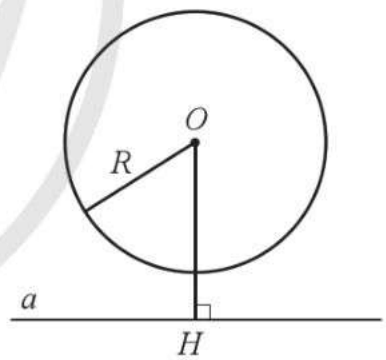


Hình 10

Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

– Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

– Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại (*Hình 11*).



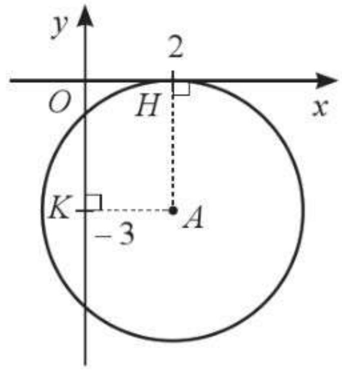
Hình 11

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(2\,;-3)$. Xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A; 3)$ với các trục toạ độ.

Giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên Ox, Oy (*Hình 12*). Khi đó, ta có: khoảng cách từ điểm A đến trục Ox là $AH = 3$ và khoảng cách từ điểm A đến trục Oy là $AK = 2$.



Hình 12

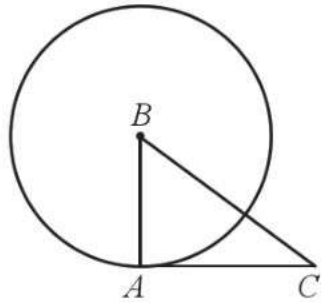
Do $AH = 3$ nên đường tròn $(A; 3)$ và trục Ox tiếp xúc với nhau.

Do $AK < 3$ (vì $2 < 3$) nên đường tròn $(A; 3)$ và trục Oy cắt nhau.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Đường thẳng AC có tiếp xúc với đường tròn $(B; 6$ cm$)$ hay không? Vì sao?

Giải. (Hình 13)

Ta có: $BC^2 = 10^2 = 100$; $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$. Suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Do đó, tam giác ABC vuông tại A hay AB vuông góc với AC tại A. Suy ra khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC là $AB = 6$ cm. Vậy đường thẳng AC tiếp xúc với đường tròn $(B; 6$ cm$)$.



Hình 13

Ví dụ 3 Cho điểm O và đường thẳng a thoả mãn khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là 5,3 cm. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $R = 5{,}1$ cm; b) $R = 5{,}3$ cm; c) $R = 5{,}4$ cm.

Giải

Gọi d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a. Khi đó, ta có: $d = 5{,}3$ cm.

a) Vì $d = 5{,}3$ cm; $R = 5{,}1$ cm nên $d > R$. Vậy đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau.

b) Vì $d = 5{,}3$ cm; $R = 5{,}3$ cm nên $d = R$. Vậy đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc nhau.

c) Vì $d = 5{,}3$ cm; $R = 5{,}4$ cm nên $d < R$. Vậy đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau.

C. BÀI TẬP

11. Cho đường thẳng a và điểm O với khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là 1 cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn (O).

b) Gọi A và B là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn (O). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

12. Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$ và điểm O' thuộc tia Ox sao cho $OO' = 4$ cm.

a) Tính khoảng cách từ điểm O' đến tia Oy.

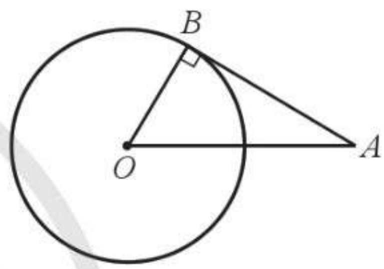
b) Xác định vị trí tương đối của tia Oy và đường tròn $(O'; R)$ tuỳ theo độ dài R với $R \leq 4$ cm.

13. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm, $CD = 9$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD.

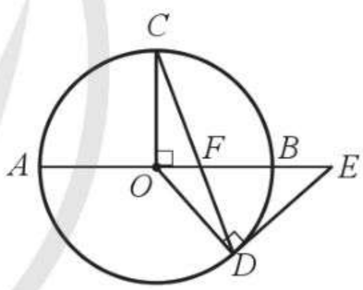
b) Đường thẳng AD có tiếp xúc với đường tròn đường kính BC hay không? Vì sao?

14. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA = 2R$. Kẻ tiếp tuyến AB của đường tròn $(O; R)$ với B là tiếp điểm (*Hình 14*). Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R.



Hình 14

15. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, bán kính OC vuông góc với AB tại O. Lấy điểm F thuộc đoạn thẳng OB, tia CF cắt đường tròn (O) tại D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB tại E (*Hình 15*). Chứng minh $EF = ED$.



Hình 15

16. Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường chéo BD, lấy điểm H sao cho $BH = AB$. Qua điểm H kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt AD tại O.

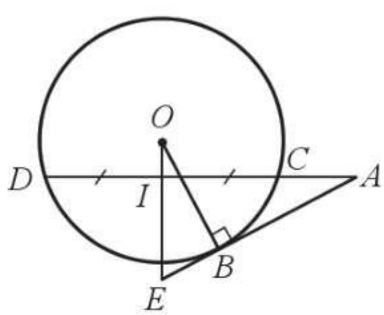
a) So sánh OA, OH, HD.

b) Xác định vị trí tương đối của BD và đường tròn $(O; OA)$.

17. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB của đường tròn với B là tiếp điểm. Lấy các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho C nằm giữa A và D, O không thuộc AD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD, tia OI cắt AB tại E (*Hình 16*). Chứng minh:

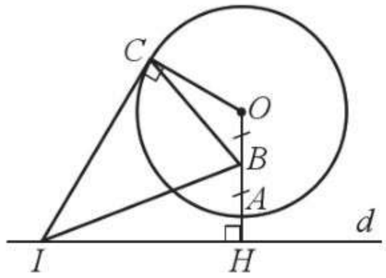
a) $EB \cdot EA = EI \cdot EO$;

b) $AB^2 = AC \cdot AD$.



Hình 16

18. Cho đường tròn (O; 4 cm) và đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d là $OH = 5$ cm. Đường thẳng OH cắt đường tròn (O) tại A. Gọi B là trung điểm của đoạn thẳng OA. Trên đường thẳng d, lấy một điểm I (khác H), kẻ tiếp tuyến IC của đường tròn (O) với C là tiếp điểm (*Hình 17*). Chứng minh tam giác IBC cân tại I.



Hình 17

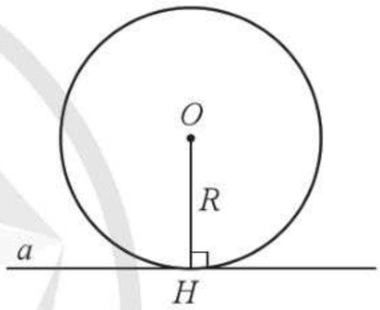
§3 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

– Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

– Ở *Hình 18* có đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).



Hình 18

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

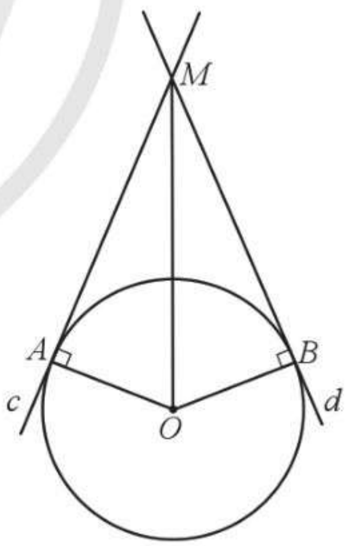
– Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

+ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm;

+ Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;

+ Tia kẻ từ tâm đường tròn đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

– Ở *Hình 19* có hai đường thẳng c, d là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B và cắt nhau tại M.



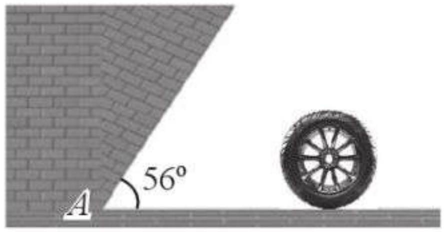
Hình 19

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Một bánh xe có dạng hình tròn bán kính 25 cm lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 56^o (*Hình 20*). Tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường A (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).

Giải

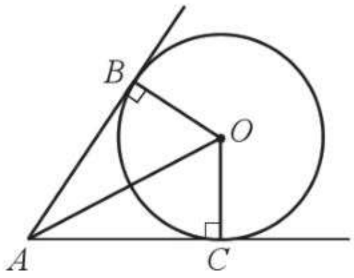
Hình 21 mô tả bánh xe có tâm O bán kính $OB = OC = 25$ cm, bánh xe chạm vào bức tường thì không di chuyển vào thêm nữa. Tức là khoảng cách OA từ tâm bánh xe đến góc tường ngắn nhất là khi bánh xe tiếp xúc với bức tường AB và mặt đất AC. Khi đó, ta có: $\widehat{BAC} = 56^\circ$.



Hình 20

Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{56^\circ}{2} = 28^\circ.$$



Hình 21

Do AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B nên $OB \perp AB$.

Xét tam giác OAB vuông tại B, ta có: $OB = OA \,.\, \sin \widehat{OAB}$. Suy ra

$$OA = \frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{25}{\sin 28^\circ} \approx 53{,}3 \text{ (cm)}.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường A xấp xỉ 53,3 cm.

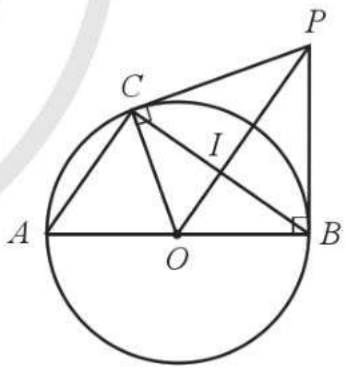
Ví dụ 2 Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ dây AC tuỳ ý. Kẻ hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và tại C, hai tiếp tuyến này cắt nhau tại P. Chứng minh $PO \parallel AC$.

Giải

Gọi I là giao điểm của OP và BC (*Hình 22*).

Vì C thuộc đường tròn tâm O đường kính AB nên tam giác ABC có CO là đường trung tuyến ứng với cạnh AB và $CO = \frac{AB}{2}$. Suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Do PB, PC là các tiếp tuyến của (O) nên $PB = PC$ và $OB = OC$. Suy ra OP là đường trung trực của đoạn thẳng BC hay $OP \perp BC$.



Hình 22

Ta có: $\widehat{OIB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ nên $PO \parallel AC$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

C. BÀI TẬP

19. Cho đường tròn tâm O bán kính 15 cm. Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 25$ cm. Kẻ tiếp tuyến AB của đường tròn (O). Kẻ dây BC vuông góc với OA tại H.

a) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

20. Cho đường tròn (O) và dây AB khác đường kính. Kẻ bán kính OC đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB. Vẽ đường tròn $(C; CI)$. Kẻ tiếp tuyến BD của đường tròn (C) với D là tiếp điểm và D khác I. Chứng minh:

a) Bốn đỉnh của tứ giác $BDCI$ cùng nằm trên một đường tròn;

b) BD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

21. Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Lấy điểm M sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng OM. Chứng minh:

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O);

b) $MC = R\sqrt{3}$.

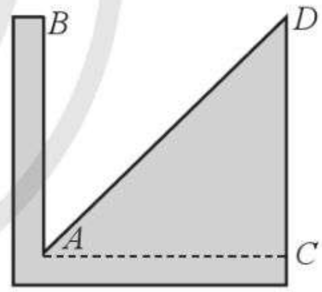
22. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm trên đường tròn. Lấy điểm B sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng OB. Kẻ hai tiếp tuyến BM, BN của đường tròn (O).

a) Tính số đo góc MBN và độ dài đoạn thẳng BM theo R.

b) Tứ giác $AMON$ là hình gì ? Vì sao?

c) Tính độ dài đoạn thẳng OH theo R với H là giao điểm của OA và MN.

23. *Hình 23* minh hoạ thước phân giác. Thước gồm hai thanh gỗ ghép lại thành góc vuông BAC và một tấm gỗ có dạng hình tam giác ACD với AD là tia phân giác của góc BAC. Có thể dùng thước phân giác để tìm tâm của một hình tròn hay không? Vì sao?

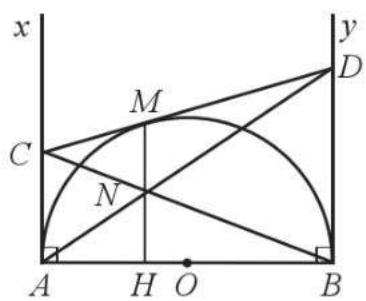


Hình 23

24. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi N là giao điểm của AD và BC và H là giao điểm của MN và AB (*Hình 24*). Chứng minh:

a) $MN \perp AB$;

b) $MN = NH$.



Hình 24

25. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A với $R \neq r$. Đường nối OO' lần lượt cắt hai đường tròn (O) và (O') tại B và C. Đường thẳng a

lần lượt tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O') tại D và E. Gọi M là giao điểm của BD và CE. Chứng minh:

a) $\widehat{DME} = 90^{\circ}$;

b) MA tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O');

c) $MD \cdot MB = ME \cdot MC$.

26. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Hình chiếu của H trên AB, AC lần lượt là D, E. Gọi (O) là đường tròn đường kính HB và (O') là đường tròn đường kính HC. Chứng minh:

a) Điểm D thuộc đường tròn (O) và điểm E thuộc đường tròn (O');

b) Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài;

c) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O');

d) $AH = DE$;

e) Diện tích tứ giác $DEO'O$ bằng nửa diện tích tam giác ABC.

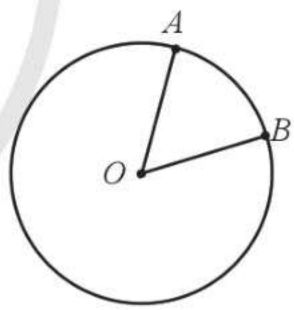
§4 GÓC Ở TÂM. GÓC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Góc ở tâm

– Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

– Ở *Hình 25* có góc AOB là góc ở tâm.



Hình 25

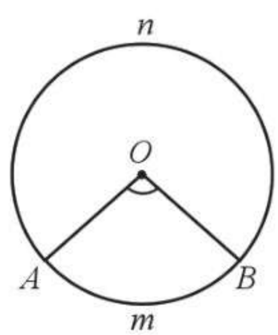
Cung. Số đo của cung

– *Cung:*

+ Phần đường tròn nối liền hai điểm A, B trên đường tròn được gọi là một cung (hay cung tròn) AB, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.

+ Trong *Hình 26*:

• Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ AmB.



Hình 26

• Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB được gọi là cung lớn, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

• Nếu có điểm C (khác A và B) thuộc $\overset{\frown}{AmB}$ thì ta cũng nói cung này là $\overset{\frown}{ACB}$.

• Nếu có điểm D (khác A và B) thuộc $\overset{\frown}{AnB}$ thì ta cũng nói cung này là $\overset{\frown}{ADB}$.

– *Số đo của cung:*

+ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

+ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).

+ Số đo của nửa đường tròn bằng 180°.

+ Số đo của cung AB được kí hiệu là sđ$\overset{\frown}{AB}$.

+ So sánh hai cung:

• Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau;

• Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

Góc nội tiếp

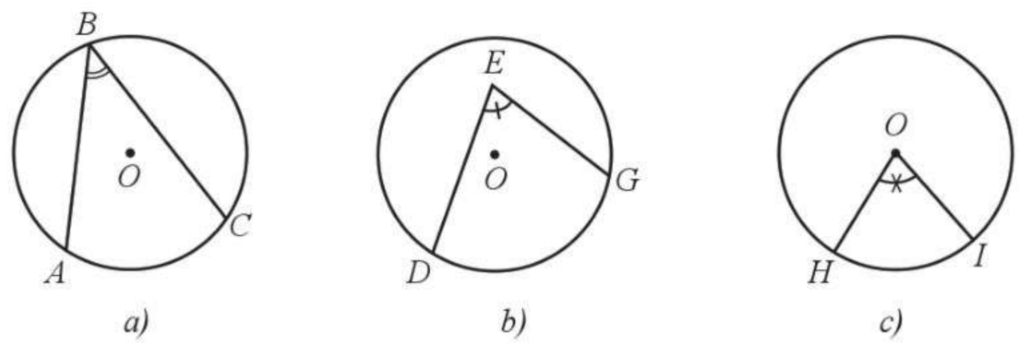
– *Định nghĩa:* Góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

– *Định lí:* Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

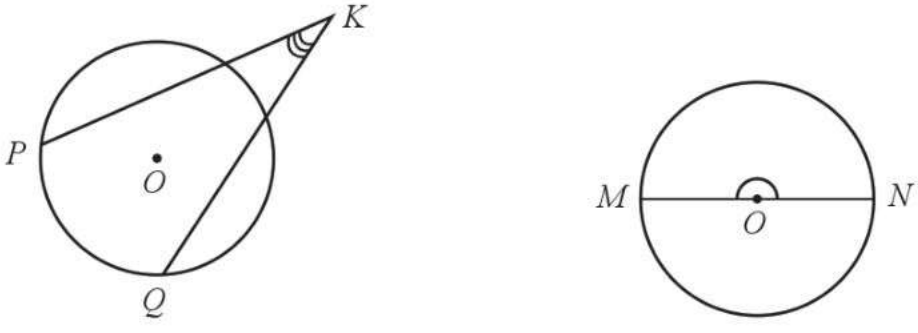
– *Hệ quả:* Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90°.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các góc ABC, DEG, HOI, PKQ, MON lần lượt ở các hình *27a*, *27b*, *27c*, *27d*, *27e*, góc nào là góc ở tâm, góc nào không là góc ở tâm? Vì sao?



Hình 27



d) e)

Hình 27

Giải

Đường tròn ở các hình *27a*, *27b*, *27c*, *27d*, *27e* đều có tâm O nên các góc HOI, MON là góc ở tâm; các góc ABC, DEG, PKQ không là góc ở tâm.

Ví dụ 2 Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.

b) Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

c) Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

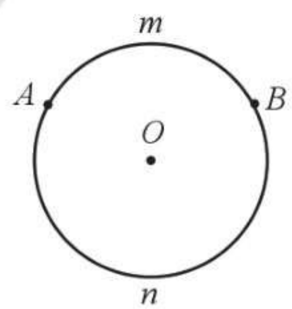
d) Trong một đường tròn, mỗi góc nội tiếp có số đo gấp hai lần số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

Giải

Phát biểu ở các câu a, c là đúng. Phát biểu ở các câu b, d là sai.

Ví dụ 3 Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B nằm trên đường tròn sao cho

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AnB} \quad (\textit{Hình 28}).$$



Hình 28

a) Tính sđ $\overset{\frown}{AnB}$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R.

Giải

a) Do sđ $\overset{\frown}{AmB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AnB}$ và sđ $\overset{\frown}{AmB}$ + sđ $\overset{\frown}{AnB} = 360^\circ$ nên $\frac{3}{2}$sđ $\overset{\frown}{AnB} = 360^\circ$ hay sđ $\overset{\frown}{AnB} = 240^\circ$.

b) Kẻ OH vuông góc với AB tại H, tia OH cắt đường tròn (O) tại K (*Hình 29*).

Do sđ $\overset{\frown}{AnB} = 240^\circ$ nên sđ $\overset{\frown}{AmB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AnB} = 120^\circ$. Suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

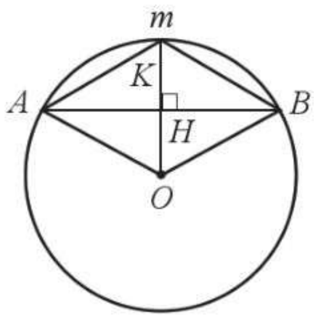
Xét hai tam giác vuông OAH và OBH, ta có:

OH là cạnh chung; $OA = OB$ (vì cùng bằng R).

Suy ra $\Delta OAH = \Delta OBH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Do đó $AH = BH = \dfrac{AB}{2}$ và $\widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = 60^\circ$.

Tam giác OAK có $OA = OK$ (vì cùng bằng R) nên tam giác OAK cân tại O. Mà $\widehat{AOK} = 60^\circ$, suy ra tam giác OAK đều. Do đó $AK = OA = OK = R$.



Hình 29

Tương tự, ta chứng minh được $BK = OB = OK = R$.

Tứ giác $OAKB$ có $OA = AK = BK = OB$ (vì cùng bằng R) nên $OAKB$ là hình thoi.

Suy ra AB cắt OK tại trung điểm H của mỗi đường. Do đó $OH = \dfrac{OK}{2} = \dfrac{R}{2}$.

Xét tam giác OAH vuông tại H, ta có: $OA^2 = AH^2 + OH^2$. Suy ra

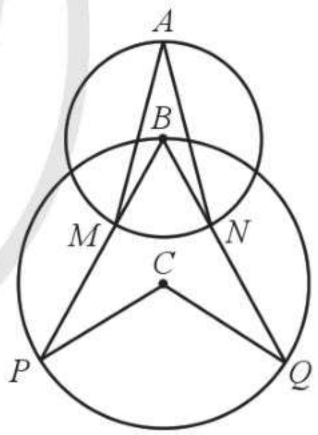
$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Mà $AH = \dfrac{AB}{2}$, suy ra $AB = 2\,AH = R\sqrt{3}$.

Ví dụ 4 Cho hai đường tròn $(B; R)$, $(C; r)$ với điểm B nằm trên đường tròn tâm C và $R < r$. Lấy các điểm A, M, N nằm trên đường tròn (B) sao cho A nằm ngoài đường tròn (C) và M, N nằm trong đường tròn (C). Tia BM, BN cắt đường tròn (C) lần lượt tại P, Q (*Hình 30*).

a) Chứng minh $\widehat{PCQ} = 4\widehat{MAN}$.

b) Tính số đo các góc PCQ, MAN. Biết rằng $\widehat{MBN} = 58^\circ$.



Hình 30

Giải

a) Xét đường tròn (B), ta có: $\widehat{MBN} = 2\widehat{MAN}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ MN).

Xét đường tròn (C), ta có: $\widehat{PCQ} = 2\widehat{PBQ}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ PQ) hay $\widehat{PCQ} = 2\widehat{MBN}$.

Mà $\widehat{MBN} = 2\widehat{MAN}$, suy ra $\widehat{PCQ} = 4\widehat{MAN}$.

b) Theo câu a, ta có: $\widehat{PCQ} = 2\widehat{MBN} = 2 \,.\, 58^\circ = 116^\circ$;

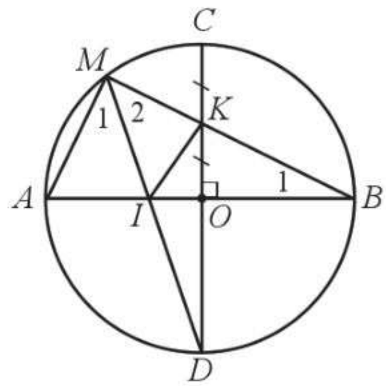
$$\widehat{MBN} = 2\widehat{MAN} \text{ hay } \widehat{MAN} = \frac{\widehat{MBN}}{2} = \frac{58^\circ}{2} = 29^\circ.$$

Ví dụ 5 Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng OC, M là giao điểm của tia BK với đường tròn (O), I là giao điểm của MD và AB.

a) Chứng minh sđ$\overset{\frown}{AM}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ – sđ $\overset{\frown}{CM}$.

b) Tính diện tích của các tam giác ABM, BIK theo R.

Giải. (*Hình 31*)



Hình 31

a) Do hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau nên

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}.$$

Do M thuộc cung nhỏ AC nên

sđ$\overset{\frown}{AM}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ – sđ $\overset{\frown}{CM}$.

Suy ra sđ$\overset{\frown}{AM}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ – sđ $\overset{\frown}{CM}$.

b) Xét đường tròn (O), ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vì K là trung điểm của đoạn thẳng OC nên $OK = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{R}{2}$.

Do tam giác ABM vuông tại M và tam giác BKO vuông tại O nên

$$\tan B_1 = \frac{AM}{BM} = \frac{OK}{OB} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $BM = 2AM$.

Mặt khác, ta lại có: $AM^2 + BM^2 = AB^2$ (áp dụng định lí Pythagore cho tam giác ABM vuông tại M). Do đó $5AM^2 = 4R^2$ hay $AM = \dfrac{2R\sqrt{5}}{5}$. Suy ra $BM = \dfrac{4R\sqrt{5}}{5}$.

Diện tích của tam giác ABM là:

$$\frac{1}{2} \cdot AM \,.\, BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4R\sqrt{5}}{5} = \frac{4R^2}{5}.$$

Do $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét tam giác ABM có MI là đường phân giác, ta có:

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2} \text{ hay } AI = \frac{BI}{2}.$$

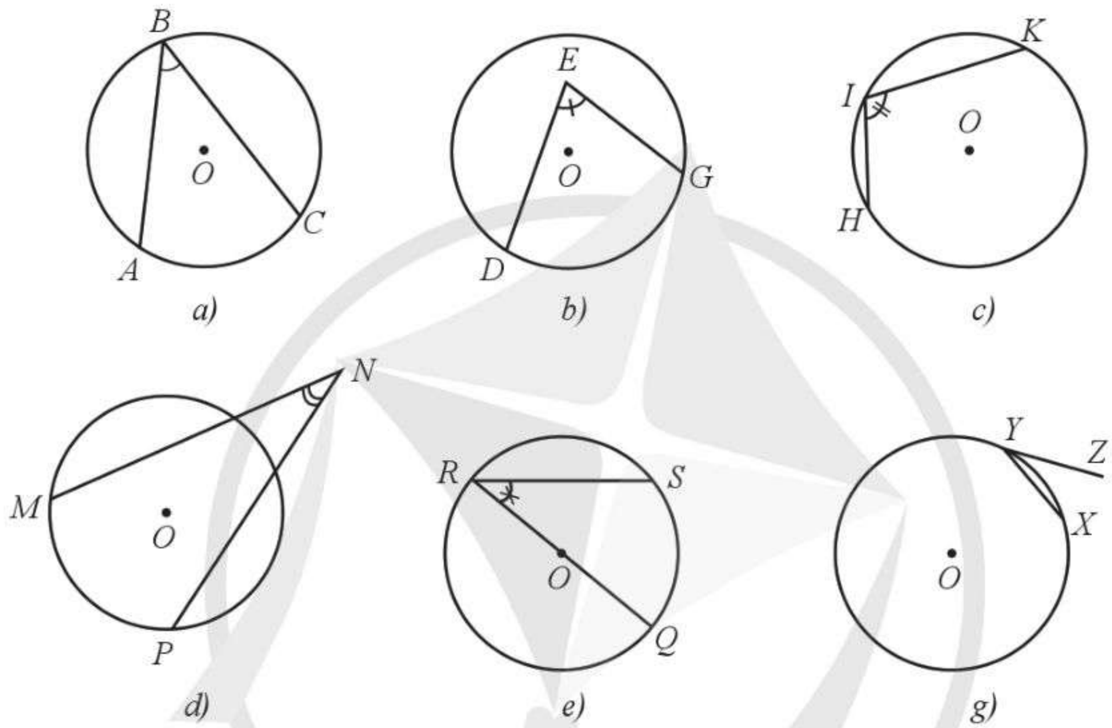
Mà $AI + BI = AB$, suy ra $\dfrac{3BI}{2} = 2R$ hay $BI = \dfrac{4R}{3}$.

Diện tích của tam giác BIK là:

$$\frac{1}{2} \cdot OK \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{4R}{3} = \frac{R^2}{3}.$$

C. BÀI TẬP

27. Trong các góc ABC, DEG, HIK, MNP, QRS, XYZ lần lượt ở các hình *32a*, *32b*, *32c*, *32d*, *32e*, *32g*, góc nào là góc nội tiếp? Vì sao?



Hình 32

28. Nhận định nào sau đây là **sai**?

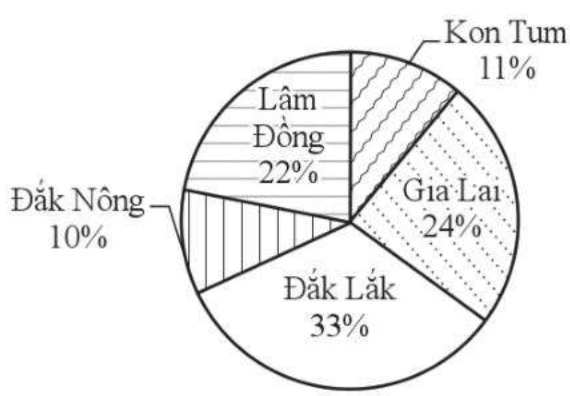
A. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

B. Góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

C. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90°.

D. Số đo của cung AB được kí hiệu là sđAB.

29. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 33* biểu diễn số lớp học cấp trung học cơ sở của năm tỉnh Tây Nguyên tính đến ngày 30/9/2021



Hình 33

(tính theo tỉ số phần trăm). Hãy cho biết các cung tương ứng với phần biểu diễn số lớp học cấp trung học cơ sở của các tỉnh Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng tính đến ngày 30/9/2021 lần lượt có số đo là bao nhiêu độ?

30. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn sao cho tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 50^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB, BC.

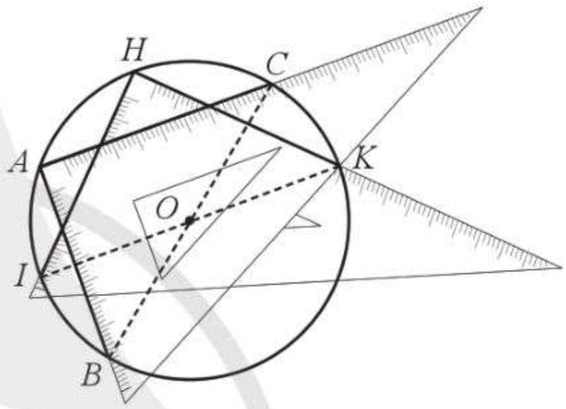
31. Bạn An đố bạn Bình: "Hãy xác định tâm của đường tròn mà chỉ dùng ê ke."

Bạn Bình đã xác định tâm O của đường tròn như sau:

– Lần thứ nhất: đặt góc vuông của ê ke tại điểm A, hai cạnh góc vuông của ê ke lần lượt cắt đường tròn tại hai điểm (gọi hai điểm đó là B, C);

– Lần thứ hai: đặt góc vuông của ê ke tại điểm H, hai cạnh góc vuông của ê ke lần lượt cắt đường tròn tại hai điểm (gọi hai điểm đó là I, K).

Quan sát *Hình 34* và chứng minh rằng bằng cách làm hai lần như trên thì bạn Bình đã giải được câu đố của bạn An.



Hình 34

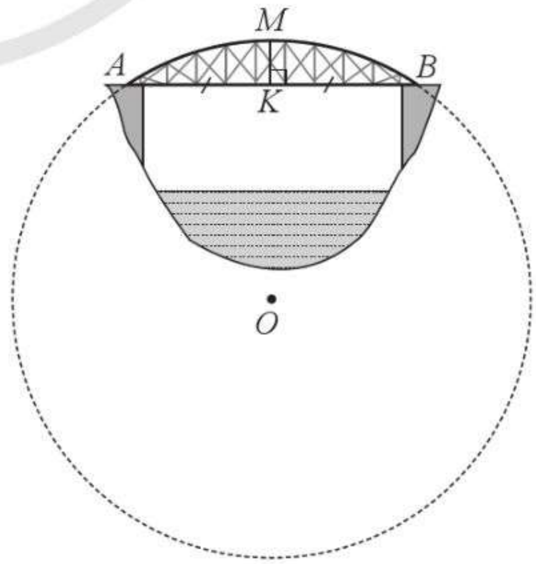
32. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B nằm trên đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O), hai tiếp tuyến đó cắt nhau tại M.

a) Tính số đo cung nhỏ AB và số đo cung lớn AB nếu $\widehat{AMB} = 40^\circ$.

b) Tính diện tích của tứ giác $OAMB$ theo R nếu số đo cung nhỏ AB bằng 120°.

33. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O'). So sánh độ dài dây BC của đường tròn (O) và độ dài dây BD của đường tròn (O').

34. Một chiếc cầu được thiết kế như một cung AB của đường tròn (O) với độ dài $AB = 40$ m và chiều cao $MK = 6$ m (*Hình 35*). Tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 35

35. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC. Trên tia BH, lấy điểm D sao cho H là trung điểm của đoạn thẳng BD. Nối A với D cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh:

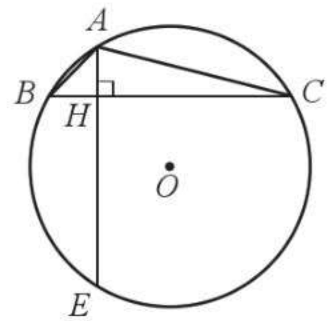
a) CH là tia phân giác của góc ACE;

b) $OH \parallel EC$.

36. Cho đường tròn $(O$; 1 dm$)$ và ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn sao cho $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, tia AH cắt đường tròn (O) tại E (*Hình 36*). Tính:

a) Số đo cung nhỏ CE và số đo cung lớn BC;

b) Độ dài các đoạn thẳng AC, BC.



Hình 36

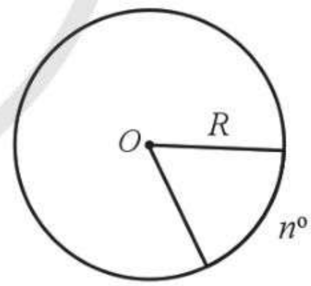
§5 ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Độ dài cung tròn

– Chu vi của đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$.

– Trong một đường tròn bán kính R, độ dài của cung tròn có số đo n° là: $l = \dfrac{\pi R n}{180}$ (*Hình 37*).



Hình 37

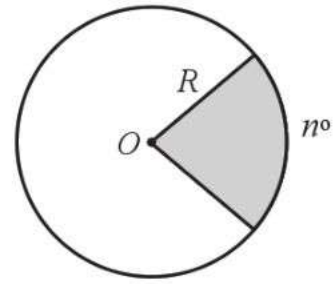
Diện tích hình quạt tròn

– Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

– Diện tích của hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

– Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n° là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ (Hình 38).}$$



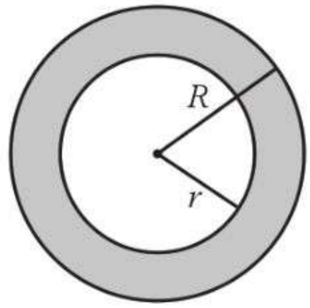
Hình 38

Diện tích hình vành khuyên

– Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

– Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; R)$ và $(O; r)$ (với $R > r$) có diện tích là:

$$S = \pi(R^2 - r^2) \text{ (Hình 39)}.$$



Hình 39

B. VÍ DỤ

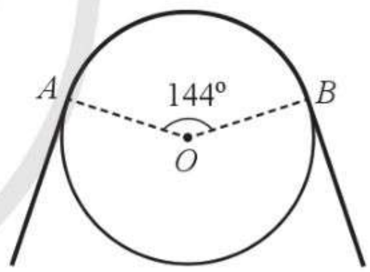
Ví dụ 1 Trái Đất quay xung quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là gần giống đường tròn. Giả thiết quỹ đạo này là đường tròn với bán kính khoảng 150 triệu km. Cứ hết một năm (365 ngày) thì Trái Đất quay được hết một vòng quanh Mặt Trời. Tính quãng đường đi được của Trái Đất sau 1 giờ (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của kilômét).

Giải

Quãng đường đi được của Trái Đất sau 1 giờ khoảng:

$$\frac{2 \,.\, \pi \,.\, 150\,000\,000}{365 \,.\, 24} \approx 108\,000 \text{ (km)}.$$

Ví dụ 2 Bánh xe của một ròng rọc có dạng hình tròn với chu vi là 460 mm. Dây Curoa (Courroie) bao bánh xe theo cung AB. Tính độ dài phần dây Curoa bao bánh xe theo cung AB, biết $\widehat{AOB} = 144^{\circ}$ (*Hình 40*).



Hình 40

Giải

Độ dài phần dây Curoa bao bánh xe theo cung AB là:

$$l = \frac{460 \,.\, 144}{360} = 184 \text{ (mm)}.$$

Ví dụ 3 Cho hai đường tròn $(O;$ 2 cm$)$ và $(O';$ 1 cm$)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Qua A vẽ đường thẳng d lần lượt cắt đường tròn (O) và (O') tại M và N (d không đi qua O và O'). Chứng minh độ dài của cung nhỏ AM của đường tròn (O) gấp đôi độ dài của cung nhỏ AN của đường tròn (O').

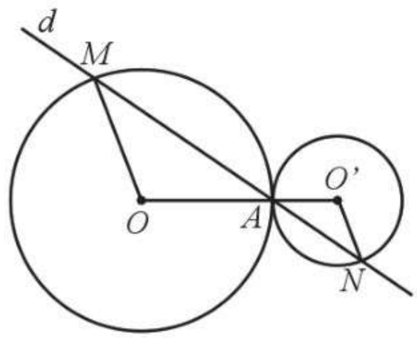
Giải. (*Hình 41*)

Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A nên ba điểm O, A, O' thẳng hàng.

Hai điểm A, M thuộc đường tròn (O) nên $OA = OM$ hay tam giác OAM cân tại O. Suy ra $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$.

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{AOM} + \widehat{OAM} + \widehat{OMA} = 180^\circ$ (tổng các góc trong tam giác OAM). Suy ra

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - 2\widehat{OAM}.$$



Hình 41

Tương tự, ta chứng minh được $\widehat{AO'N} = 180^\circ - 2\widehat{O'AN}$.

Mà $\widehat{OAM} = \widehat{O'AN}$ (hai góc đối đỉnh), suy ra

$$\widehat{AOM} = \widehat{AO'N}.$$

Đặt $\widehat{AOM} = \widehat{AO'N} = n^\circ$.

Độ dài cung nhỏ AM của đường tròn (O) là: $l_1 = \dfrac{\pi \cdot 2 \cdot n}{180} = \dfrac{2\pi n}{180}$.

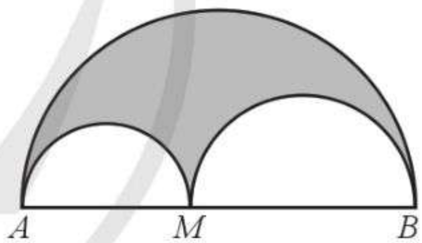
Độ dài cung nhỏ AN của đường tròn (O') là: $l_2 = \dfrac{\pi \cdot 1 \cdot n}{180} = \dfrac{\pi n}{180}$.

Ta thấy $l_1 = 2l_2$ nên độ dài của cung nhỏ AM của đường tròn (O) gấp đôi độ dài của cung nhỏ AN của đường tròn (O').

Ví dụ 4 Cho các nửa đường tròn đường kính AB, đường kính AM và đường kính BM. Biết $AM = 6$ cm, $BM = 8$ cm (*Hình 42*).

a) Chứng minh tổng chu vi của các nửa đường tròn đường kính AM và đường kính BM bằng chu vi của nửa đường tròn đường kính AB.

b) Tính diện tích của phần tô màu xám (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông).



Hình 42

Giải

a) Ta có: $AB = AM + BM = 6 + 8 = 14$ (cm).

Bán kính của đường tròn đường kính AB, đường kính AM, đường kính BM lần lượt là 7 cm, 3 cm, 4 cm.

Tổng chu vi của các nửa đường tròn đường kính AM và đường kính BM là:

$$C_1 = \pi \cdot 3 + \pi \cdot 4 = 7\pi \text{ (cm)}.$$

Chu vi của nửa đường tròn đường kính AB là:

$$C_2 = \pi \cdot 7 = 7\pi \text{ (cm)}.$$

Ta thấy $C_1 = C_2$ nên tổng chu vi của các nửa đường tròn đường kính AM và đường kính BM bằng chu vi của nửa đường tròn đường kính AB.

b) Diện tích phần tô màu xám là:

$$\frac{\pi \cdot 7^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 3^2}{2} + \frac{\pi \cdot 4^2}{2}\right) = 12\pi \approx 38 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 5 Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; R)$ và $(O; r)$ (với $R > r$) là 628 dm^2 (*Hình 43*). Tính R (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của decimet), biết $r = \frac{4}{7}R$.

Giải

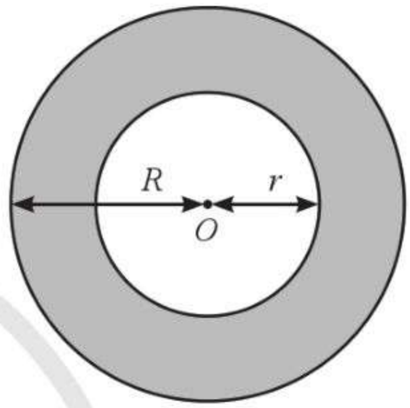
Do diện tích hình vành khuyên là 628 dm^2 nên

$$\pi(R^2 - r^2) = 628.$$

Mà $r = \frac{4}{7}R$, suy ra $\pi\left[R^2 - \left(\frac{4}{7}R\right)^2\right] = 628$

hay $\frac{33\pi}{49}R^2 = 628$.

Do đó $R^2 = \frac{30\,772}{33\pi}$ hay $R = \sqrt{\frac{30\,772}{33\pi}} \approx 17{,}2$ (dm).



Hình 43

C. BÀI TẬP

37. Hoàn thành số liệu ở bảng sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của đơn vị đo đã cho nếu cần, lấy $\pi \approx 3{,}14$):

Bán kính đường tròn (R)	**Chu vi đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn ($n°$)**	**Độ dài của cung tròn có số đo $n°$**	**Diện tích của hình quạt tròn có số đo $n°$**
?	?	12,56 cm^2	135°	?	?
0,6 cm	?	?	?	1,256 cm	?
?	?	50,24 cm^2	?	?	6,28 cm^2
3 cm	?	?	?	?	0,942 cm^2

38. Chuyển động của Mặt Trăng quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là gần giống đường tròn với tốc độ không đổi. Giả thiết quỹ đạo này là đường tròn với bán kính khoảng 385 nghìn km. Thời gian Mặt Trăng quay một vòng quanh Trái Đất khoảng 27,3 ngày.

a) Tính quãng đường đi được của Mặt Trăng sau 1 ngày (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của kilômét).

b) Tính tốc độ của Mặt Trăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét trên giây).

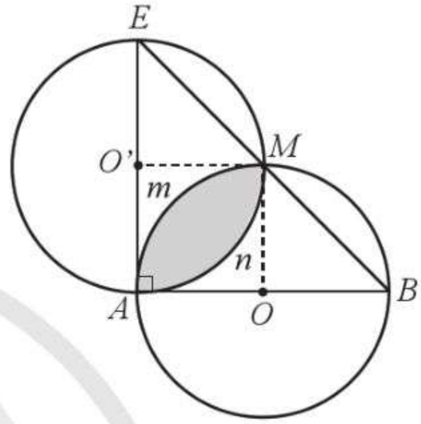
39. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh $AB = 5$ cm, đường chéo $AC = 8$ cm. Vẽ các đường tròn (A; 5 cm), (C; 3 cm). Đường tròn (C) cắt BC, CD lần lượt tại E, F. Tính tỉ số độ dài của cung nhỏ BD của đường tròn (A) và cung nhỏ EF của đường tròn (C).

40. Cho tam giác ABE vuông cân tại A với $AB = AE = 2a$. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB và đường tròn tâm O' đường kính AE. Gọi M là giao điểm khác A của hai đường tròn (O), (O') (*Hình 44*).

Tính theo a:

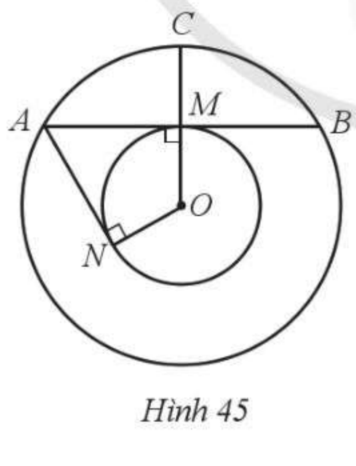
a) Độ dài cung AmM và cung AnM tương ứng của đường tròn (O) và (O');

b) Diện tích của phần tô màu xám theo a.

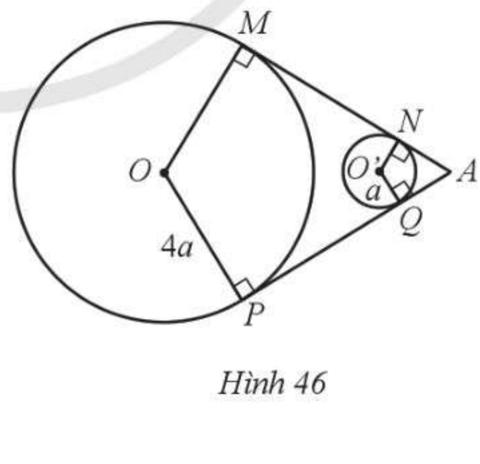


Hình 44

41. Cho hai đường tròn (O; R) và (O; $2R$). Một dây cung AB của đường tròn (O; $2R$) tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại M. Kẻ tiếp tuyến thứ hai AN của đường tròn (O; R). Gọi S_1 là diện tích của hình tạo bởi cung ACB và dây AB của đường tròn (O; $2R$), S_2 là diện tích của hình tạo bởi hai tiếp tuyến AM, AN và cung nhỏ MN của đường tròn (O; R) và S_3 là diện tích của hình tròn (O; R) (*Hình 45*). Chứng minh $S_1 + S_2 = S_3$.



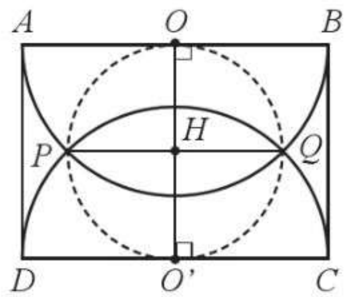
Hình 45



Hình 46

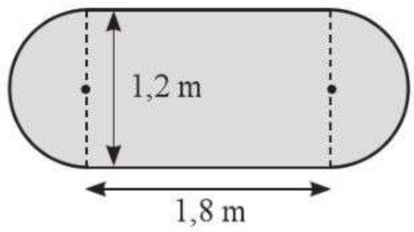
42. Hai ròng rọc có dạng hình tròn (O; $4a$) và (O'; a) với hai tiếp tuyến chung MN và PQ cắt nhau tại A sao cho $\widehat{MAP} = 60^\circ$ (*Hình 46*). Tìm độ dài của dây Curoa mắc qua hai ròng rọc theo a.

43. Cho hình chữ nhật *ABCD* với *AB* = 10 cm. Vẽ hai nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* và tâm *O'* đường kính *CD* cắt nhau tại *P*, *Q*. Biết rằng đường tròn tâm *H* đường kính *PQ* tiếp xúc với *AB* và *CD* (*Hình 47*). Tính diện tích phần chung của hai nửa đường tròn (*O*), (*O'*).



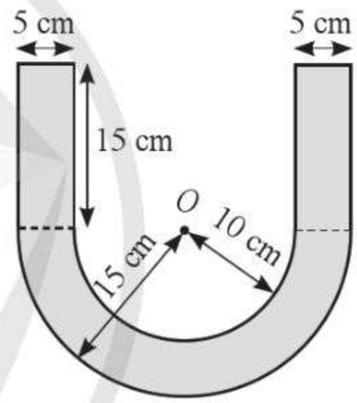
Hình 47

44. Bác Long dự định mua gỗ để làm một mặt bàn. Mặt bàn có dạng ở giữa là hình chữ nhật với chiều rộng 1,2 m, chiều dài 1,8 m và hai đầu là hai nửa hình tròn có đường kính là chiều rộng của hình chữ nhật như *Hình 48*. Tính số tiền bác Long phải trả để làm được mặt bàn đó (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của đồng), biết giá gia công mỗi mét vuông mặt bàn là 100 000 đồng.



Hình 48

45. *Hình 49* mô tả mặt cắt của một chi tiết máy ép nhựa có dạng ở giữa là nửa hình vành khuyên giới hạn bởi hai nửa đường tròn (*O*; 15 cm), (*O*; 10 cm) và hai đầu là hai hình chữ nhật có chiều dài 15 cm, chiều rộng 5 cm. Tính diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimét vuông).

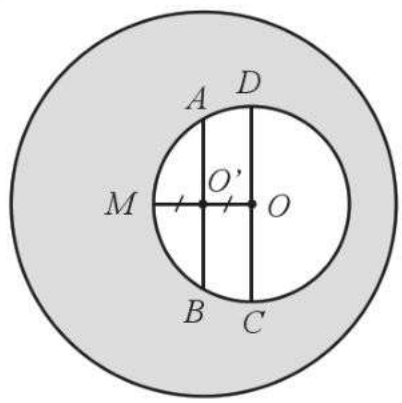


Hình 49

46. Cho đường tròn tâm *O* bán kính *OM* = 8 cm. Gọi *O'* là trung điểm của đoạn thẳng *OM*, vẽ đường tròn tâm *O'* bán kính 16 cm. Trong đường tròn (*O*), kẻ dây *AB* đi qua *O'*, vuông góc với *OM* và đường kính *CD* song song với *AB* (*Hình 50*). Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông):

a) Diện tích phần hình giới hạn bởi dây *AB*, cung nhỏ *AD*, đường kính *CD* và cung nhỏ *BC* của đường tròn (*O*);

b) Diện tích của phần tô màu xám.



Hình 50

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

47. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(1 ; 1)$. Khi đó, đường tròn $(A; 1)$

A. Tiếp xúc với trục Ox và cắt trục Oy tại 2 điểm phân biệt.

B. Tiếp xúc với trục Oy và cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

C. Tiếp xúc với cả hai trục Ox và trục Oy.

D. Đi qua gốc toạ độ O.

48. Cho các điểm A, B, C, D thuộc đường tròn tâm O đường kính $AC = 2$ cm với $\widehat{CBD} = 55^\circ$ (*Hình 51*).

a) Số đo góc CAD là

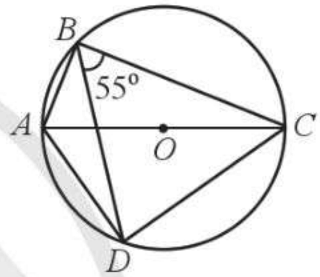
A. 35°. **B.** 145°.

C. 55°. **D.** 125°.

b) Độ dài đoạn thẳng CD là

A. $2 \cos 55^\circ$ cm. **B.** $2 \sin 55^\circ$ cm.

C. $2 \tan 55^\circ$ cm. **D.** $2 \cot 55^\circ$ cm.

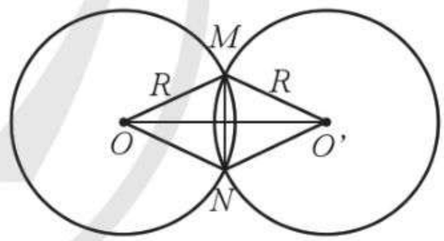


Hình 51

49. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại hai điểm M, N với $OO' = 24$ cm và $MN = 10$ cm (*Hình 52*). Khi đó, R bằng

A. 26 cm. **B.** 13 cm.

C. 14 cm. **D.** 34 cm.



Hình 52

50. Trong 20 giây, bánh xe của một chiếc xe máy quay được 80 vòng. Độ dài bán kính của bánh xe đó là 25 cm. Khi đó, quãng đường xe máy đi được trong 3 phút là:

A. $36\,000\pi$ m. **B.** 360π m. **C.** $18\,000\pi$ m. **D.** 180π m.

51. Diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn $(O; 12$ cm$)$ và $(O; 7$ cm$)$ là:

A. 95π cm^2. **B.** 193π cm^2. **C.** 5π cm^2. **D.** 19π cm^2.

52. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M di chuyển trên đường tròn (M khác A và B). Vẽ đường tròn (M) tiếp xúc với AB tại H. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC, BD của đường tròn (M) lần lượt tại C, D.

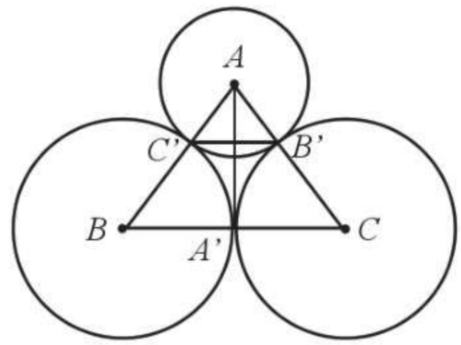
a) Chứng minh $AC + BD$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn (O).

b) Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

53. Cho ba đường tròn $(A;\ 10\text{ cm})$, $(B;\ 15\text{ cm})$, $(C;\ 15\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Đường tròn (A) tiếp xúc với (B) và (C) lần lượt tại C' và B'. Đường tròn (B) tiếp xúc với (C) tại A' (*Hình 53*).

a) Chứng minh AA' là tiếp tuyến chung của đường tròn (B) và (C).

b) Tính độ dài đoạn thẳng AA' và diện tích tam giác $AB'C'$.



Hình 53

54. Cho đường tròn $(O; R)$ và ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Trên cung BC không chứa điểm A, lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$.

a) Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{CDM}$.

b) Gọi E là giao điểm của tia OM và cung BC. Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi các bán kính OE, OC và cung nhỏ CE theo R, biết $BC = R\sqrt{2}$.

55. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C, D lần lượt là điểm chính giữa của cung AB, AC.

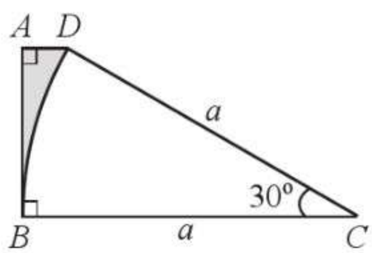
a) Chứng minh $\widehat{BAC} = \widehat{COD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACO}$.

b) Lấy điểm M thuộc cung CD. Chứng minh $AM > CM$ và $\widehat{COM} = 2\widehat{CAM}$.

c) Khi M di chuyển trên cung nhỏ AC, tìm vị trí của điểm M để diện tích của tam giác MAC lớn nhất.

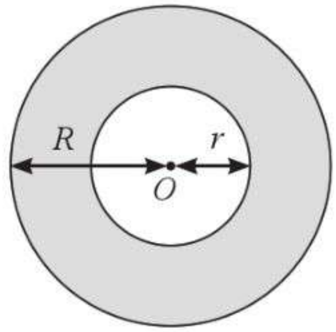
56. Thành phố Hồ Chí Minh có vĩ độ là $10^\circ 10'$ Bắc. Tìm độ dài cung kinh tuyến từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Xích Đạo (làm tròn kết quả đến hàng trăm của kilômét), biết mỗi kinh tuyến là một nửa vòng Trái Đất và có độ dài khoảng 20 000 km.

57. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$) với $\widehat{C} = 30^\circ$, $BC = CD = a$. Vẽ một phần đường tròn $(C; CD)$ (*Hình 54*). Tính diện tích của phần tô màu xám theo a.



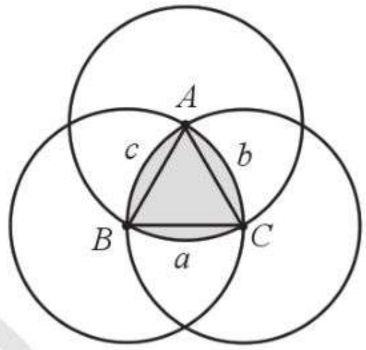
Hình 54

58. Cho hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; R)$, $(O; r)$ với $R + r = 1{,}2$ dm, $R > r$ và diện tích hình vành khuyên đó là $1{,}5072$ dm^2 (*Hình 55*). Tính R và r, lấy $\pi \approx 3{,}14$.



Hình 55

59. Tam giác Reuleaux là hình tạo nên từ phần giao nhau của ba đường tròn cùng bán kính, tâm của mỗi đường tròn chính là giao điểm của hai đường tròn còn lại. Tạo tam giác Reuleaux từ ba đường tròn (A), (B), (C) (*Hình 56*). Tính số đo các cung nhỏ BaC, CbA, AcB của tam giác Reuleaux. Nêu nhận xét về số đo của các cung tròn đó.



Hình 56

60. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B nằm trên đường tròn sao cho độ dài cung nhỏ AB bằng $\dfrac{5\pi R}{6}$.

a) Xác định điểm C trên cung lớn AB sao cho khi kẻ CH vuông góc với AB tại H thì $AH = CH$.

b) Tính độ dài các cung AC, BC theo R.

c) Kẻ OK vuông góc với AB tại K, tia OK cắt đường tròn (O) tại E. Tính diện tích hình quạt tròn EOB (giới hạn bởi cung nhỏ BE và hai bán kính OE, OB) theo R.

d) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích hình quạt tròn BOC (giới hạn bởi cung nhỏ BC và hai bán kính OB, OC) và diện tích hình quạt tròn AOC (giới hạn bởi cung nhỏ AC và hai bán kính OA, OC).

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Đường kính của đường tròn là 50 cm. Vì độ dài dây nhỏ hơn hoặc bằng độ dài đường kính của đường tròn nên độ dài dây lớn nhất của đường tròn là 50 cm.

2. Gọi $R = 4$ cm và $r = 1$ cm, ta có:

a) $R - r < OO' < R + r$: (O) và (O') cắt nhau;

b) $OO' > R + r$: (O) và (O') ở ngoài nhau;

c) $OO' < R - r$: (O) đựng (O').

3. Hai đường tròn $(O; 3{,}5$ cm$)$ và $(O'; 4{,}5$ cm$)$ tiếp xúc ngoài khi

$$OO' = 3{,}5 + 4{,}5 = 8 \text{ (cm)}.$$

4. Gọi H là giao điểm của OO' với AB (*Hình 57*). Khi đó, ta chứng minh được OO' là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay $AH = BH = \frac{AB}{2}$ và OO' vuông góc với AB tại H.

Đặt $OH = x$ (cm) thì $O'H = 21 - x$ (cm).

Ta có:

$OA^2 - OH^2 = O'A^2 - O'H^2$ (cùng bằng AH^2).

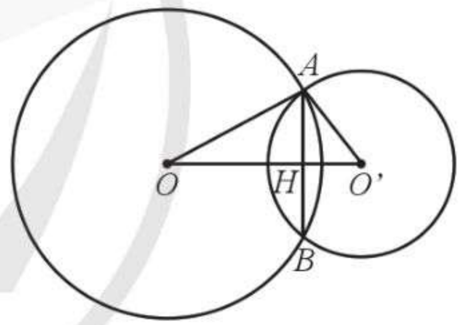
Suy ra

$17^2 - x^2 = 10^2 - (21 - x)^2$ hay $x = 15$ (cm).

Do tam giác OAH vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 8 \text{ cm}.$$

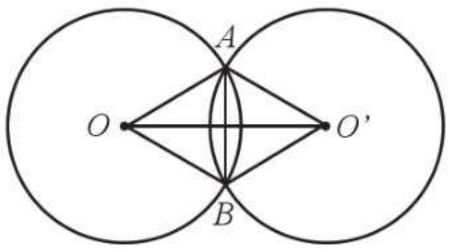
Vậy $AB = 2\,AH = 16$ cm.



Hình 57

5. (*Hình 58*)

Tứ giác $OAO'B$ có $OA = OB = O'A = O'B$ (cùng bằng bán kính của (O) và (O')) nên $OAO'B$ là hình thoi. Suy ra AB cắt OO' tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 58

6. Ta có: $OA = OB = 2$ km $= 2\,000$ m và $OH = 1\,732$ m.

Ta chứng minh được $AH = BH = \frac{AB}{2}$.

Do tam giác OAH vuông tại H nên $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{1\,000\,176}$ m.

Vậy $AB = 2\,AH \approx 2\,000$ m.

7. Gọi hòn đảo lớn là đường tròn $(O$; 500 m) và hòn đảo nhỏ là đường tròn $(O'$; 300 m). Lấy A thuộc đường tròn (O) và B thuộc đường tròn tâm (O') là hai vị trí đầu cầu (*Hình 59*). Khi đó, AB là chiều dài cây cầu và $OO' = 950$ m, $OA = 500$ m, $O'B = 300$ m.

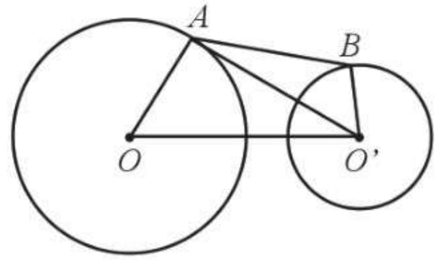
Xét ba điểm O', A, B, ta có: $AB \geq O'A - O'B$.

Xét ba điểm O, O', A, ta có: $O'A \geq OO' - OA$.

Do đó $AB \geq OO' - OA - O'B$ hay $AB \geq 150$ m.

Dấu "=" xảy ra khi bốn điểm O, A, B, O' thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vậy ta nên đặt cầu trên đoạn nối tâm của hai đảo thì cây cầu có chiều dài ngắn nhất là 150 m.



Hình 59

8. (*Hình 60*)

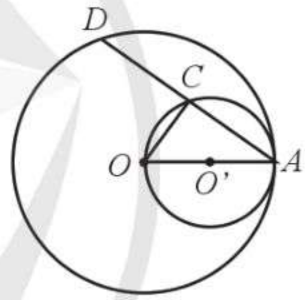
a) Do $OO' = OA - O'A$ nên hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại A.

b) Xét tam giác ACO, ta có

$$O'A = O'C = OO' \text{ hay } O'C = \frac{1}{2}AO.$$

Suy ra tam giác ACO vuông tại C hay $OC \perp AD$.

Vì $\Delta AOC = \Delta DOC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $AC = CD$.



Hình 60

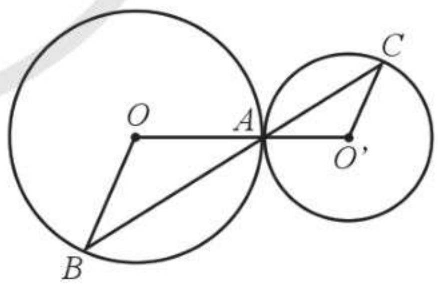
9. (*Hình 61*)

a) Do hai tam giác OAB và $O'AC$ là tam giác cân nên ta chứng minh được $\widehat{ABO} = \widehat{ACO'}$.

Do đó $OB \parallel O'C$.

b) Vì $\Delta OAB \backsim \Delta O'AC$ nên $\frac{AB}{AC} = \frac{OA}{O'A}$ hay $\frac{5}{AC} = \frac{3}{2}$.

Do đó $AC = \frac{10}{3}$ cm.



Hình 61

10. Hệ thống bánh răng ở các hình *8a*, *8b* chuyển động được. Hệ thống bánh răng ở *Hình 8c* không chuyển động được.

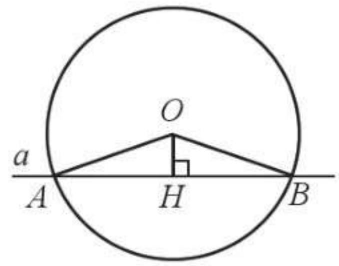
11. a) Kẻ OH vuông góc với a tại H (*Hình 62*). Khi đó, ta có: $OH = 1$ cm. Suy ra $OH < 3$ cm. Vậy đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau.

b) Vì $\Delta OAH = \Delta OBH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $AH = BH = \dfrac{AB}{2}$.

Do tam giác OAH vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Vậy $AB = 2\,AH = 4\sqrt{2}$ cm.

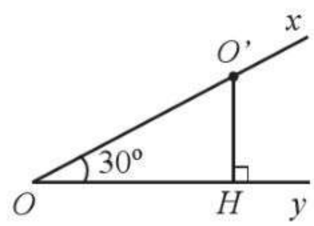


Hình 62

12. Kẻ $O'H$ vuông góc với Oy tại H (*Hình 63*). Khi đó, ta có: $O'H$ là khoảng cách từ điểm O' đến tia Oy.

a) Do tam giác $O'OH$ vuông tại H nên

$$O'H = OO' \,.\, \sin \widehat{O'OH} = 4 \,.\, \sin 30^\circ = 2 \text{ (cm).}$$



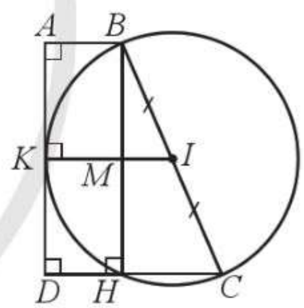
Hình 63

b) Nếu $R < 2$ cm thì đường tròn (O') và tia Oy không giao nhau.

Nếu $R = 2$ cm thì đường tròn (O') và tia Oy tiếp xúc nhau.

Nếu $2 \text{ cm} < R \leq 4$ cm thì đường tròn (O') và tia Oy cắt nhau.

13. Kẻ BH vuông góc với CD tại H, gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC, kẻ IK vuông góc với AD tại K, gọi M là giao điểm của IK và BH (*Hình 64*). Khi đó, ta chứng minh được: $IK \parallel CD$; các tứ giác $ABHD$, $ABMK$ là hình chữ nhật.



Hình 64

a) Do tứ giác $ABHD$ là hình chữ nhật nên

$$AD = BH \text{ và } DH = AB = 4 \text{ cm.}$$

Ta có: $CH = CD - DH = 5$ cm.

Do tam giác BCH vuông tại H nên $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 12$ cm.

Vậy $AD = 12$ cm.

b) Ta có đường tròn đường kính BC có tâm I và bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 6{,}5$ cm và khoảng cách từ tâm I đến AD là $d = IK$.

Do tứ giác $ABMK$ là hình chữ nhật nên $KM = AB = 4$ cm.

Xét tam giác BCH có $IM \parallel CH$ nên $\dfrac{IM}{CH} = \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $IM = \dfrac{1}{2}CH = 2{,}5$ cm.

Ta có: $IK = KM + IM = 6{,}5$ cm.

Do đó $d = R$. Vậy đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

14. $AB = R\sqrt{3}$.

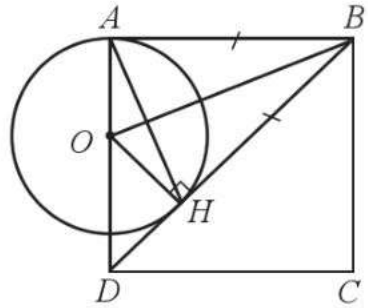
15. Do tam giác OCD cân tại O nên $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$ hay $\widehat{OCF} = \widehat{ODF}$.

Mà $\widehat{OCF} + \widehat{OFC} = 90^\circ$ và $\widehat{OFC} = \widehat{DFE}$, suy ra $\widehat{ODF} + \widehat{DFE} = 90^\circ$.

Ta lại có $\widehat{ODF} + \widehat{EDF} = 90^\circ$ nên $\widehat{DFE} = \widehat{EDF}$.

Do đó ΔEDF cân tại E. Suy ra $EF = ED$.

16. (*Hình 65*)



Hình 65

a) Vì $\Delta OAB = \Delta OHB$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $OA = OH$.

Tam giác OHD vuông tại H có $\widehat{ODH} = 45^\circ$ nên tam giác OHD vuông cân tại H. Suy ra $HD = OH$.

Vậy $OA = OH = HD$.

b) Vì $OA = OH$ và OH vuông góc với BD tại H nên BD là tiếp tuyến đường tròn $(O; OA)$. Vậy BD tiếp xúc với đường tròn $(O; OA)$.

17. a) Do $\Delta OIC = \Delta OID$ (c.c.c) nên $\widehat{OIC} = \widehat{OID} = 90^\circ$.

Vì $\Delta EOB \backsim \Delta EAI$ nên $\dfrac{EB}{EI} = \dfrac{EO}{EA}$.

Do đó $EB \,.\, EA = EI \,.\, EO$.

b) Do ΔOAB vuông tại B nên $AB^2 = OA^2 - OB^2 = OA^2 - R^2$.

Mặt khác, ta có: $AC \,.\, AD = (AI - CI)(AI + DI)$. Mà $CI = DI$, suy ra

$$AC \,.\, AD = AI^2 - CI^2 = AI^2 - (OC^2 - OI^2) = AI^2 - OC^2 + OI^2$$
$$= AI^2 - R^2 + OA^2 - AI^2 = OA^2 - R^2.$$

Do đó $AB^2 = AC \,.\, AD$ (vì cùng bằng $OA^2 - R^2$).

18. Ta có: $BH = OH - OB = OH - \dfrac{OA}{2} = 3$ cm.

Do ΔIBH vuông tại H nên $IB^2 = IH^2 + BH^2 = IH^2 + 9$.

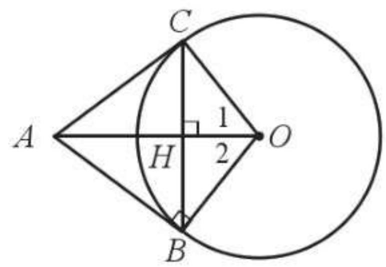
Do ΔICO vuông tại C nên

$$IC^2 = IO^2 - OC^2 = (OH^2 + IH^2) - OC^2 = (5^2 + IH^2) - 4^2 = IH^2 + 9.$$

Do đó $IB^2 = IC^2$ (vì cùng bằng $IH^2 + 9$).

Vậy $IB = IC$ hay tam giác IBC cân tại I.

19. (*Hình 66*)



Hình 66

a) Vì $\Delta OCH = \Delta OBH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Từ đó, ta chứng minh được $\Delta OAC = \Delta OAB$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 90^\circ$ hay AC vuông góc với OC tại C. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Do tam giác OAB vuông tại B nên

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 20 \text{ cm}.$$

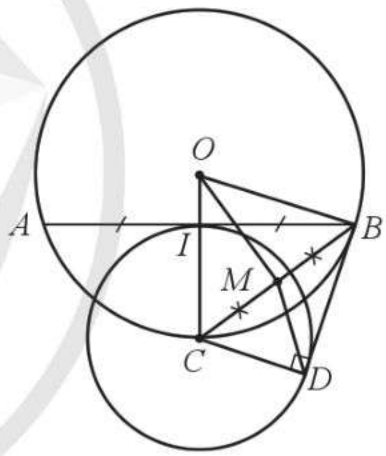
Vì $\Delta OBH \backsim \Delta OAB$ nên $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{OB}{OA}$ hay $BH = \dfrac{OB \cdot AB}{OA} = 12$ cm.

Do $\Delta OCH = \Delta OBH$ nên $BH = CH = \dfrac{BC}{2}$ hay $BC = 2\,BH = 24$ cm.

Do $\Delta OAC = \Delta OAB$ nên $AC = AB = 20$ cm.

Vậy tam giác ABC có $AB = AC = 20$ cm và $BC = 24$ cm.

20. a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC (*Hình 67*).



Hình 67

Ta chứng minh được OC là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Do tam giác BIC vuông tại I và tam giác BCD vuông tại D nên

$$IM = DM = CM = BM = \frac{BC}{2}.$$

Do đó bốn đỉnh của tứ giác $BDCI$ cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

b) Do BI, BD là tiếp tuyến của đường tròn (C) nên $\widehat{BCI} = \widehat{BCD}$.

Mà $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (vì tam giác OBC cân tại O) hay $\widehat{OBC} = \widehat{BCI}$, suy ra $\widehat{OBC} = \widehat{BCD}$.

Ta lại có $\widehat{CBD} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $\widehat{CBD} + \widehat{OBC} = 90^\circ$ hay $\widehat{OBD} = 90^\circ$.

Suy ra BD vuông góc với OB tại B. Vậy BD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

21. (*Hình 68*)

a) Ta chứng minh được tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{ACO} = 30^\circ$.

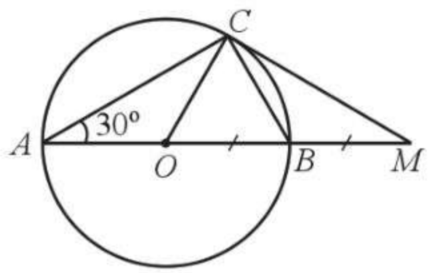
Suy ra $\widehat{OCB} = 60^\circ$.

Mà tam giác OBC cân tại O, suy ra tam giác OBC đều hay $BC = OB = \frac{OM}{2}$. Do đó tam giác OCM vuông tại C hay MC vuông góc với OC tại C.

Vậy MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Do tam giác OCM vuông tại C nên

$$CM = \sqrt{OM^2 - OC^2} = R\sqrt{3}.$$



Hình 68

22. (*Hình 69*)

a) Do BM, BN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

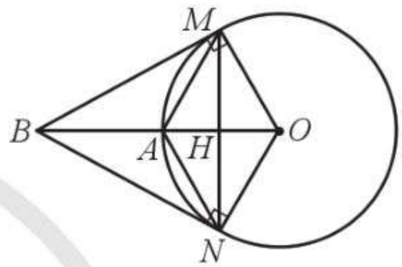
$BM = BN$ và $\widehat{OBM} = \widehat{OBN} = \frac{\widehat{MBN}}{2}$.

Vì tam giác MBO vuông tại M nên

$$\sin \widehat{OBM} = \frac{OM}{OB} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{OBM} = 30^{\circ}$. Do đó

$$\widehat{MBN} = 2\widehat{OBM} = 60^{\circ}.$$



Hình 69

Do tam giác OBM vuông tại M nên

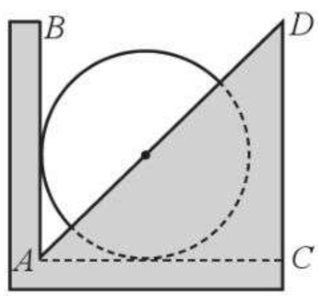
$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = R\sqrt{3}.$$

b) Ta chứng minh được các tam giác OAM, OAN đều.

Suy ra $AM = OM = ON = AN$. Do đó tứ giác $AMON$ là hình thoi.

c) Do tứ giác $AMON$ là hình thoi nên $OH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

23. Để tìm tâm của một hình tròn, ta đặt hình tròn đó tiếp xúc với hai cạnh AB và AC. Vạch theo AD ta được một đường thẳng đi qua tâm của hình tròn. Xoay hình tròn và làm tương tự, ta được một đường thẳng nữa đi qua tâm của hình tròn. Giao điểm của hai đường vừa kẻ là tâm của hình tròn (*Hình 70*).



Hình 70

24. a) Ta chứng minh được $Ax \parallel By$.

Do Ax, By, CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AC = CM$, $BD = DM$.

Mà $\frac{NA}{ND} = \frac{AC}{BD}$ (vì tam giác ANC có $AC \parallel BD$), suy ra $\frac{NA}{ND} = \frac{CM}{DM}$.

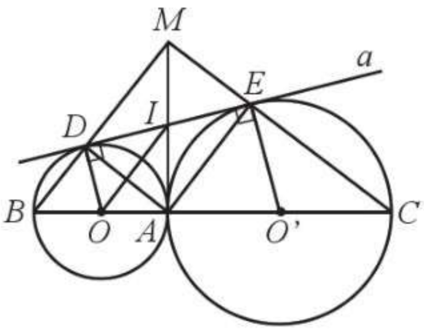
Do đó $MN \,//\, AC$. Suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{BAx} = 90^\circ$ hay $MN \perp AB$.

b) Do $MN \,//\, AC \,//\, BD$ nên theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{DN}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{NH}{AC}.$$

Do đó $MN = NH$.

25. Gọi I là giao điểm của AM và DE (*Hình 71*).



Hình 71

a) Ta chứng minh được $OD \,//\, O'E$. Suy ra

$$\widehat{BOD} = \widehat{AO'E}.$$

Mà tam giác OBD cân tại O và tam giác $O'AE$ cân tại O', suy ra $\widehat{OBD} = \widehat{O'EA}$.

Vì hai tam giác $O'AE$, $O'CE$ cân tại O' nên

$$\widehat{O'AE} = \widehat{O'EA},\ \widehat{O'CE} = \widehat{O'EC}.$$

Mà $\widehat{O'AE} + \widehat{AEC} + \widehat{O'CE} = 180^\circ$ và $\widehat{AEC} = \widehat{O'EA} + \widehat{O'EC}$, suy ra

$$\widehat{O'AE} + \widehat{O'CE} = 90^\circ.$$

Do đó $\widehat{OBD} + \widehat{O'CE} = 90^\circ$.

Ta lại có $\widehat{OBD} + \widehat{BMC} + \widehat{O'CE} = 180^\circ$ nên $\widehat{BMC} = 90^\circ$ hay $\widehat{DME} = 90^\circ$.

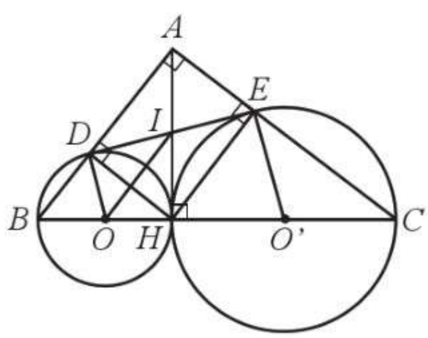
b) Ta chứng minh được tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật. Suy ra $IA = ID$.

Do đó $\Delta OAI = \Delta ODI$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{OAI} = \widehat{ODI} = 90^\circ$ hay MA vuông góc với BD tại A.

Vậy MA tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O').

c) Do $\Delta BCM \backsim \Delta EDM$ nên $\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MC}{MD}$. Suy ra $MD \,.\, MB = ME \,.\, MC$.

26. Gọi I là giao điểm của AH và DE (*Hình 72*).



Hình 72

a) Do tam giác BDH vuông tại D nên

$$OD = OB = OH = \frac{BH}{2}.$$

Vậy điểm D thuộc đường tròn (O).

Tương tự, ta chứng minh được điểm E thuộc đường tròn (O').

b) Do $OO' = OH + O'H$ nên hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại H.

c) Do AH vuông góc với OO' tại H nên AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

d) Ta chứng minh được tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật. Suy ra $AH = DE$.

e) Do $\Delta ODI = \Delta OHI$ (c.c.c) nên $\widehat{ODI} = \widehat{OHI} = 90^\circ$ hay $OD \perp DE$.

Tương tự, ta chứng minh được $O'E \perp DE$.

Do đó tứ giác $DEO'O$ là hình thang có DE là đường cao.

Diện tích hình thang $DEO'O$ và tam giác ABC lần lượt là:

$$S_1 = \frac{DE(OD + O'E)}{2} \text{ và } S_2 = \frac{AH \,.\, BC}{2}.$$

Mà $DE = AH$ và $BC = BH + CH = 2(OD + O'E)$, suy ra $S_1 = \frac{1}{2}S_2$.

Vậy diện tích tứ giác $DEO'O$ bằng nửa diện tích tam giác ABC.

27. Do góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó nên các góc ABC, HIK, QRS là góc nội tiếp.

28. D.

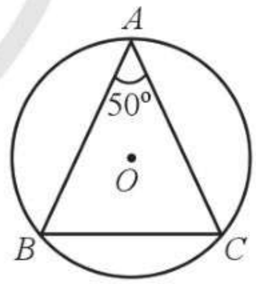
29. Các cung tương ứng với phần biểu diễn số lớp học cấp trung học cơ sở của các tỉnh Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng tính đến ngày 30/9/2021 lần lượt có số đo là: 39,6°; 86,4°; 118,8°; 36°; 79,2°.

30. (*Hình 73*)

Do tam giác ABC cân tại A nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 65^\circ.$$

Ta có: số đo cung nhỏ AB bằng 130°, số đo cung nhỏ BC bằng 100°. Vậy cung nhỏ AB lớn hơn cung nhỏ BC.



Hình 73

31. Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{IHK} = 90^\circ$ nên $\widehat{BAC}$ và $\widehat{IHK}$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Suy ra BC và HK là hai đường kính của đường tròn (O). Khi đó, BC cắt HK tại tâm O của đường tròn.

32. (Học sinh tự vẽ hình)

a) Do $\widehat{AMB} = 40^\circ$ nên $\widehat{AOB} = 140^\circ$. Suy ra số đo cung nhỏ AB bằng 140° và số đo cung lớn AB bằng 360° – 140° = 220°.

b) Do số đo cung nhỏ AB bằng 120° suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{BOM} = 60^\circ$.

Do tam giác OBM vuông tại B nên $BM = OB \cdot \tan \widehat{BOM} = R\sqrt{3}$.

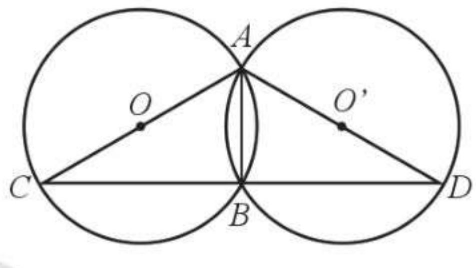
Vì $\Delta OAM = \Delta OBM$ (c.c.c) nên diện tích tứ giác $OAMB$ là:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BM = R^2\sqrt{3}.$$

33. (*Hình 74*)

Ta có: AC, AD lần lượt là đường kính của đường tròn (O), (O') nên $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$. Do đó $\Delta ABC = \Delta ABD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Suy ra $BC = BD$.

Vậy độ dài dây BC của đường tròn (O) bằng độ dài dây BD của đường tròn (O').



Hình 74

34. Kẻ đường kính MN của đường tròn (O) (*Hình 75*). Khi đó, MN là đường trung trực của đoạn thẳng AB và cắt AB tại K. Suy ra điểm O thuộc MN và $AK = BK = \frac{AB}{2} = 20$ m.

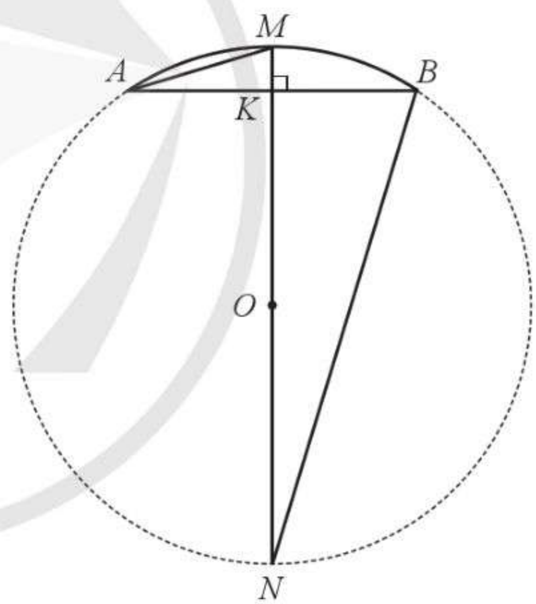
Do $\Delta AKM \backsim \Delta NKB$ nên $\frac{AK}{NK} = \frac{MK}{BK}$

hay $NK = \frac{AK \cdot BK}{MK} = \frac{400}{6}$ m.

Gọi R là bán kính của đường tròn (O).

Ta có: $2R = MN = MK + NK = \frac{218}{3}$ m.

Vậy bán kính của đường tròn chứa cung AMB là $\frac{109}{3} \approx 36{,}3$ (m).

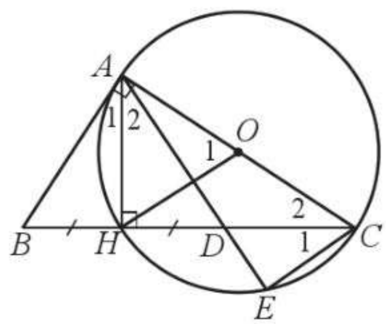


Hình 75

35. (*Hình 76*)

a) Do $\Delta ABH = \Delta ADH$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (vì cùng phụ $\widehat{CAH}$)



Hình 76

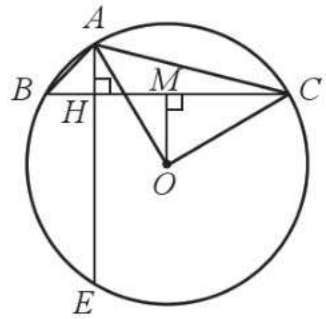
và $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EH), suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Vậy CH là tia phân giác của góc ACE.

b) Do $\widehat{O_1} = 2\widehat{C_2}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AH) và $\widehat{OCE} = 2\widehat{C_2}$ (vì CH là tia phân giác của góc ACE) nên $\widehat{O_1} = \widehat{OCE}$.

Vậy $OH \,//\, CE$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

36. Kẻ OM vuông góc với BC tại M (*Hình 77*).



Hình 77

a) Ta có: $\widehat{CAH} + \widehat{ACH} = 90^\circ$ nên $\widehat{CAH} = 75^\circ$.

Do đó số đo cung nhỏ CE bằng $2 \,.\, 75^\circ = 150^\circ$.

Ta lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ nên

$$\widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Do đó số đo cung lớn BC bằng $2 \,.\, 120^\circ = 240^\circ$.

b) Ta có: $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Suy ra tam giác OAC vuông cân tại O.

Do đó $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2}$ dm.

Do $\Delta OBM = \Delta OCM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên $BM = CM = \dfrac{BC}{2}$.

Ta có: $\widehat{OCM} = \widehat{OCA} - \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Do tam giác OCM vuông tại M nên $CM = OC \,.\, \cos \widehat{OCM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dm.

Vậy $BC = 2\,CM = \sqrt{3}$ dm.

37.

Bán kính đường tròn (R)	**Chu vi đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn (n°)**	**Độ dài của cung tròn có số đo n°**	**Diện tích của hình quạt tròn có số đo n°**
2 cm	**12,56 cm**	12,56 cm^2	135°	**4,71 cm**	**4,71 cm^2**
0,6 cm	**3,768 cm**	**1,1304 cm^2**	**120°**	1,256 cm	**0,3768 cm^2**
4 cm	**25,12 cm**	50,24 cm^2	**45°**	**3,14 cm**	6,28 cm^2
3 cm	**18,84 cm**	**28,26 cm^2**	**12°**	**0,628 cm**	0,942 cm^2

38. a) Quãng đường đi được của Mặt Trăng sau 1 ngày khoảng:

$$\frac{2\pi\,.\,385\ 000}{27,3} \approx 89\ 000\ \text{(km)}.$$

b) Tốc độ của Mặt Trăng khoảng:

$$\frac{2\pi\,.\,385\ 000\,.\,1\ 000}{27,3\,.\,24\,.\,60\,.\,60} \approx 1\ 026\ \text{(m/s)}.$$

39. (Học sinh tự vẽ hình)

Do $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{A} = \widehat{C}$. Đặt $\widehat{A} = \widehat{C} = n^o$.

Độ dài của cung nhỏ BD của đường tròn (A) là: $l_1 = \dfrac{\pi\,.\,5\,.\,n}{180}$ (cm).

Độ dài của cung nhỏ EF của đường tròn (C) là: $l_2 = \dfrac{\pi\,.\,3\,.\,n}{180}$ (cm).

Vậy tỉ số độ dài của cung nhỏ BD của đường tròn (A) và cung nhỏ EF của đường tròn (C) là $\dfrac{5}{3}$.

40. a) Ta chứng minh được tứ giác $AOMO'$ là hình vuông. Suy ra

$$\widehat{AOM} = \widehat{AO'M} = 90^o.$$

Do đó, độ dài cung AmM và cung AnM tương ứng của đường tròn (O) và (O') cùng bằng $\dfrac{\pi a\,.\,90}{180} = \dfrac{\pi a}{2}$.

b) Diện tích của phần tô màu xám là:

$$2\cdot\left(\frac{\pi a^2\,.\,90}{360} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{(\pi-2)a^2}{2}.$$

41. Do tam giác OAM vuông tại M nên $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2}$ và $\cos\widehat{AOM} = \dfrac{OM}{OA}$.

Suy ra $AM = R\sqrt{3}$ và $\widehat{AOM} = 60^o$.

Vì $\Delta OAM = \Delta OBM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên

$$AM = BM = \frac{AB}{2} \text{ và } \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{\widehat{AOB}}{2}.$$

Suy ra $AB = 2AM = 2R\sqrt{3}$ và $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 120^o$.

Do AM, AN là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ nên

$$\widehat{AOM} = \widehat{AON} = \frac{\widehat{MON}}{2} \text{ hay } \widehat{MON} = 2\widehat{AOM} = 120^o.$$

Ta có:

S_1 = Diện tích hình quạt tròn AOB – Diện tích tam giác $OAB = R^2\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$;

$S_2 = 2$. Diện tích tam giác OAM – Diện tích hình quạt tròn $MON = R^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

S_3 = Diện tích hình tròn $(O; R) = \pi R^2$.

Vậy $S_1 + S_2 = S_3$.

42. Độ dài cung nhỏ NQ là: $l_1 = \dfrac{\pi a \,.\, 120}{180} = \dfrac{2\pi a}{3}$.

Độ dài cung lớn MP là: $l_2 = \dfrac{\pi \,.\, 4a \,.\, 240}{180} = \dfrac{16\pi a}{3}$.

Ta có: $MN = PQ = AM - AN = OM \,.\, \cot \widehat{OAM} - O'N \,.\, \cot \widehat{OAM} = 3a\sqrt{3}$.

Độ dài của dây Curoa mắc qua hai ròng rọc là:

$$\frac{2\pi a}{3} + \frac{16\pi a}{3} + 2 \,.\, 3a\sqrt{3} = 6a\left(\pi + \sqrt{3}\right).$$

43. Diện tích hình quạt tròn OPQ là: $S_1 = \dfrac{\pi \,.\, 5^2 \,.\, 90}{360} = \dfrac{25\pi}{4}$ (cm^2).

Ta chứng minh được tứ giác $POQO'$ là hình vuông.

Suy ra diện tích tam giác OPQ là:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \text{Diện tích hình vuông } POQO' = \frac{1}{2} \cdot 5^2 = \frac{25}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần hình tạo bởi cung nhỏ PQ của đường tròn (O) và dây PQ là:

$$S_3 = S_1 - S_2 = \frac{25}{4}(\pi - 2) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần chung của hai nửa đường tròn (O), (O') là:

$$S = 2\,S_3 = \frac{25}{2}(\pi - 2) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

44. Diện tích mặt bàn là: $1{,}8 \,.\, 1{,}2 + \pi \,.\, 0{,}6^2 = 2{,}16 + 0{,}36\,\pi$ (cm^2).

Số tiền bác Long phải trả để làm được mặt bàn đó là:

$$100\,000 \,.\, (2{,}16 + 0{,}36\,\pi) \approx 329\,000 \text{ (đồng)}.$$

45. Diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó là:

$$2 \,.\, 15 \,.\, 5 + \frac{1}{2}\pi \,.\, (15^2 - 10^2) \approx 346{,}35 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

46. a) Ta chứng minh được tứ giác $AOBM$ là hình thoi. Ta tính được $\widehat{AOM} = 60^\circ$, $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 30^\circ$, $OO' = 4$ cm, $AB = 8\sqrt{3}$ cm.

Diện tích tam giác OAB là: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$ (cm^2).

Do $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ nên diện tích hình quạt tròn OAD và diện tích hình quạt tròn OBC bằng nhau và bằng:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 30}{360} = \frac{16\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần hình giới hạn bởi dây AB, cung nhỏ AD, đường kính CD và cung nhỏ BC của đường tròn (O) là:

$$S_3 = S_1 + 2S_2 \approx 61 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Diện tích của phần tô màu xám là:

$$\pi \cdot 16^2 - \pi \cdot 8^2 \approx 603 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

47. **C**. **48.** a) **C**. b) **B**. **49.** **B**. **50.** **B**. **51.** **A**.

52. (*Hình 78*)

a) Do AC, AH là hai tiếp tuyến của đường tròn (M) nên $AC = AH$. Tương tự, ta chứng minh được

$$BD = BH.$$

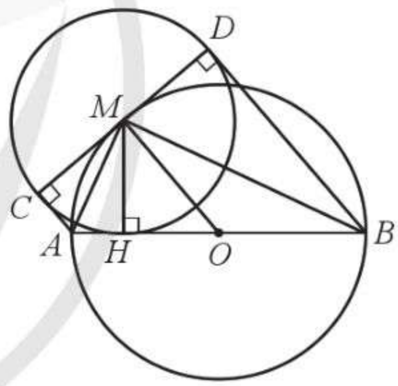
Do đó $AC + BD = AH + BH = AB$ (không đổi).

b) Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{AMH}$, $\widehat{BMD} = \widehat{BMH}$

và $\widehat{AMH} + \widehat{BMH} = \widehat{AMB} = 90^\circ$

nên $\widehat{CMD} = 180^\circ$

hay ba điểm C, M, D thẳng hàng.



Hình 78

Do tam giác OBM cân tại O nên $2\widehat{OBM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$.

Ta lại có: $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$ nên $\widehat{AOM} = 2\widehat{OBM} = \widehat{ABD}$.

Do đó $OM \,//\, BD$ (hai góc đồng vị bằng nhau). Suy ra $\widehat{OMC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ hay CD vuông góc với OM tại M. Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

53. a) Ta có $AB = AC' + BC' = 25$ cm và $AC = AB' + CB' = 25$ cm nên $AB = AC$. Mặt khác, $BA' = CA' = 15$ cm nên AA' là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Suy ra AA' vuông góc với BC tại A'.

Vậy AA' là tiếp tuyến chung của đường tròn (B) và (C).

b) Gọi H là giao điểm của AA' và $B'C'$ (*Hình 79*).

Do tam giác ABA' vuông tại A' nên

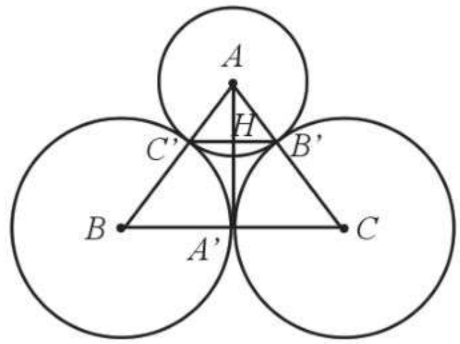
$$AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = 20 \text{ cm}.$$

Ta có: $BC = BA' + CA' = 30$ cm.

Tam giác ABC có $\dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{AB'}{AC}$ nên $B'C' \,//\, BC$.

Suy ra $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{AB'}{AC}$

hay $B'C' = \dfrac{AB' \,.\, BC}{AC} = 12$ cm.



Hình 79

Tam giác ACA' có $HB' \,//\, CA'$ nên $\dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{AB'}{AC}$ hay $AH = \dfrac{AB' \,.\, AA'}{AC} = 8$ cm.

Ta chứng minh được $AH \perp B'C'$ nên diện tích tam giác $AB'C'$ là:

$$\frac{1}{2} \cdot B'C' \,.\, AH = 48 \text{ cm}^2.$$

54. (*Hình 80*)

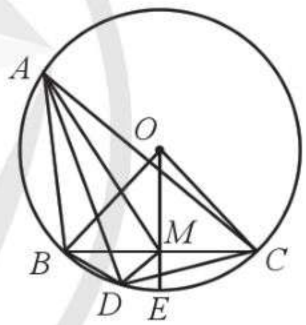
a) Do $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ nên $\widehat{BAM} = \widehat{DAC}$.

Ta lại có: $\widehat{ABM} = \widehat{ADC}$ nên $\Delta ABM \backsim \Delta ADC$.

Suy ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{CM}{CD}$.

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{MCD}$, suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta CMD$.

Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{CDM}$.



Hình 80

b) Do $\Delta OBM = \Delta OCM$ (c.c.c) nên ta tính được

$$CM = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ và } \widehat{OMC} = 90^\circ.$$

Vì tam giác OCM vuông tại M nên

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

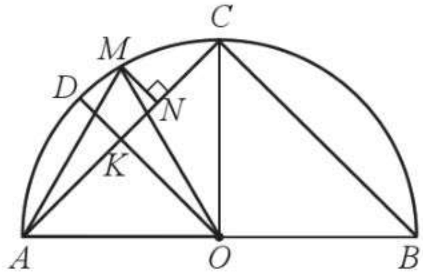
Do đó $OM = CM$.

Vì vậy, tam giác OCM vuông cân tại M. Suy ra $\widehat{COE} = 45^\circ$.

Diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi các bán kính OE, OC và cung nhỏ CE là:

$$S = \frac{\pi R^2 \,.\, 45}{360} = \frac{\pi R^2}{8}.$$

55. Gọi K là giao điểm của AC và OD, kẻ MN vuông góc với AC tại N (*Hình 81*).



Hình 81

a) Do C, D lần lượt là điểm chính giữa của cung AB, AC nên

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = 90^\circ;\ \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} = 45^\circ.$$

Từ đó, ta tính được

$$\widehat{BAC} = \widehat{COD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACO} = 45^\circ.$$

Vậy $\widehat{BAC} = \widehat{COD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACO}$.

b) Do M thuộc cung nhỏ CD nên sđ$\overset{\frown}{AM} > 45^\circ$ và sđ$\overset{\frown}{CM} < 45^\circ$. Suy ra

$$\widehat{ACM} > \widehat{CAM}.$$

Tam giác ACM có $\widehat{ACM} > \widehat{CAM}$ nên $AM > CM$.

Xét đường tròn (O), ta có: $\widehat{COM} = 2\widehat{CAM}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ CM).

c) Diện tích của tam giác MAC là: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \,.\, MN$.

Do đó S lớn nhất khi MN lớn nhất.

Ta lại có: $MN + OK \le OM$ và $OM = OD = DK + OK$ nên $MN \le DK$.

Do DK không đổi nên MN lớn nhất khi M là điểm chính giữa của cung AC.

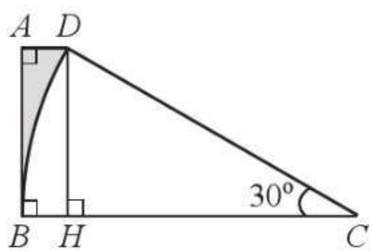
Vậy diện tích của tam giác MAC lớn nhất bằng $\frac{1}{2} \cdot AC \,.\, DK$ khi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC.

56. Đổi $10^\circ 10' = \left(\frac{61}{6}\right)^\circ$.

Độ dài cung kinh tuyến từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Xích Đạo là:

$$\frac{20\ 000 \cdot \frac{61}{6}}{180} \approx 1\ 100\ (\text{km}).$$

57. Kẻ DH vuông góc với BC tại H (*Hình 82*).



Hình 82

Do tam giác CDH vuông tại H nên

$$DH = CD \,.\, \sin C = \frac{a}{2} \text{ và } CH = CD \,.\, \cos C = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có: $BH = BC - CH = \dfrac{a(2-\sqrt{3})}{2}$.

Ta chứng minh được tứ giác $ABHD$ là hình chữ nhật. Suy ra

$$AB = DH = \frac{a}{2};\ AD = BH = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là: $S_1 = \dfrac{AB(AD+BC)}{2} = \dfrac{a^2\left(4-\sqrt{3}\right)}{8}$.

Diện tích hình quạt tròn BCD là: $S_2 = \dfrac{\pi a^2 \,.\, 30}{360} = \dfrac{\pi a^2}{12}$.

Diện tích của phần tô màu xám là: $S = S_1 - S_2 = \dfrac{a^2\left(12-3\sqrt{3}-2\pi\right)}{24}$.

58. Do diện tích hình vành khuyên đó là 1,5072 dm^2 nên $3{,}14(R^2 - r^2) = 1{,}5072$ hay $(R-r)(R+r) = 0{,}48$. Mà $R + r = 1{,}2$ nên $R - r = 0{,}4$. Từ đó, ta tính được $R = 0{,}8$ (dm) và $r = 0{,}4$ (dm).

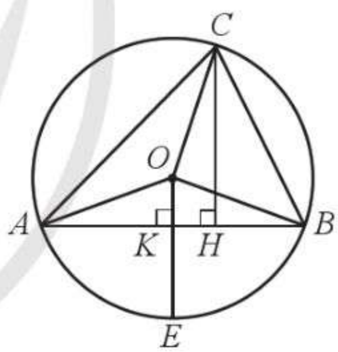
59. Do tam giác ABC đều nên $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$. Do đó, số đo các cung nhỏ BaC, CbA, AcB của tam giác Reuleaux đều bằng 120°.

60. (*Hình 83*)

a) Đặt $\widehat{AOB} = n^\circ$. Khi đó, ta có sđ$\overset{\frown}{AB} = n^\circ$. Do đó $\dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{5\pi R}{6}$. Suy ra $\widehat{AOB} = 150^\circ$ hay sđ$\overset{\frown}{AB} = 150^\circ$.

Tam giác ACH có $\widehat{AHC} = 90^\circ$, $AH = CH$ nên tam giác ACH vuông cân tại H. Suy ra

$$\widehat{BAC} = 45^\circ \text{ hay sđ}\overset{\frown}{BC} = 90^\circ.$$



Hình 83

b) Độ dài cung nhỏ AC và cung nhỏ BC lần lượt là $\dfrac{2\pi R}{3}$ và $\dfrac{\pi R}{2}$.

c) Diện tích hình quạt tròn EOB là $\dfrac{5\pi R^2}{24}$.

d) Diện tích các hình quạt tròn BOC và diện tích hình quạt AOC lần lượt là $\dfrac{\pi R^2}{4}$ và $\dfrac{\pi R^2}{3}$. Vậy tỉ số phần trăm giữa diện tích hình quạt tròn BOC và diện tích hình quạt tròn AOC là 75%.

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 5

§1. Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn 5

§2. Phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn 10

§3. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn 15

Bài tập cuối chương I 21

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 24

CHƯƠNG II. BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 30

§1. Bất đẳng thức 30

§2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn 37

Bài tập cuối chương II 43

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 45

CHƯƠNG III. CĂN THỨC 50

§1. Căn bậc hai và căn bậc ba của số thực 50

§2. Một số phép tính về căn bậc hai của số thực 54

§3. Căn thức bậc hai và căn thức bậc ba của biểu thức đại số 59

§4. Một số phép biến đổi căn thức bậc hai của biểu thức đại số 62

Bài tập cuối chương III 68

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 70

	Trang
CHƯƠNG IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG	79
§1. Tỉ số lượng giác của góc nhọn	79
§2. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông	83
§3. Ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn	86
Bài tập cuối chương IV	90
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số	92
CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN	99
§1. Đường tròn. Vị trí tương đối của hai đường tròn	99
§2. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	104
§3. Tiếp tuyến của đường tròn	107
§4. Góc ở tâm. Góc nội tiếp	110
§5. Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn, diện tích hình vành khuyên	117
Bài tập cuối chương V	123
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số	126

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ QUÝ – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ

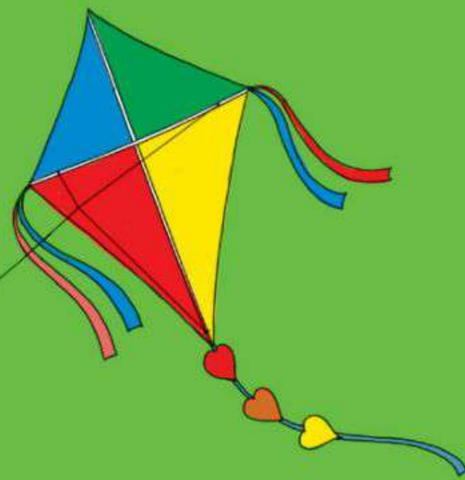
Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

Trình bày bìa:
NGUYỄN THỊ HƯƠNG

Sửa bản in:
VŨ THỊ MINH THẢO

BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP MỘT

Mã số:
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 17 x 24cm, tại ....
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản:
Quyết định xuất bản số: ..../QĐ-NXBĐHSP ngày ....../....../2024
In xong và nộp lưu chiểu năm 2024.



Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9
Cánh Diều

1. Ngữ văn 9 (Tập một, Tập hai)
2. Toán 9 (Tập một, Tập hai)
3. Giáo dục công dân 9
4. Lịch sử và Địa lí 9
5. Khoa học tự nhiên 9
6. Công nghệ 9 – Định hướng nghề nghiệp
7. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Trồng cây ăn quả
8. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Chế biến thực phẩm
9. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà
10. Tin học 9
11. Giáo dục thể chất 9
12. Âm nhạc 9
13. Mĩ thuật 9
14. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 9
15. Tiếng Anh 9 Explore English

TÌM ĐỌC

CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 9 (Cánh Diều)
THEO TỪNG MÔN HỌC

SỬ DỤNG TEM CHỐNG GIẢ

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com

ISBN 978-604-486-413-6

9 786044 864136

Giá: 31.000đ

Bản in thử