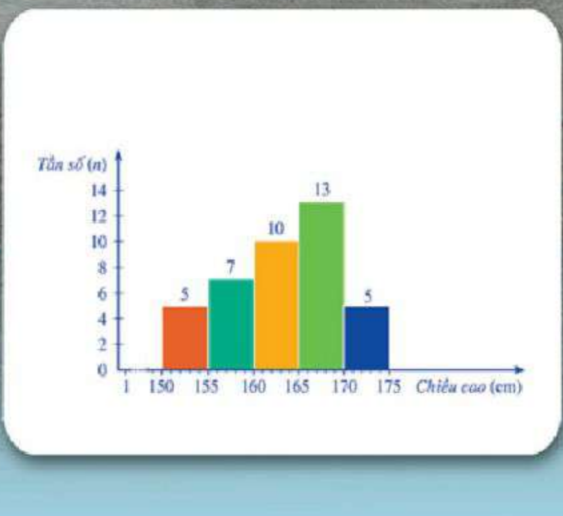
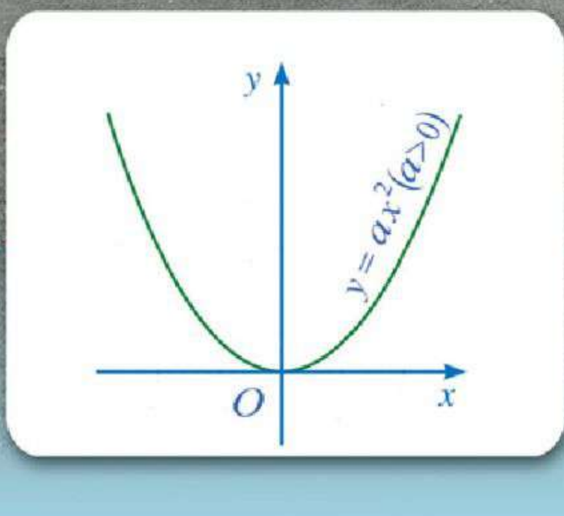
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 9

TẬP HAI





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Bản in thử

Sách giáo khoa được thẩm định bởi Hội đồng quốc gia thẩm định sách giáo khoa lớp 9
*(Theo Quyết định số 1551/QĐ-BGDĐT ngày 05 tháng 6 năm 2023
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)*

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 9

TẬP HAI

(Sách đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông tại Quyết định số 4338/QĐ-BGDĐT ngày 18/12/2023)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Chương VI

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ; tần số, tần số tương đối; tần số ghép nhóm, tần số tương đối ghép nhóm; phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu, xác suất của biến cố trong một số trò chơi đơn giản.

§1. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG, BIỂU ĐỒ

Ở các lớp dưới, chúng ta đã làm quen với việc biểu diễn, phân tích và xử lí dữ liệu thu được ở dạng bảng, biểu đồ thống kê.

Làm thế nào để mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ?

I. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BẢNG THỐNG KÊ, BIỂU ĐỒ TRANH

1 Một trường trung học cơ sở cho học sinh khối lớp 9 đăng kí tham gia các câu lạc bộ: Thể thao; Nghệ thuật; Tin học. Thống kê số lượng học sinh của từng lớp đăng kí tham gia các câu lạc bộ đó được cho trong bảng sau:

Câu lạc bộ / Số học sinh lớp	Thể thao	Nghệ thuật	Tin học
9A	15	10	15
9B	20	5	15
9C	15	15	10
9D	20	10	10

Bảng 1

a) *Bảng 1* có bao nhiêu dòng và bao nhiêu cột?

b) Cột đầu tiên, dòng đầu tiên của *Bảng 1* lần lượt cho biết những dữ liệu thống kê nào?

c) Các cột còn lại của *Bảng 1* lần lượt cho biết những dữ liệu thống kê nào?

Để biểu diễn dữ liệu trên bảng thống kê, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở cột đầu tiên, trong khi các tiêu chí thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng đầu tiên hoặc ngược lại

Bước 2. Các số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng (hoặc cột) tương ứng.

Ví dụ 1 Trị giá xuất khẩu hải sản (đơn vị: nghìn đô la Mỹ) của Việt Nam sang Liên minh châu Âu (EU) trong các tháng 9, 10, 11, 12 năm 2022 lần lượt như sau: 90 154; 89 412; 72 134; 81 904. (*Nguồn: https://www.gso.gov.vn*)

Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

Giải

Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 2*):

Tháng / Trị giá	9	10	11	12
Trị giá xuất khẩu hải sản (đơn vị: nghìn đô la Mỹ)	90 154	89 412	72 134	81 904

Bảng 2

1 Trị giá xuất khẩu dầu thô (đơn vị: triệu đô la Mỹ) của Việt Nam sang Nhật Bản, Australia, Singapore, Thái Lan năm 2021 lần lượt như sau: 158,08; 263,00; 272,69; 577,66.
(Nguồn: Báo cáo của Bộ Công Thương về xuất nhập khẩu của Việt Nam năm 2021)

Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

Ví dụ 2 *Bảng 3* thống kê khối lượng thanh long bán được trong các tháng 6, 7, 8, 9 năm 2022 của một hệ thống siêu thị.

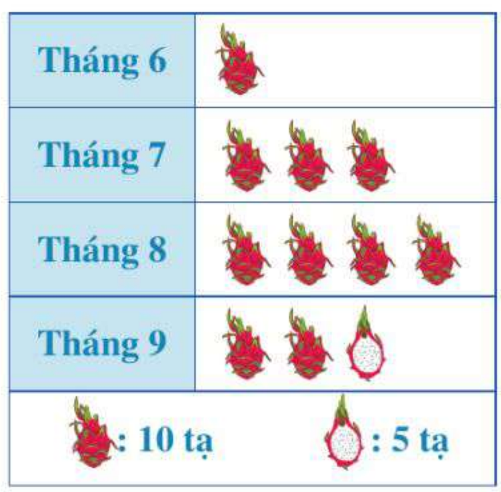
Tháng	6	7	8	9
Khối lượng thanh long bán được (đơn vị: tạ)	10	30	40	25

Bảng 3

Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

Giải

Biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu ở *Bảng 3* được cho trong *Hình 1*.



Hình 1

Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ tranh, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Các đối tượng thống kê được biểu diễn ở cột đầu tiên

Bước 2. Chọn biểu tượng để biểu diễn số liệu thống kê. Các biểu tượng đó được trình bày ở dòng cuối cùng

Bước 3. Số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê được biểu diễn bằng các biểu tượng ở dòng tương ứng.

II. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ CỘT, BIỂU ĐỒ CỘT KÉP

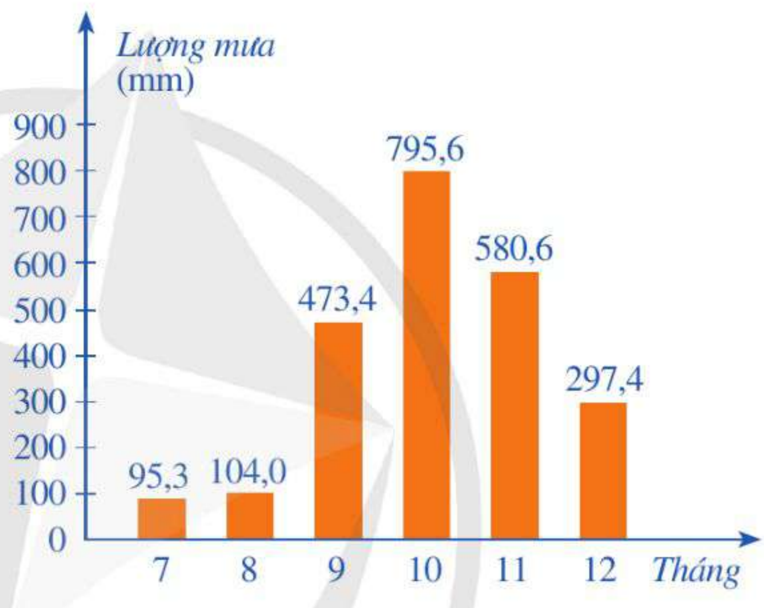
2 Biểu đồ ở *Hình 2* biểu diễn lượng mưa tại trạm khí tượng Huế trong sáu tháng cuối năm dương lịch.

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết các đối tượng này lần lượt được biểu diễn ở trục nào.

b) Nêu tiêu chí thống kê và cho biết tiêu chí đó được biểu diễn ở trục nào.

c) Số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở đâu?

d) Lập bảng thống kê biểu diễn các dữ liệu thống kê nêu trong biểu đồ cột ở *Hình 2*.



(*Nguồn: Địa lí 8, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*)

Hình 2

Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ cột, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Vẽ hai trục vuông góc với nhau

– Trên trục nằm ngang: biểu diễn các đối tượng thống kê

– Trên trục thẳng đứng: xác định độ dài đơn vị để biểu diễn số liệu thống kê và cần chọn độ dài đơn vị thích hợp với số liệu

Bước 2. Tại vị trí các đối tượng thống kê trên trục nằm ngang, vẽ những cột hình chữ nhật: cách đều nhau; có cùng chiều rộng; có chiều cao thể hiện số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê

Bước 3. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên các trục và ghi số liệu tương ứng trên mỗi cột (nếu cần).

Ví dụ 3 Dựa theo Báo cáo của Tổ chức Y tế Thế giới, bạn An thống kê tuổi thọ trung bình năm 2019 của người dân ở Indonesia, Myanmar, Thái Lan, Việt Nam lần lượt là: 71,3 năm; 69,1 năm; 932,4 tháng; 75,4 năm.

a) Nếu vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó thì số liệu nào được viết chưa hợp lí?

b) Viết lại dãy số liệu thống kê đó rồi lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

Giải

a) Để vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu, các số liệu đó cần được tính theo cùng một đơn vị. Nếu các số liệu đó được tính theo đơn vị năm thì số liệu 932,4 tháng được viết chưa hợp lí.

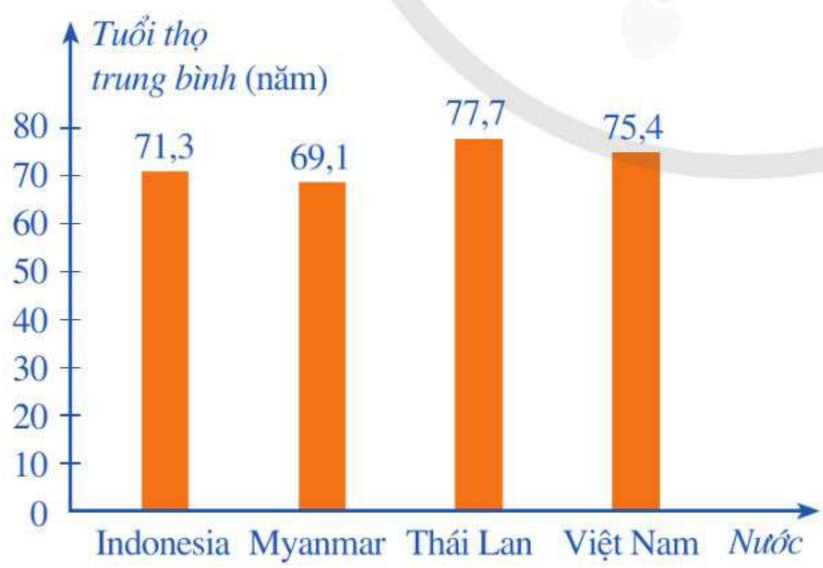
b) Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của người dân ở Indonesia, Myanmar, Thái Lan, Việt Nam lần lượt là: 71,3; 69,1; 77,7; 75,4.

Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 4*):

Nước / Tuổi thọ trung bình	Indonesia	Myanmar	Thái Lan	Việt Nam
Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm)	71,3	69,1	77,7	75,4

Bảng 4

Biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó như sau (*Hình 3*):



Hình 3

2 Theo Báo cáo tổng điều tra dân số năm 2019, mật độ dân số (người/km^2) ở Đồng bằng sông Hồng, Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung, Đồng bằng sông Cửu Long lần lượt là: 1 060; 211; 423. Lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

3 Biểu đồ cột kép ở *Hình 4* thống kê tổng sản phẩm trong nước (GDP) theo giá hiện hành của Việt Nam và Singapore trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019.

(Nguồn: Niên giám thống kê 2020, NXB Thống kê, 2021)

Hình 4

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết các đối tượng này lần lượt được biểu diễn ở trục nào.

b) Nêu tiêu chí thống kê và cho biết tiêu chí đó được biểu diễn ở trục nào.

c) Số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở đâu?

d) Lập bảng thống kê biểu diễn các dữ liệu thống kê nêu trong biểu đồ cột kép ở *Hình 4*.

Nhận xét

Cách vẽ biểu đồ cột kép tương tự như cách vẽ biểu đồ cột. Nhưng tại vị trí ghi mỗi đối tượng trên trục nằm ngang, ta vẽ hai cột sát nhau thể hiện hai loại số liệu của đối tượng đó. Các cột thể hiện số liệu theo cùng một tiêu chí thống kê của các đối tượng thường được tô cùng màu để thuận tiện cho việc đọc biểu đồ.

Ví dụ 4 Ở Việt Nam, tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của nam và nữ trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020 lần lượt là: 70,9 và 76,2; 70,9 và 76,2; 71 và 76,3; 71 và 76,4.

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

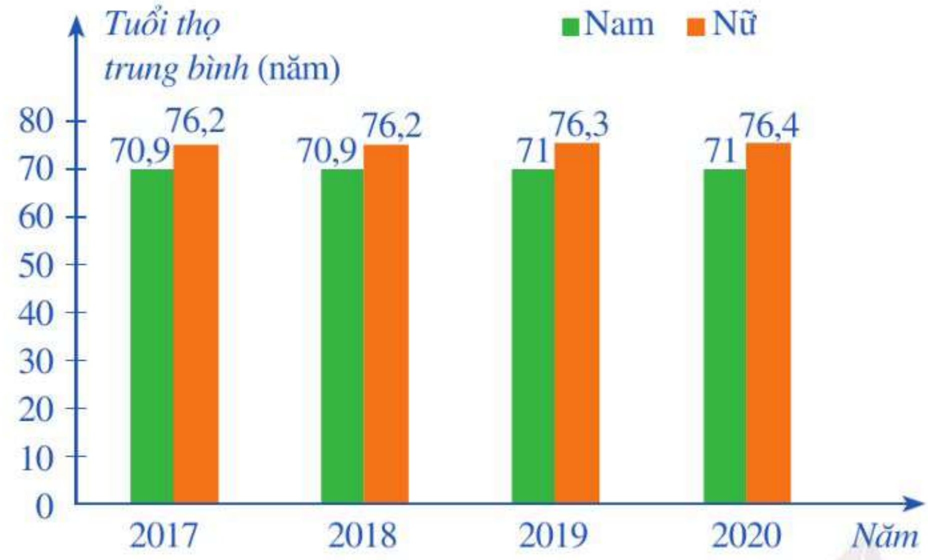
Giải

a) Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau (*Bảng 5*):

Năm / Tuổi thọ trung bình	2017	2018	2019	2020
Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của nam	70,9	70,9	71	71
Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của nữ	76,2	76,2	76,3	76,4

Bảng 5

b) Biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó như sau (*Hình 5*):



Hình 5

3 Kim ngạch xuất khẩu và nhập khẩu của Việt Nam với các nước Đông Nam Á (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) trong các năm 2018, 2019, 2020, 2021 lần lượt là: 31,8 và 24,9; 32,2 và 25,3; 30,5 và 23,2; 41,1 và 28,9.

(*Nguồn: Tổng cục Thống kê*)

Lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

Nhận xét

- Khi số lượng đối tượng thống kê ít, ta có thể dùng bảng thống kê hoặc biểu đồ cột để biểu diễn dữ liệu. Biểu đồ cột là cách biểu diễn trực quan các số liệu thống kê, vì thế biểu đồ cột thuận lợi hơn bảng thống kê trong việc nhận biết đặc điểm của các số liệu thống kê. Tuy nhiên, khi số lượng đối tượng thống kê nhiều, ta nên dùng bảng thống kê để biểu diễn dữ liệu.
- Nếu mỗi đối tượng thống kê đều có hai số liệu thống kê theo hai tiêu chí khác nhau thì ta nên dùng biểu đồ cột kép để biểu diễn dữ liệu. Ngoài ra, khi muốn so sánh hai tập dữ liệu với nhau, ta cũng dùng biểu đồ cột kép.

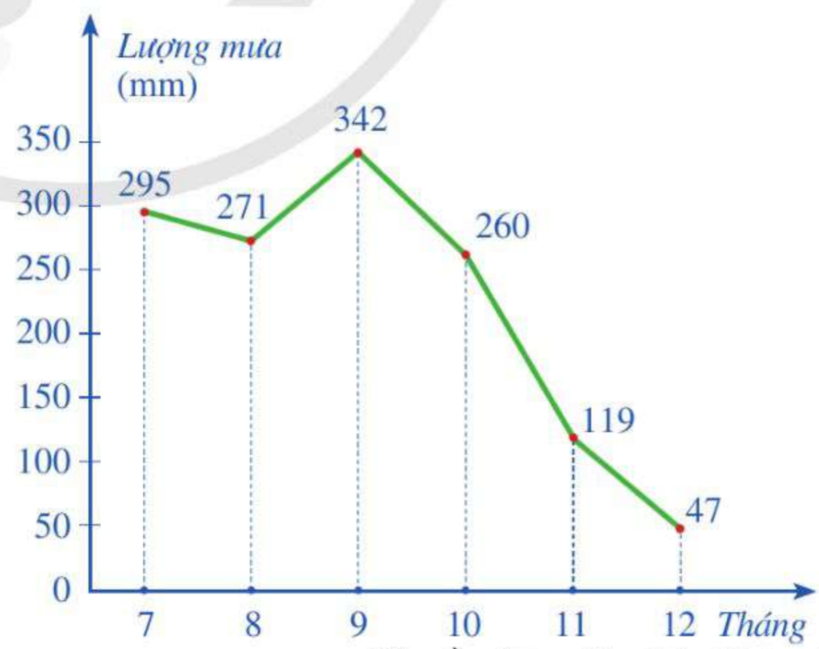
III. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

4 Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 6* biểu diễn lượng mưa trung bình sáu tháng cuối năm 2019 tại Thành phố Hồ Chí Minh.

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết các đối tượng này được biểu diễn ở trục nào.

b) Nêu tiêu chí thống kê và cho biết tiêu chí đó được biểu diễn ở trục nào.

c) Số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê được biểu diễn ở đâu?



(*Nguồn: https://kenhthoitiet.vn*)

Hình 6

d) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê nêu trong biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 6*.

Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ đoạn thẳng, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Vẽ hai trục vuông góc với nhau tại điểm *O*

– Trên trục nằm ngang: mỗi đối tượng thống kê được đánh dấu bằng một điểm và các điểm này thường được vẽ cách đều nhau

– Trên trục thẳng đứng: xác định độ dài đơn vị để biểu diễn số liệu thống kê và cần chọn độ dài đơn vị thích hợp với số liệu, đánh dấu điểm theo tiêu chí của đối tượng thống kê tương ứng

Bước 2. Với mỗi đối tượng thống kê, ta tiếp tục:

– Xác định điểm *A* đánh dấu số liệu thống kê trên trục thẳng đứng của đối tượng thống kê đó

– Kẻ bằng nét đứt một đoạn thẳng có độ dài bằng *OA*, vuông góc với trục nằm ngang và đi qua điểm đánh dấu đối tượng thống kê đó trên trục nằm ngang. Đầu mút trên của đoạn thẳng đó là điểm mốc của đối tượng thống kê

Bước 3. Vẽ đường gấp khúc gồm các đoạn thẳng nối liền liên tiếp các điểm mốc

Bước 4. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên các trục và ghi số liệu tương ứng trên mỗi điểm mốc (nếu cần).

Như vậy, mỗi điểm mốc được xác định bởi hai "toạ độ", trong đó "hoành độ" là điểm đánh dấu đối tượng thống kê, "tung độ" là số liệu thống kê theo tiêu chí của đối tượng đó.

Ví dụ 5 *Bảng 6* thống kê số lượng xi măng bán được của một cửa hàng kinh doanh vật liệu xây dựng trong bốn tháng đầu năm:

Tháng	**1**	**2**	**3**	**4**
Số lượng xi măng bán được (đơn vị: tấn)	140	100	150	160

Bảng 6

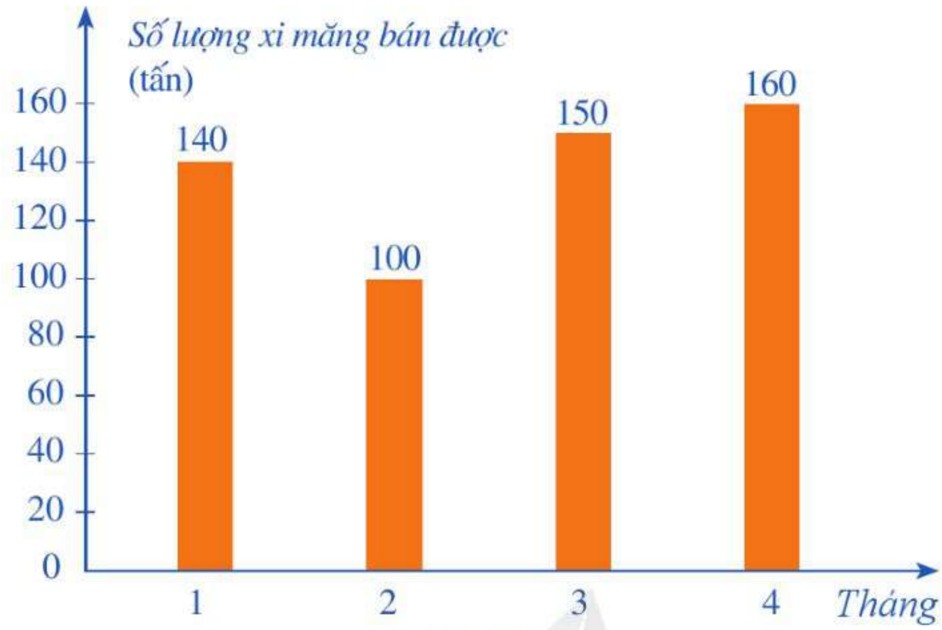
a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

c) Một người đưa ra nhận định: Số xi măng bán được trong tháng 4 nhiều hơn 30% số xi măng bán được trong cả bốn tháng. Hỏi nhận định của người đó là đúng hay sai?

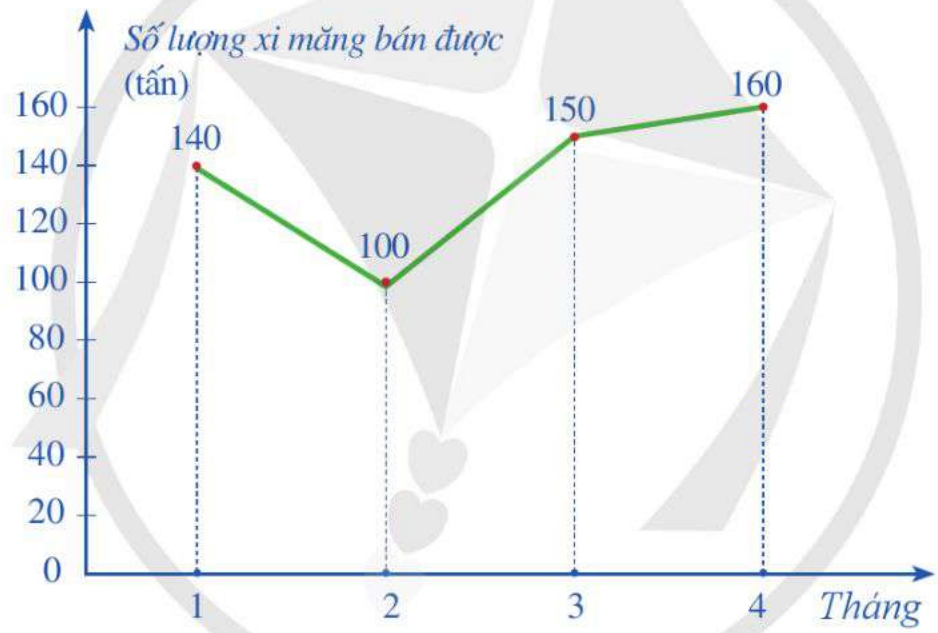
Giải

a) Biểu đồ cột ở *Hình 7* biểu diễn các dữ liệu thống kê ở *Bảng 6*.



Hình 7

b) Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 8* biểu diễn các dữ liệu thống kê ở *Bảng 6*.



Hình 8

c) Tỉ số phần trăm của số xi măng bán được trong tháng 4 và số xi măng bán được trong cả bốn tháng là: $\frac{160\ .\ 100}{550}\% \approx 29{,}1\% < 30\%$.

Do đó số xi măng bán được trong tháng 4 ít hơn 30% số xi măng bán được trong cả bốn tháng.

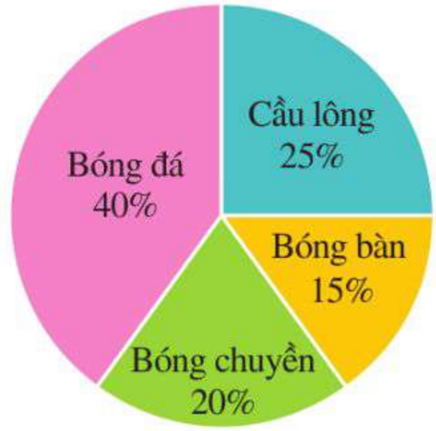
Vậy nhận định của người đó là sai.

4 Số lượng gạo xuất khẩu được (đơn vị: tấn) của một doanh nghiệp trong các tháng 9, 10, 11, 12 lần lượt là: 180; 240; 195; 210. Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu đó.

Nhận xét: Để biểu diễn sự thay đổi số liệu của các đối tượng thống kê theo thời gian, ta thường dùng biểu đồ đoạn thẳng.

IV. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

5 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 9* biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn môn thể thao ưa thích nhất trong bốn môn: Cầu lông, Bóng bàn, Bóng chuyền, Bóng đá của 300 học sinh khối lớp 9 ở một trường trung học cơ sở. Mỗi học sinh chỉ được chọn một môn thể thao khi được hỏi ý kiến.



Hình 9

a) Nêu các đối tượng thống kê và cho biết các đối tượng này được biểu diễn ở đâu.

b) Số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở đâu?

Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Vẽ đường tròn tâm O bán kính R

Bước 2. Chuyển đổi số liệu của mỗi đối tượng thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) về số đo cung tương ứng với đối tượng thống kê đó (tính theo độ) dựa trên nguyên tắc sau: $x\%$ tương ứng với $x\% \,.\, 360^\circ$

Các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê được cho ở bảng sau:

Đối tượng thống kê	**1**	**2**	**...**	***k***
Số đo cung tương ứng (đơn vị: độ)	n_1	n_2	...	n_k

Bảng 7

Chú ý: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 360^\circ$

Bước 3. – Vẽ tia gốc OA theo phương thẳng đứng

– Căn cứ vào *Bảng 7*, sử dụng thước thẳng và thước đo độ, vẽ theo chiều quay của kim đồng hồ các cung $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{k-2}A_{k-1}$ lần lượt có số đo là $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$. Khi đó cung $A_{k-1}A$ có số đo là:

$$360^\circ - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1}) = n_k$$

Bước 4. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên đối tượng thống kê vào hình quạt tương ứng; ghi số liệu tương ứng trên mỗi hình quạt; các hình quạt được tô màu khác nhau (nếu cần) và xoá đi những thông tin không cần thiết trong biểu đồ.

Chú ý: Bán kính R của đường tròn $(O; R)$ được vẽ ở *Bước 1* nên chọn phù hợp với tính thẩm mĩ của biểu đồ.

Ví dụ 6 *Bảng 8* cho biết tỉ lệ mỗi loại quả bán được (tính theo doanh thu) của một cửa hàng:

Loại quả	Lê	Táo	Nhãn	Nho
Tỉ lệ bán được (đơn vị: %)	20	30	40	10

Bảng 8

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng thống kê trên.

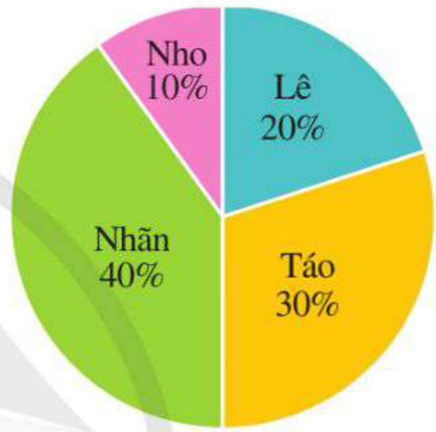
Giải

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm ở *Bảng 8*, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở bảng sau:

Loại quả	Lê	Táo	Nhãn	Nho
Số đo (đơn vị: độ)	72	108	144	36

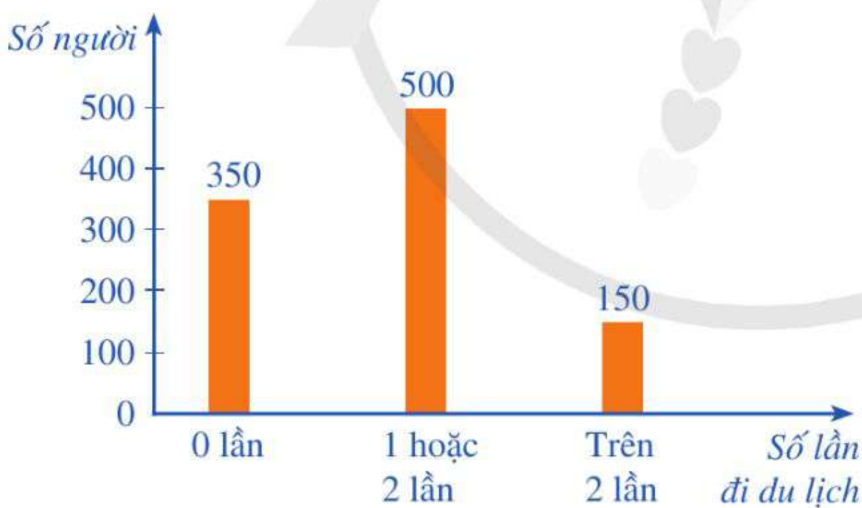
Bảng 9

Căn cứ vào *Bảng 9*, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê được cho ở *Hình 10*.

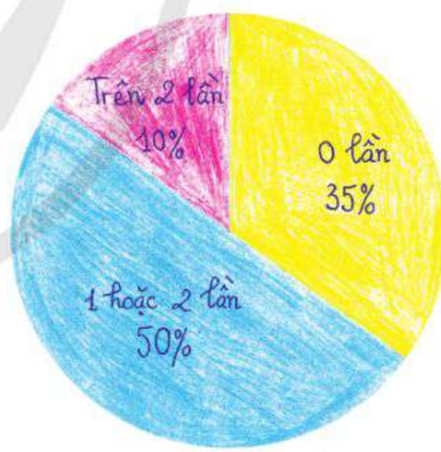


Hình 10

Ví dụ 7 Biểu đồ cột ở *Hình 11* biểu diễn kết quả phỏng vấn 1 000 người về số lần đi du lịch trong một năm.



Hình 11



Hình 12

a) Bạn Ngân đã vẽ biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 12* để biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở *Hình 11*. Hãy giải thích vì sao những số liệu mà bạn Ngân nêu ra trong biểu đồ hình quạt tròn đó là chưa chính xác.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở *Hình 11*.

Giải

a) Trong biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 12*, ta có:

$$35\% + 50\% + 10\% = 95\% < 100\%.$$

Vì vậy, những số liệu mà bạn Ngân nêu ra trong biểu đồ đó là chưa chính xác.

b) Từ biểu đồ cột ở *Hình 11*, ta có bảng thống kê kết quả phỏng vấn 1 000 người về số lần đi du lịch trong một năm như sau:

Số lần đi du lịch	0	1 - 2	Trên 2
Số người	350	500	150

Bảng 10

Chuyển đổi số liệu thống kê ở *Bảng 10* về số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm, ta có *Bảng 11* sau:

Số lần đi du lịch	0	1 - 2	Trên 2
Tỉ lệ (đơn vị: %)	35	50	15

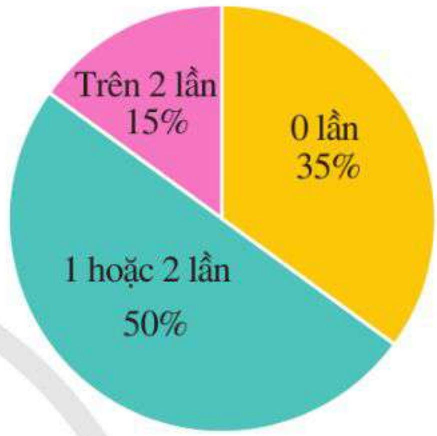
Bảng 11

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ số phần trăm ở *Bảng 11*, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở bảng sau:

Số lần đi du lịch	0	1 - 2	Trên 2
Số đo (đơn vị: độ)	126	180	54

Bảng 12

Căn cứ vào *Bảng 12*, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng thống kê được cho ở *Hình 13*.



Hình 13

5 Để chuẩn bị đưa ra thị trường mẫu sản phẩm mới, một hãng sản xuất đồ nội thất tiến hành thăm dò màu sơn mà người mua yêu thích. Hãng sản xuất đó đã hỏi ý kiến của 500 người mua hàng và nhận được kết quả là: 140 người thích màu nâu, 160 người thích màu cam, 200 người thích màu xanh. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu đó.

Nhận xét

- Biểu đồ hình quạt tròn cho phép nhận biết nhanh chóng mỗi đối tượng thống kê chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.
- Bảng thống kê hoặc biểu đồ cột cho phép nhận biết nhanh chóng số liệu thống kê (theo tiêu chí) của mỗi đối tượng thống kê và so sánh các số liệu đó.
- Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn từ bảng thống kê (hoặc từ biểu đồ cột), trước hết từ các số liệu ở bảng đó (hoặc ở biểu đồ cột đó) cần xác định các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê.

BÀI TẬP

1. Kim ngạch xuất khẩu (đơn vị: nghìn đô la Mỹ) của Việt Nam trong sáu tháng cuối năm 2022 lần lượt là: 31 309 161; 35 257 448; 29 748 102; 30 597 155; 29 250 026; 29 110 462. (*Nguồn: https://www.gso.gov.vn*)
Hãy lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

2. Khối lượng thịt lợn bán được trong các tháng 8, 9, 10, 11, 12 năm 2022 của một hệ thống siêu thị lần lượt là: 10 tạ; 10 tạ; 25 tạ; 20 tạ; 35 tạ.

a) Hãy lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

3. *Bảng 13* biểu diễn số lượng các loại gạo đã bán trong tháng 01/2023 của một đại lí kinh doanh gạo:

Loại gạo / Số lượng gạo	Bắc Hương	Thơm Thái	Tám xoan Hải Hậu	ST24	Hàm Châu	Nàng Xuân	ST25
Số lượng gạo bán được (đơn vị: kg)	393	185	158	109	170	197	98

Bảng 13

Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

4. *Bảng 14* thống kê chiều cao trung bình cho trẻ em từ 7 đến 10 tuổi theo tiêu chuẩn của Tổ chức Y tế Thế giới (WHO):

Tuổi / Chiều cao	7	8	9	10
Chiều cao (đơn vị: cm) của bé trai	121,7	127,3	132,6	137,8
Chiều cao (đơn vị: cm) của bé gái	120,8	126,6	132,5	138,6

(*Nguồn: https://nutrihome.vn*)

Bảng 14

Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

5. Dựa theo nguồn *https://www.worldometers.info*, bạn Bình thống kê dân số Việt Nam (đơn vị: người) qua các năm 1921, 1960, 1980, 1990, 2000 và 2020 lần lượt là: 16 triệu; 33 triệu; 540 trăm nghìn; 68 triệu; 80 triệu; 97 triệu.

a) Nếu vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu đó thì số liệu nào được viết chưa hợp lí?

b) Viết lại dãy số liệu thống kê trên và vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu đó.

6. *Bảng 15* thống kê dân số thế giới phân theo các châu lục tính đến tháng 7/2021:

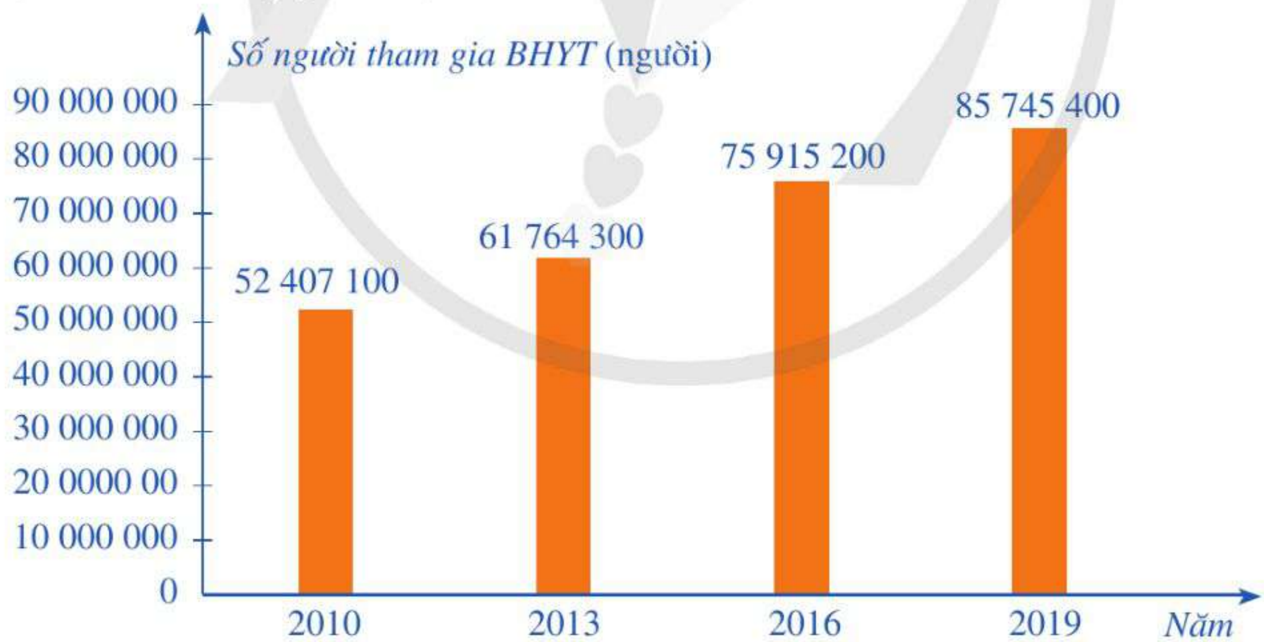
Châu lục	Châu Âu	Châu Á	Châu Mỹ	Châu Phi	Châu Đại dương
Dân số (đơn vị: triệu người)	744	4 651	1 027	1 373	43

(Nguồn: World population data sheet 2021. www.prb.org)

Bảng 15

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn thể hiện cơ cấu dân số thế giới theo *Bảng 15*.

7. Biểu đồ cột ở *Hình 14* biểu diễn số người tham gia bảo hiểm y tế (BHYT) của Việt Nam ở một số năm trong giai đoạn từ năm 2010 đến năm 2019.



(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Hình 14

a) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở *Hình 14*.

b) Một người đưa ra nhận định: Từ năm 2010 đến năm 2019, số người tham gia bảo hiểm y tế của nước ta đã tăng lên 65%. Hỏi nhận định của người đó là đúng hay sai?

§2. TẦN SỐ. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

Bảng 16 biểu diễn số lượng vé xuất ra trong một ngày của một đại lí bán vé tham quan các di tích của thành phố Huế.

Vé tham quan	Đại Nội	Cung An Định	Đàn Nam Giao	Điện Hòn Chén	Cộng
Tần số	150	80	120	50	400

Bảng 16

Ngọ Môn – cổng chính của Hoàng thành Huế

(Ảnh: Huy Thoại)

Bảng thống kê trên là loại bảng thống kê như thế nào?

I. TẦN SỐ. BẢNG TẦN SỐ. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

1. Tần số và bảng tần số

1 Sau khi điều tra 60 hộ gia đình ở một vùng dân cư về số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình, người ta được dãy số liệu thống kê (hay còn gọi là mẫu số liệu thống kê) như sau:

6	6	6	7	5	5	4	5	6	4	4	8	6	6	6	6	5	5	5	4
6	6	7	7	5	5	5	5	6	4	4	6	6	6	6	6	5	5	5	4
8	6	6	5	5	5	5	6	6	4	5	6	7	6	8	6	5	5	6	5

a) Trong 60 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Mỗi giá trị đó xuất hiện bao nhiêu lần?

Nhận xét

- Một tập gồm hữu hạn các dữ liệu thống kê được gọi là một mẫu. Số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước mẫu (hay cỡ mẫu). Chẳng hạn, mẫu số liệu thống kê ở trên có kích thước mẫu là 60.
- Trong mẫu số liệu thống kê ở trên, có 5 giá trị khác nhau là: $x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$; $x_4 = 7$; $x_5 = 8$.
- Giá trị $x_1 = 4$ xuất hiện 8 lần, ta gọi $n_1 = 8$ là *tần số* của giá trị x_1. Tương tự, $n_2 = 21$; $n_3 = 24$; $n_4 = 4$; $n_5 = 3$ lần lượt là tần số của giá trị x_2; x_3; x_4; x_5.
- Ta có thể lập *bảng tần số* của mẫu số liệu thống kê trên ở dạng bảng ngang (*Bảng 17*) hoặc ở dạng bảng dọc (*Bảng 18*).

Số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình (x)	4	5	6	7	8	Cộng
Tần số (n)	8	21	24	4	3	$N = 60$

Bảng 17

Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu dữ liệu thống kê được gọi là *tần số* của giá trị đó.

Ta có thể trình bày gọn gàng mẫu dữ liệu thống kê trong *bảng tần số*.

Số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình (x)	**Tần số (n)**
4	8
5	21
6	24
7	4
8	3
Cộng	$N = 60$

Bảng 18

Để lập bảng tần số ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số của mỗi giá trị đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

- Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), Tần số (n)
- Các cột tiếp theo lần lượt ghi giá trị và tần số của giá trị đó
- Cột cuối cùng: Cộng, $N = ...$

Chú ý: Bảng tần số ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Ví dụ 1 Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C như sau:

5 5 5 7 7 8 8 8 5 8 8 8 6 6 6 6 8 9 5 7

6 6 7 7 6 8 9 9 7 8 8 5 7 7 7 7 6 8 8 9

a) Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

c) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên.

Giải

a) Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có 5 giá trị khác nhau là: $x_1 = 5$; $x_2 = 6$; $x_3 = 7$; $x_4 = 8$; $x_5 = 9$.

b) Tần số của các giá trị x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 lần lượt là: $n_1 = 6$; $n_2 = 8$; $n_3 = 10$; $n_4 = 12$; $n_5 = 4$.

c) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên như sau:

Điểm (x)	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số (n)	6	8	10	12	4	$N = 40$

Bảng 19

1 Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công ty như sau:

7 2 5 9 7 4 3 8 10 4 4

2 4 4 5 6 7 7 5 4 1 8

9 4 2 8 5 5 7 3 14 8 8

Lập bảng tần số ở dạng bảng dọc của mẫu số liệu thống kê đó.

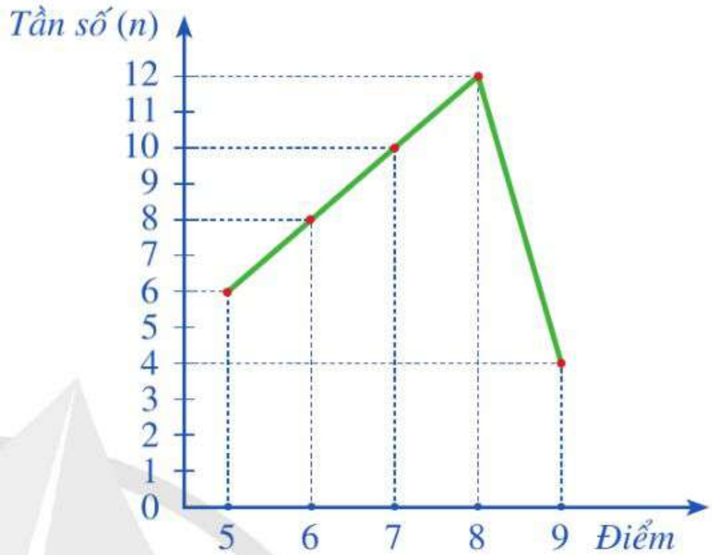
Nhận xét: Đối với một mẫu dữ liệu thống kê, tần số của một giá trị phản ánh số lần lặp đi lặp lại giá trị đó trong mẫu dữ liệu thống kê đã cho.

2. Biểu đồ tần số

Để trình bày mẫu dữ liệu một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ tần số.

2 Xét mẫu số liệu thống kê ở *Ví dụ 1* với bảng tần số là *Bảng 19*. Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu thống kê đó.

Nhận xét: Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 15* gọi là *biểu đồ tần số* ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu thống kê đã cho.



Hình 15

Người ta thường vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng và có thể thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số nhận được ở *Bước 1*.

Ví dụ 2 Thống kê lượng hàng tồn kho (đơn vị: sản phẩm) của 30 mặt hàng ở một cửa hàng kinh doanh như sau:

4	4	3	5	3	3	3	4	4	5	3	3	5	5	5
2	2	3	4	2	2	3	3	3	5	5	5	4	3	2

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

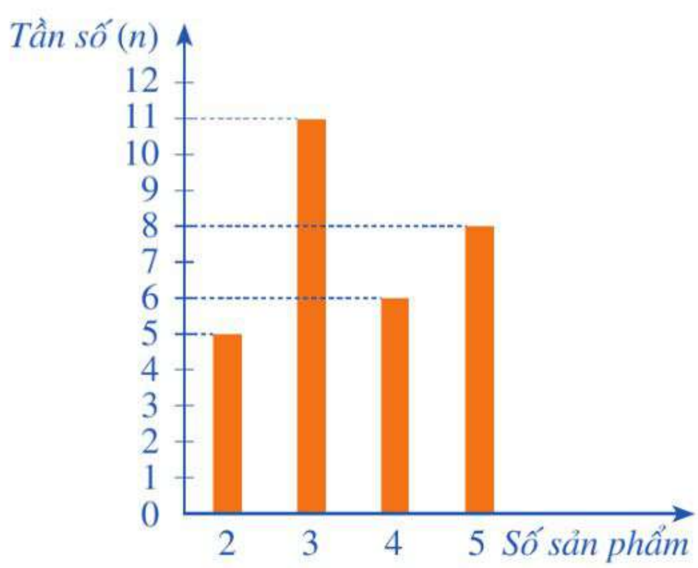
Giải

a) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó như sau (*Bảng 20*):

Số sản phẩm (x)	2	3	4	5	Cộng
Tần số (n)	5	11	6	8	$N = 30$

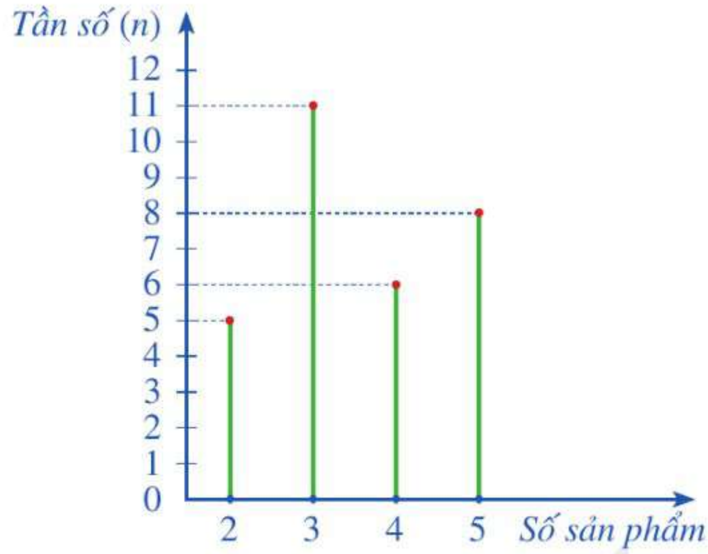
Bảng 20

b) Biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó được cho trong *Hình 16*.



Hình 16

Chú ý: Ta cũng có thể vẽ biểu đồ tần số của mẫu số liệu thống kê trong *Ví dụ 2* ở dạng sau (*Hình 17*):



Hình 17

2 Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu thống kê ở *Luyện tập 1*.

II. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

1. Tần số tương đối và bảng tần số tương đối

3 Xét mẫu số liệu thống kê ở *Ví dụ 1* với bảng tần số là *Bảng 19*:

Điểm (x)	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số (n)	6	8	10	12	4	$N = 40$

Tính tỉ số phần trăm của tần số $n_1 = 6$ và số học sinh của lớp 9C.

Nhận xét

• Tỉ số phần trăm của tần số $n_1 = 6$ và số học sinh của lớp 9C là: $\dfrac{6\,.\,100}{40}\% = 15\%$.

Tỉ số phần trăm đó được gọi là *tần số tương đối* của giá trị x_1, kí hiệu là $f_1 = 15\%$.

Tương tự, các giá trị $x_2 = 6$; $x_3 = 7$; $x_4 = 8$; $x_5 = 9$ lần lượt có các tần số tương đối là:

$f_2 = \dfrac{8\,.\,100}{40}\% = 20\%$; $\quad f_3 = \dfrac{10\,.\,100}{40}\% = 25\%$;

$f_4 = \dfrac{12\,.\,100}{40}\% = 30\%$; $\quad f_5 = \dfrac{4\,.\,100}{40}\% = 10\%$.

• Ta có thể lập *bảng tần số tương đối* của mẫu số liệu thống kê trên như sau (*Bảng 21*):

Điểm (x)	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số tương đối (%)	15	20	25	30	10	100

Bảng 21

Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i của giá trị đó và số lượng N các dữ liệu trong mẫu dữ liệu thống kê: $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ta có thể trình bày gọn gàng mẫu dữ liệu thống kê trong *bảng tần số tương đối* của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Để lập bảng tần số tương đối ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), Tần số tương đối (%)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi giá trị và tần số tương đối của giá trị đó

– Cột cuối cùng: Cộng, 100.

Chú ý: Bảng tần số tương đối ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Ví dụ 3 Trong tác phẩm "*Truyện Kiều*" bất hủ của nhà thơ Nguyễn Du có hai câu thơ:

"*Dưới trăng quyên đã gọi hè*

Đầu tường lửa lựu lập loè đâm bông".

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái G; L; N; T lần lượt xuất hiện trong hai câu thơ trên là:

T N G N G T N G L L L L N G

Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Giải

Mẫu dữ liệu thống kê đó có 14 dữ liệu ($N = 14$) và có 4 giá trị khác nhau là: G; L; N; T.

Các giá trị: G; L; N; T lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$n_1 = 4$; $n_2 = 4$; $n_3 = 4$; $n_4 = 2$;

$f_1 = \frac{4\,.\,100}{14}\% \approx 28{,}57\%$; $f_2 = \frac{4\,.\,100}{14}\% \approx 28{,}57\%$;

$f_3 = \frac{4\,.\,100}{14}\% \approx 28{,}57\%$; $f_4 = \frac{2\,.\,100}{14}\% \approx 14{,}29\%$.

3 Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê trong *Hoạt động 1*.

Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó như sau (*Bảng 22*):

Chữ cái (x)	G	L	N	T	Cộng
Tần số tương đối (%)	28,57	28,57	28,57	14,29	100

Bảng 22

Nhận xét: Đối với một mẫu dữ liệu thống kê, tần số tương đối của một giá trị phản ánh giá trị đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

2. Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn

4 Xét mẫu số liệu thống kê ở *Ví dụ 1* với bảng tần số tương đối là *Bảng 21*:

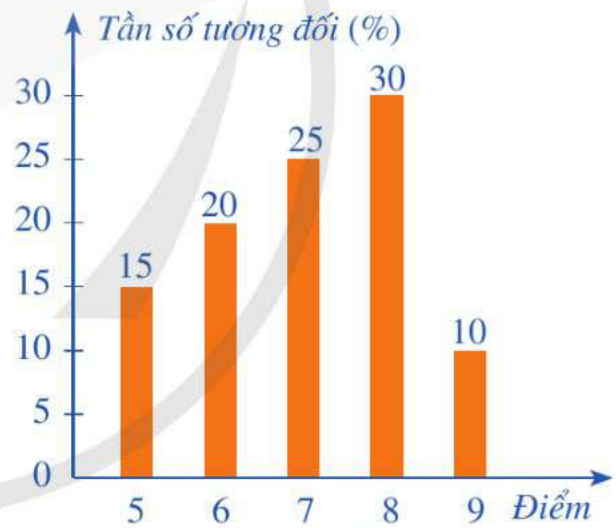
Điểm (x)	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số tương đối (%)	15	20	25	30	10	100

a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê đó.

Nhận xét

- Biểu đồ cột ở *Hình 18* gọi là *biểu đồ tần số tương đối* ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đã cho.



Hình 18

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối nhận được ở *Bước 1*.

- Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 19* gọi là *biểu đồ tần số tương đối* ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đã cho.

Hình 19

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó

Bước 2. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối nhận được ở *Bước 1*.

Ví dụ 4 Một doanh nghiệp thu thập mức độ yêu thích của người tiêu dùng về một loại sản phẩm theo các mức: 1, 2, 3, 4, 5. Mẫu số liệu thống kê phản ánh ý kiến của 50 người tiêu dùng như sau:

4	4	1	4	5	2	2	5	5	5	2	4	3	4	4	4	5
3	3	4	4	4	5	1	5	4	4	4	2	4	4	2	5	5
1	1	1	4	4	4	3	2	4	3	3	3	4	4	4	5	

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Giải

a) Mẫu số liệu thống kê đó có 50 số liệu ($N = 50$) và có 5 giá trị khác nhau là: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5$.

Các giá trị $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5$ lần lượt có tần số, tần số tương đối là:

$n_1 = 5; n_2 = 6; n_3 = 7; n_4 = 22; n_5 = 10; f_1 = \frac{5 . 100}{50}\% = 10\%; f_2 = \frac{6 . 100}{50}\% = 12\%;$

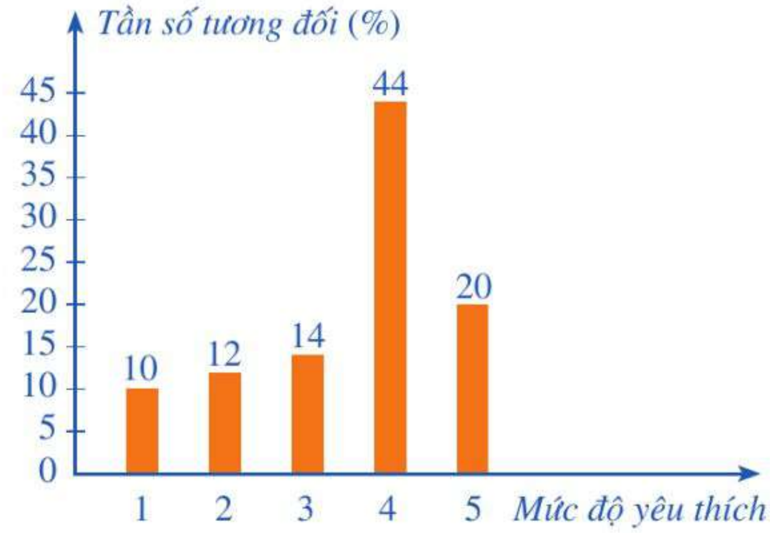
$f_3 = \frac{7 . 100}{50}\% = 14\%; f_4 = \frac{22 . 100}{50}\% = 44\%; f_5 = \frac{10 . 100}{50}\% = 20\%.$

Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó như sau (*Bảng 23*):

Mức độ yêu thích (x)	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số tương đối (%)	10	12	14	44	20	100

Bảng 23

b) Biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó được cho ở *Hình 20*.



Hình 20

4 Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê trong *Ví dụ 4*.

BÀI TẬP

1. Thống kê điểm sau 46 lần bắn bia của một xạ thủ như sau:

8 9 10 9 9 8 7 7 8 10 10 7 10 9 8 9 9 8 8 9 9 9 8
10 8 9 8 7 10 7 7 9 9 7 9 8 10 8 7 10 8 8 9 10 8 9

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ đoạn thẳng và biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

2. Gieo một xúc xắc 32 lần liên tiếp, ghi lại số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc, ta được mẫu số liệu thống kê như sau:

1 6 4 4 6 6 5 5 4 2 2 3 1 1 4 4
5 1 2 3 3 2 4 4 5 2 3 4 2 6 2 2

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

3. Kết quả đánh giá chất lượng bằng điểm của 40 sản phẩm được cho trong *Bảng 24*.

Điểm (x)	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	6	14	16	4	$N = 40$

Bảng 24

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

§3. TẦN SỐ GHÉP NHÓM. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

Bảng 25 thống kê mật độ dân số (đơn vị: người/km^2) của 37 tỉnh, thành phố thuộc các vùng Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long (không kể Thành phố Hồ Chí Minh) ở năm 2021.

Nhóm	Tần số ghép nhóm (n)
[100 ; 280)	20
[280 ; 460)	5
[460 ; 640)	6
[640 ; 820)	3
[820 ; 1 000)	3
Cộng	$N = 37$

(Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022)

Bảng 25

Bảng 25 là loại bảng thống kê như thế nào?

I. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1 Nhà may Hưng Thịnh tặng áo phông cho 40 học sinh của lớp 9A. Nhà may đo chiều cao (đơn vị: centimét) của cả lớp để quyết định chọn các cỡ áo khi may, kết quả như sau:

161	159	168	153	150	157	172	165	161	158
169	153	164	167	172	174	163	156	166	166
161	152	165	169	160	152	165	163	174	168
159	168	164	169	156	172	167	158	161	160

a) Mẫu số liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Có nên dùng bảng tần số (hay bảng tần số tương đối) để biểu diễn mẫu số liệu thống kê đó không?

Nhận xét: Vì mẫu số liệu trên có nhiều giá trị khác nhau nên nếu ta lập bảng tần số (hay bảng tần số tương đối) thì bảng sẽ rất dài, gây khó khăn trong việc phân tích, xử lí số liệu thu thập được. Để khắc phục trở ngại đó, ta có thể ghép các số liệu trên thành các nhóm, ví dụ có thể ghép các số liệu trên thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Nhóm 1: [150 ; 155) gồm các số đo chiều cao lớn hơn hoặc bằng 150 và nhỏ hơn 155;

Nhóm 2: [155 ; 160) gồm các số đo chiều cao lớn hơn hoặc bằng 155 và nhỏ hơn 160;

Nhóm 3: [160 ; 165) gồm các số đo chiều cao lớn hơn hoặc bằng 160 và nhỏ hơn 165;

Nhóm 4: [165 ; 170) gồm các số đo chiều cao lớn hơn hoặc bằng 165 và nhỏ hơn 170;

Nhóm 5: [170 ; 175) gồm các số đo chiều cao lớn hơn hoặc bằng 170 và nhỏ hơn 175.

Trong thống kê, ta quy ước:

- Nửa khoảng [a ; b) là tập hợp các giá trị x của số liệu sao cho $x \geq a$ và $x < b$;
- Độ dài của nửa khoảng [a ; b) là $b - a$;
- Khi một nhóm ứng với nửa khoảng [a ; b) thì ta gọi a là *đầu mút trái* và b là *đầu mút phải* của nhóm đó.

Ví dụ 1 Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km/h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ:

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65	54,5
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5	49
61	49,5	54	62	59	56	47	50	59,5	61	46,5
49,5	52,5	57	47	59	55	45	47,5	48	61,5	48,5

Hãy ghép các số liệu trên thành sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Giải

Trong mẫu số liệu đó, số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41, số liệu có giá trị lớn nhất là 68. Vì thế, ta có thể chọn nửa khoảng [40 ; 70) sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng [40 ; 70). Vì độ dài của nửa khoảng [40 ; 70) bằng 70 – 40 = 30 nên ta có thể phân chia nửa khoảng đó thành sáu nửa khoảng có độ dài bằng nhau là: [40 ; 45), [45 ; 50), [50 ; 55), [55 ; 60), [60 ; 65), [65 ; 70).

Vậy ta có thể ghép nhóm mẫu số liệu đã cho theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng đó.

1 Chiều cao (đơn vị: mét) của 35 cây bạch đàn được cho như sau:

6,6	7,2	8,0	8,0	7,5	7,5	7,7
6,6	7,2	8,0	8,0	7,5	7,5	7,7
8,2	8,3	7,8	7,9	8,2	7,4	8,3
7,8	8,7	8,6	8,5	7,9	7,7	8,1
9,0	7,0	8,1	8,0	8,9	9,4	9,2

Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm thành mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện như sau:

- Tìm nửa khoảng $[a ; b)$ sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng $[a ; b)$;
- Ta thường phân chia nửa khoảng $[a ; b)$ thành các nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Chú ý

Khi ghép nhóm số liệu, đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu.

II. TẦN SỐ GHÉP NHÓM. BẢNG TẦN SỐ GHÉP NHÓM

2 Mẫu số liệu thống kê ở *Hoạt động 1* đã được ghép thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: [150 ; 155), [155 ; 160), [160 ; 165), [165 ; 170), [170 ; 175).

Có bao nhiêu số liệu trong mẫu số liệu đó thuộc vào nhóm 1?

Nhận xét

- Trong 40 số liệu thống kê của mẫu số liệu đó, có 5 số liệu thuộc vào nhóm 1. Ta gọi $n_1 = 5$ là *tần số ghép nhóm* (gọi tắt là *tần số*) của nhóm 1. Tương tự, $n_2 = 7$; $n_3 = 10$; $n_4 = 13$; $n_5 = 5$ lần lượt là tần số của nhóm 2, nhóm 3, nhóm 4, nhóm 5.
- Ta có thể lập *bảng tần số ghép nhóm* của mẫu số liệu ghép nhóm đó ở dạng bảng ngang (*Bảng 26*) hoặc ở dạng bảng dọc (*Bảng 27*).

Nhóm	[150 ; 155)	[155 ; 160)	[160 ; 165)	[165 ; 170)	[170 ; 175)	Cộng
Tần số (n)	5	7	10	13	5	$N = 40$

Bảng 26

Trong một mẫu số liệu ghép nhóm, *tần số ghép nhóm* (hay *tần số*) của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, ..., n_m$.

Ta có thể trình bày gọn gàng mẫu số liệu ghép nhóm trong *bảng tần số ghép nhóm*.

Nhóm	**Tần số (n)**
[150 ; 155)	5
[155 ; 160)	7
[160 ; 165)	10
[165 ; 170)	13
[170 ; 175)	5
Cộng	$N = 40$

Bảng 27

Để lập bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các nhóm của mẫu dữ liệu ghép nhóm và tìm tần số của mỗi nhóm đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Nhóm, Tần số (n)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi nhóm và tần số của nhóm đó

– Cột cuối cùng: Cộng, $N = \ldots$

Chú ý: Bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Ví dụ 2 Xét mẫu số liệu ở *Ví dụ 1* được ghép nhóm theo sáu nhóm sau: [40 ; 45), [45 ; 50), [50 ; 55), [55 ; 60), [60 ; 65), [65 ; 70).

a) Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Giải

a) Tần số của các nhóm [40 ; 45), [45 ; 50), [50 ; 55), [55 ; 60), [60 ; 65), [65 ; 70) lần lượt là: $n_1 = 4$; $n_2 = 14$; $n_3 = 8$; $n_4 = 10$; $n_5 = 6$; $n_6 = 2$.

b) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó như sau (*Bảng 28*):

Nhóm	Tần số (n)
[40 ; 45)	4
[45 ; 50)	14
[50 ; 55)	8
[55 ; 60)	10
[60 ; 65)	6
[65 ; 70)	2
Cộng	$N = 44$

Bảng 28

2 Thống kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần như sau:

85 81 65 58 47 30 51 89 85 42

55 37 31 82 63 33 44 88 77 57

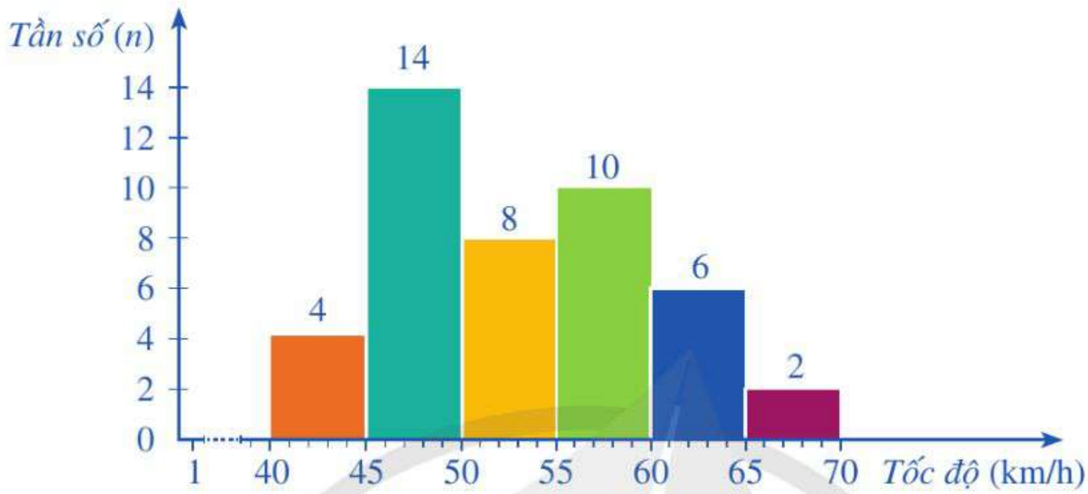
44 74 63 67 46 73 52 53 47 35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm sau: [30 ; 40), [40 ; 50), [50 ; 60), [60 ; 70), [70 ; 80), [80 ; 90).

Nhận xét

• Đối với một mẫu dữ liệu thống kê ghép nhóm, tần số của một nhóm phản ánh số lượng số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó.

• Cũng như mẫu số liệu không ghép nhóm, để trình bày mẫu số liệu ghép nhóm một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng *biểu đồ tần số ghép nhóm*. Chẳng hạn, đối với mẫu số liệu ghép nhóm ở *Ví dụ 2*, biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột (*Hình 21*) biểu diễn số liệu thống kê trong *Bảng 28*.



Hình 21

Để vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó rồi vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số ghép nhóm vừa nhận được (các cột được ghép sát nhau).

III. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

1. Tần số tương đối ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm

3 Xét mẫu số liệu được ghép nhóm ở *Hoạt động 2* với bảng tần số ghép nhóm là *Bảng 26*:

Nhóm	[150 ; 155)	[155 ; 160)	[160 ; 165)	[165 ; 170)	[170 ; 175)	Cộng
Tần số (n)	5	7	10	13	5	$N = 40$

Tính tỉ số phần trăm của tần số $n_1 = 5$ và $N = 40$.

Nhận xét

• Tỉ số phần trăm của tần số $n_1 = 5$ và $N = 40$ là $\frac{5 \cdot 100}{40}\% = 12{,}5\%$.

Tỉ số phần trăm đó gọi là *tần số tương đối ghép nhóm* (còn gọi tắt là *tần số tương đối*) của nhóm 1, kí hiệu là $f_1 = 12{,}5\%$.

Tương tự, nhóm 2, nhóm 3, nhóm 4, nhóm 5 lần lượt có tần số tương đối ghép nhóm là:

$f_2 = \frac{7 \cdot 100}{40}\% = 17{,}5\%$; $\quad f_3 = \frac{10 \cdot 100}{40}\% = 25\%$;

$f_4 = \frac{13 \cdot 100}{40}\% = 32{,}5\%$; $\quad f_5 = \frac{5 \cdot 100}{40}\% = 12{,}5\%$.

• Ta có thể lập *bảng tần số tương đối ghép nhóm* của mẫu số liệu đó ở dạng bảng ngang (*Bảng 29*) hoặc ở dạng bảng dọc (*Bảng 30*):

Nhóm	[150 ; 155)	[155 ; 160)	[160 ; 165)	[165 ; 170)	[170 ; 175)	Cộng
Tần số tương đối (%)	12,5	17,5	25	32,5	12,5	100

Bảng 29

Tần số tương đối ghép nhóm (hay *tần số tương đối*) f_i của nhóm i là tỉ số giữa tần số n_i của nhóm đó và số lượng N các số liệu trong mẫu số liệu thống kê:

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ta có thể trình bày gọn gàng một mẫu số liệu ghép nhóm trong *bảng tần số tương đối ghép nhóm* của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[150 ; 155)	12,5
[155 ; 160)	17,5
[160 ; 165)	25
[165 ; 170)	32,5
[170 ; 175)	12,5
Cộng	100

Bảng 30

Để lập bảng tần số tương đối ghép nhóm ở dạng bảng ngang, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm và tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột

Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:

– Cột đầu tiên: Nhóm, Tần số tương đối (%)

– Các cột tiếp theo lần lượt ghi nhóm và tần số tương đối của nhóm đó

– Cột cuối cùng: Cộng, 100.

Chú ý: Bảng tần số tương đối ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

Ví dụ 3 Xét mẫu số liệu ghép nhóm có bảng tần số ghép nhóm được cho ở *Bảng 31* sau:

Nhóm	[10 ; 15)	[15 ; 20)	[20 ; 25)	[25 ; 30)	[30 ; 35)	Cộng
Tần số (n)	4	12	7	8	9	$N = 40$

Bảng 31

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm ở dạng bảng dọc của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Giải

Tần số tương đối của các nhóm lần lượt là: $f_1 = \frac{4 \cdot 100}{40}\% = 10\%$; $f_2 = \frac{12 \cdot 100}{40}\% = 30\%$;

$f_3 = \frac{7 \cdot 100}{40}\% = 17{,}5\%$; $f_4 = \frac{8 \cdot 100}{40}\% = 20\%$; $f_5 = \frac{9 \cdot 100}{40}\% = 22{,}5\%$.

Vì vậy, bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu đã cho được nêu trong *Bảng 32*:

Nhóm	**Tần số tương đối (%)**
[10 ; 15)	10
[15 ; 20)	30
[20 ; 25)	17,5
[25 ; 30)	20
[30 ; 35)	22,5
Cộng	100

Bảng 32

3 Xét mẫu số liệu sau khi được ghép nhóm ở *Luyện tập 2*. Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu đó.

Nhận xét

Đối với một mẫu số liệu ghép nhóm, tần số tương đối của một nhóm phản ánh số lượng số liệu của nhóm đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

2. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

Để trình bày mẫu số liệu ghép nhóm một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng).

4 Xét mẫu số liệu ghép nhóm ở *Ví dụ 3* với bảng tần số tương đối ghép nhóm là *Bảng 32*.

a) Vẽ hai trục vuông góc với nhau.

Trên trục nằm ngang, ta xác định các điểm 10, 15, 20, 25, 30, 35 (các điểm đó cách đều nhau).

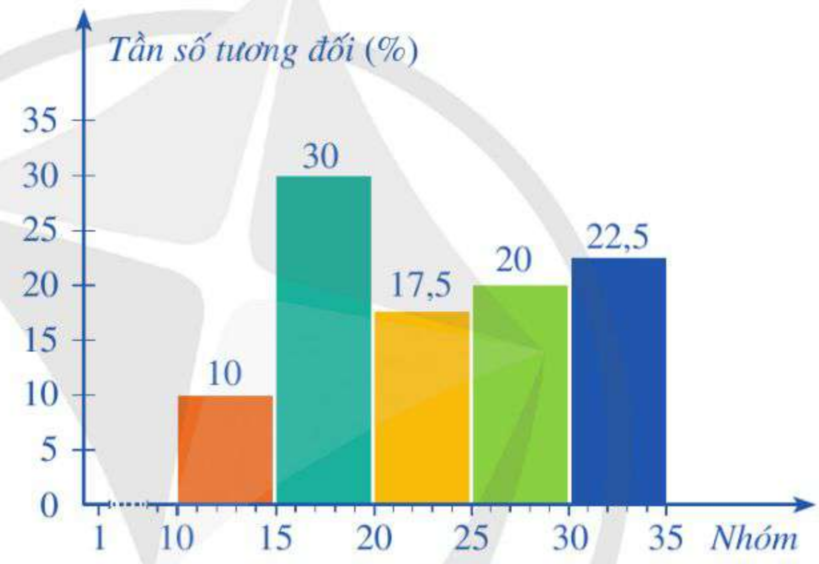
Trên trục thẳng đứng, ta xác định độ dài đơn vị và đánh dấu các điểm biểu diễn tần số tương đối của nhóm.

b) Trên mỗi nửa khoảng [10 ; 15), [15 ; 20), [20 ; 25), [25 ; 30), [30 ; 35) của trục nằm ngang (ứng với 5 nhóm đã cho), vẽ một cột hình chữ nhật có chiều cao thể hiện tần số tương đối của nhóm đó.

c) Hoàn thiện biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong *Bảng 32*.

Nhận xét

Biểu đồ cột ở *Hình 22* gọi là *biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm* ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.



Hình 22

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối ghép nhóm nhận được ở *Bước 1*.

Ví dụ 4 Một thư viện thống kê số lượng người đến đọc sách mỗi ngày trong 100 ngày liên tiếp. Sau khi ghép nhóm mẫu số liệu thu được, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

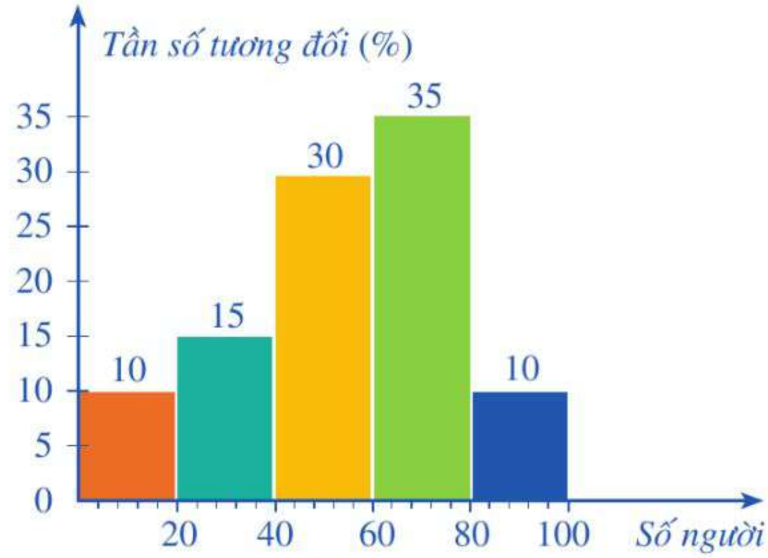
Nhóm	[0 ; 20)	[20 ; 40)	[40 ; 60)	[60 ; 80)	[80 ; 100)	Cộng
Tần số tương đối (%)	10	15	30	35	10	100

Bảng 33

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở *Bảng 33*.

Giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở *Bảng 33* được cho ở *Hình 23*.



Hình 23

5 Xét mẫu số liệu ghép nhóm ở *Ví dụ 4* với bảng tần số tương đối ghép nhóm là *Bảng 33*.

Trên mặt phẳng, hãy:

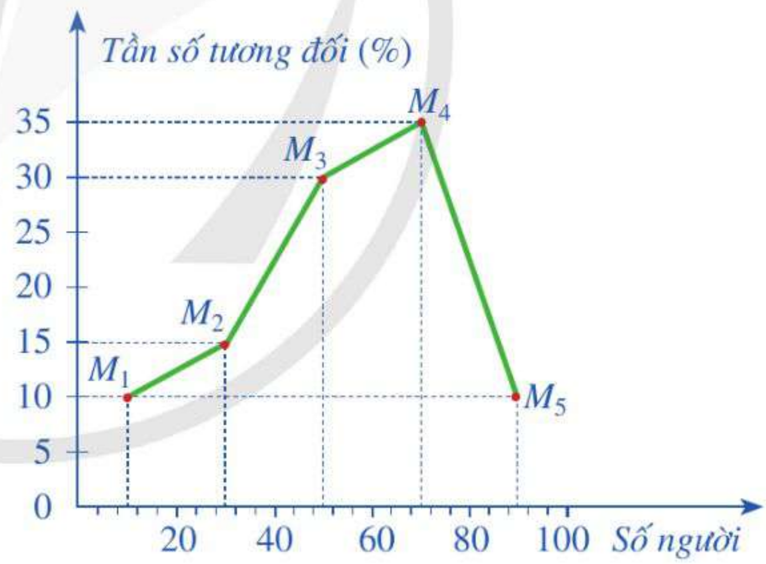
a) Xác định đầu mút trái, đầu mút phải, tần số tương đối f_1 của nhóm 1 ứng với nửa khoảng $[0 ; 20)$. Từ đó, xác định điểm $M_1(c_1 ; f_1)$, trong đó c_1 là trung bình cộng hai đầu mút của nhóm 1.

b) Bằng cách tương tự, xác định các điểm $M_2(c_2 ; f_2)$, $M_3(c_3 ; f_3)$, $M_4(c_4 ; f_4)$, $M_5(c_5 ; f_5)$, trong đó c_2, c_3, c_4, c_5 lần lượt là trung bình cộng hai đầu mút của nhóm 2, nhóm 3, nhóm 4, nhóm 5.

c) Vẽ đường gấp khúc $M_1M_2M_3M_4M_5$.

Nhận xét

Biểu đồ ở *Hình 24* gọi là *biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm* ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.



Hình 24

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho

Bước 2. Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu trong bảng tần số ghép nhóm nhận được ở *Bước 1*.

Ví dụ 5 Một câu lạc bộ thể hình thống kê số lượng người đến tập mỗi ngày trong 60 ngày liên tiếp. Sau khi ghép nhóm mẫu số liệu thu được, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

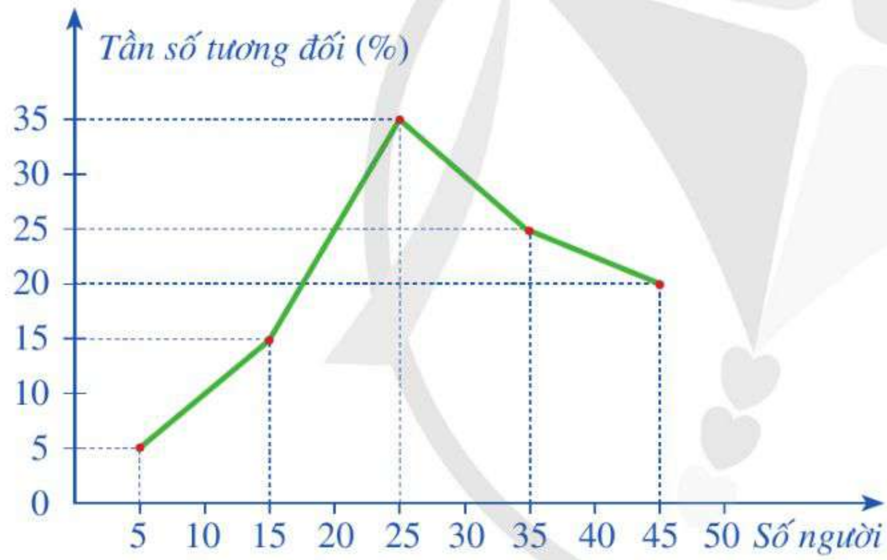
Nhóm	[0 ; 10)	[10 ; 20)	[20 ; 30)	[30 ; 40)	[40 ; 50)	Cộng
Tần số tương đối (%)	5	15	35	25	20	100

Bảng 34

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở *Bảng 34*.

Giải

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu ở *Bảng 34* được cho ở *Hình 25*.



Hình 25

4 *Bảng 35* là bảng tần số tương đối ghép nhóm của một mẫu số liệu ghép nhóm.

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[6 ; 12)	10
[12 ; 18)	30
[18 ; 24)	40
[24 ; 30)	20
Cộng	100

Bảng 35

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

BÀI TẬP

1. Khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở gia đình bác Ngọc là:

90	73	88	93	101	104	111	95	78	95
81	97	96	92	95	83	90	101	103	117
109	110	112	87	75	90	82	97	86	96

a) Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau: [70 ; 80), [80 ; 90), [90 ; 100), [100 ; 110), [110 ; 120). Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

2. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau (*Bảng 36*):

Nhóm	[10 ; 20)	[20 ; 30)	[30 ; 40)	[40 ; 50]	Cộng
Tần số (*n*)	8	18	24	10	60

Bảng 36

a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

3. Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học (đơn vị: học sinh), người ta có bảng tần số ghép nhóm như ở *Bảng 37*.

a) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

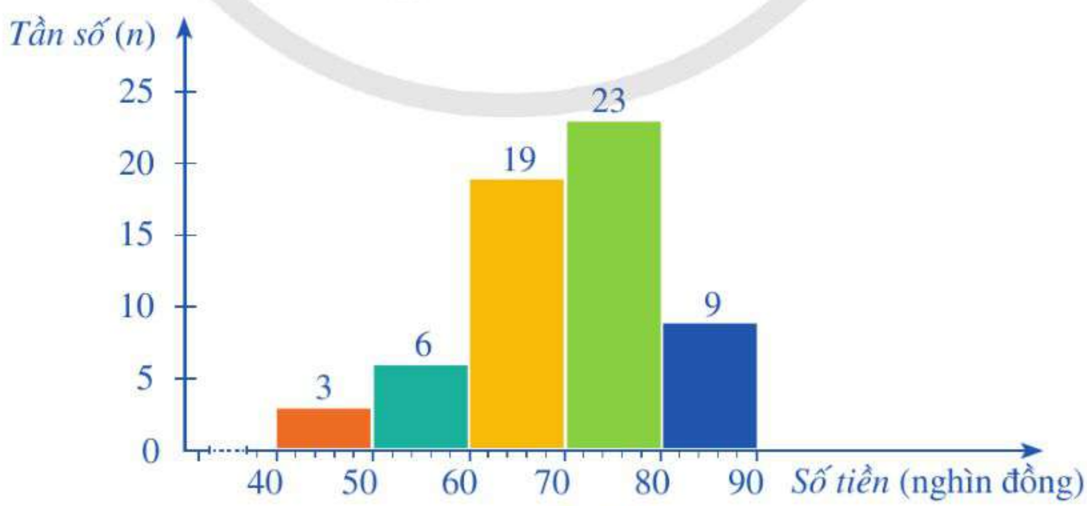
b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số (*n*)
[36 ; 38)	20
[38 ; 40)	15
[40 ; 42)	25
[42 ; 44)	30
[44 ; 46)	10
Cộng	$N = 100$

Bảng 37

4. Một cửa hàng sách thống kê số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở cửa hàng đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm ở *Hình 26*.



Hình 26

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

§4. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Đội văn nghệ của lớp 9A có 3 bạn nam và 3 bạn nữ. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn từ 6 bạn đó để hát song ca. Xét biến cố sau: "Trong 2 bạn được chọn ra, có 1 bạn nam và 1 bạn nữ".

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố ngẫu nhiên nói trên?

I. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

1

a) Hãy thực hiện hành động: Tung một đồng xu một lần.

Nhận xét: Hành động "Tung một đồng xu một lần" trong xác suất gọi là *phép thử*.

Chẳng hạn, gieo xúc xắc một lần, lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, … cũng là những ví dụ về phép thử.

b) Xét phép thử "Tung một đồng xu một lần".

Viết tập hợp Ω (đọc là: ô-mê-ga) gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu. Tập hợp Ω có bao nhiêu phần tử?

Nhận xét: Tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó hoàn toàn xác định được (cụ thể $\Omega = \{S; N\}$). Tuy nhiên, các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được. Phép thử đó gọi là *phép thử ngẫu nhiên* và tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* của phép thử.

> Có những phép thử mà tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử) và tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* của phép thử.

Chú ý

- Các kết quả có thể xảy ra của một phép thử có khả năng xuất hiện như nhau được gọi là *đồng khả năng*.
- Kết quả thuận lợi cho biến cố A là một kết quả có thể của phép thử làm cho biến cố A xảy ra.

Ví dụ 1 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc một lần".

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

Giải

a) Các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là: mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm.

b) Không gian mẫu của phép thử đó là:

Ω = {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}.

1 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp".

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

2 *Hình 27* mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, …, 12; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.

Xét phép thử "Quay đĩa tròn một lần".

a) Viết tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số ghi ở hình quạt mà chiếc kim chỉ vào khi đĩa dừng lại.

Hình 27

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố *A*: "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 3".

c) Tìm tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố *A* và số phần tử của tập hợp Ω.

Như chúng ta đã biết, tỉ số tìm được ở câu c của *Hoạt động 2* là *xác suất* của biến cố *A*.

Giả thiết rằng các kết quả có thể xảy ra của một phép thử là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố *A*, kí hiệu là P(*A*), bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố *A* và tổng số kết quả có thể xảy ra:

$$P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho } A}{\text{Tổng số kết quả có thể xảy ra}}.$$

Nhận xét: Để tính xác suất của biến cố A, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Kiểm tra tính đồng khả năng đối với các kết quả có thể xảy ra của phép thử

Bước 2. Đếm số kết quả có thể xảy ra, tức là đếm số phần tử của không gian mẫu Ω

Bước 3. Đếm số kết quả thuận lợi cho biến cố A

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

Ví dụ 2 Hai bạn nam Hùng, Dũng và hai bạn nữ Dung, Nguyệt tham gia đội văn nghệ của lớp 9A. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn từ bốn bạn đó để hát song ca.

a) Liệt kê các cách chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

B: "Trong hai bạn được chọn ra, có một bạn nam và một bạn nữ";

C: "Trong hai bạn được chọn ra, có bạn Nguyệt".

Giải

Xét phép thử "Chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca".

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Có 6 cách chọn ra hai bạn để hát song ca là: Hùng và Dũng; Hùng và Dung; Hùng và Nguyệt; Dũng và Dung; Dũng và Nguyệt; Dung và Nguyệt.

b) Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố B là: Hùng và Dung; Hùng và Nguyệt; Dũng và Dung; Dũng và Nguyệt.

Vậy $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố C là: Hùng và Nguyệt; Dũng và Nguyệt; Dung và Nguyệt.

Vậy $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2 Trong *Hoạt động 2*, tính xác suất của biến cố D: "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố".

Ví dụ 3 Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có hai chữ số.

a) Tìm số phần tử của tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của biến cố E: "Số tự nhiên được viết ra là bội của 9".

Giải

Xét phép thử "Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có hai chữ số".

Ta thấy, các kết quả xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là:

$\Omega = \{11; 13; 15; ...; 99\}$.

Số phần tử của tập hợp Ω là 45.

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố E là: 27; 45; 63; 81; 99. Do đó, có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

Vậy $P(E) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

3 Nền ẩm thực Việt Nam được đánh giá cao trên thế giới, thu hút nhiều người sành ăn trong nước và quốc tế. 16 món ngon đặc sắc đến từ các tỉnh, thành phố được chọn ra như sau: cốm Vòng (Hà Nội), chả mực (Quảng Ninh), bánh đậu xanh (Hải Dương), bún cá cay (Hải Phòng), gà đồi Yên Thế (Bắc Giang), nộm da trâu (Sơn La), thắng cố (Lào Cai), miến lươn (Nghệ An), cơm hến (Huế), cá mực nhảy (Hà Tĩnh), bánh mì Hội An (Quảng Nam), sủi cảo (Thành phố Hồ Chí Minh), bánh canh Trảng Bàng (Tây Ninh), cá lóc nướng (Cần Thơ), cơm dừa (Bến Tre), gỏi cá (Kiên Giang).

Chọn ngẫu nhiên một món trong 16 món ngon đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) S: "Món ngon được chọn thuộc miền Bắc";

b) T: "Món ngon được chọn thuộc miền Trung";

c) U: "Món ngon được chọn thuộc miền Nam".

BÀI TẬP

1. Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau.

Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp".

a) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

c) Tính xác suất của biến cố: "Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia cho 7 dư 1".

2. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lớn hơn 499 và nhỏ hơn 1 000.

a) Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra của phép thử trên?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Số tự nhiên được viết ra chia hết cho 100";

B: "Số tự nhiên được viết ra là lập phương của một số tự nhiên".

3. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 27";

b) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lớn hơn 19 và nhỏ hơn 51".

4. Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường trung học cơ sở có 6 bạn, trong đó có 3 bạn nam là: Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); Việt (lớp 9C) và 3 bạn nữ là: An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D). Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện của trường.

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Bạn được chọn ra là bạn nữ";

B: "Bạn được chọn ra thuộc lớp 9A".

5. Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hai điểm A, B được tô màu đỏ, ba điểm C, D, E được tô màu xanh. Bạn Châu chọn ra ngẫu nhiên một điểm tô màu đỏ và một điểm tô màu xanh (trong năm điểm đó) để nối thành một đoạn thẳng.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Châu có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

P: "Trong hai điểm được chọn ra, có điểm A";

Q: "Trong hai điểm được chọn ra, không có điểm C".

6. Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Linh có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

R: "Trong 2 bông hoa được chọn ra, có đúng 1 bông hoa màu đỏ";

T: "Trong 2 bông hoa được chọn ra, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu sản phẩm mới. Người điều tra yêu cầu mỗi người được phỏng vấn cho điểm mẫu sản phẩm đó theo thang điểm là 100. Kết quả thống kê như sau:

50	60	62	64	71	73	70	70	70	75
75	52	55	69	80	75	75	78	79	73
55	72	71	85	82	90	78	78	75	75
65	85	87	77	81	79	99	75	70	72

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau:

$$[50 ; 60),\ [60 ; 70),\ [70 ; 80),\ [80 ; 90),\ [90 ; 100).$$

a) Tần số ghép nhóm của nhóm [70 ; 80) là:

A. 20. B. 21. C. 22. D. 23.

b) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [50 ; 60) là:

A. 10%. B. 12,5%. C. 5%. D. 15%.

2. Một hộp có 25 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 2, 4, 6, ..., 48, 50; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xác suất của biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 26" là:

A. $\frac{14}{25}$. B. $\frac{13}{25}$. C. $\frac{12}{25}$. D. $\frac{24}{25}$.

3. *Hình 28* mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm sáu phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, 4, 5, 6; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn và ghi lại số ở hình quạt mà chiếc kim chỉ vào khi đĩa dừng lại. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại số liệu sau 40 lần quay đĩa tròn:

Hình 28

1	1	3	5	4	6	1	2	6	4
1	5	5	2	4	3	3	6	5	2
5	6	2	3	3	4	2	3	3	4
4	5	4	6	1	2	3	5	6	6

a) Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?

b) Tìm tần số của mỗi giá trị đó.

Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

c) Tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó.

Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

4. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 50 cây con ở vườn thí nghiệm, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Nhóm	[0 ; 10)	[10 ; 20)	[20 ; 30)	[30 ; 40)	[40 ; 50)	Cộng
Tần số tương đối (%)	6	18	36	24	16	100

Bảng 38

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 38*.

5. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 60 chiếc ô tô:

100	105	115	116	130	135	138	132	135	120	118	118	121	124	128
125	128	120	124	140	140	146	145	142	142	135	135	142	144	151
145	148	150	150	159	155	151	156	155	151	157	155	159	151	155
154	152	153	160	162	175	176	165	188	198	175	178	172	170	195

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau:

[100 ; 120), [120 ; 140), [140 ; 160), [160 ; 180), [180 ; 200).

a) Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

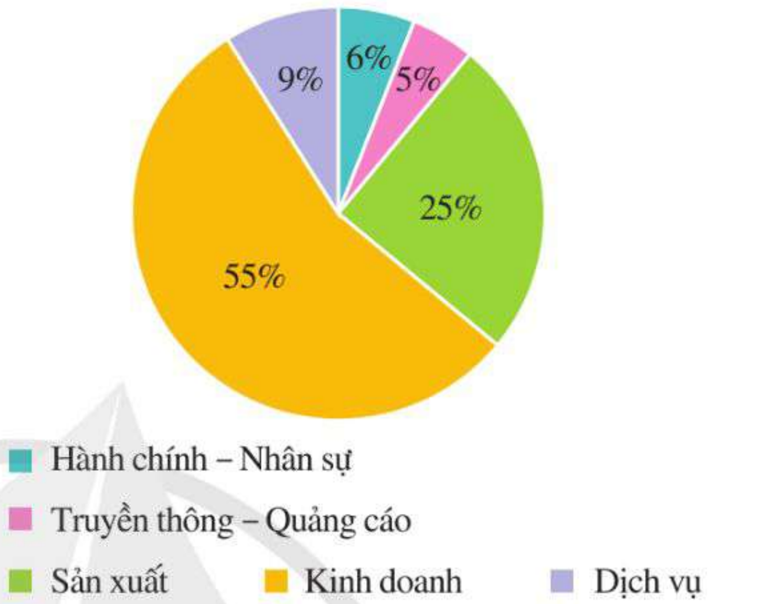
6. Mỗi nhân viên của một công ty làm việc ở một trong năm bộ phận của công ty đó là: Hành chính – Nhân sự; Truyền thông – Quảng cáo; Kinh doanh; Sản xuất; Dịch vụ.

Biểu đồ hình quạt tròn trong *Hình 29* thống kê tỉ lệ nhân viên thuộc mỗi bộ phận.

Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Nhân viên được chọn thuộc bộ phận Kinh doanh";

B: "Nhân viên được chọn không thuộc bộ phận Hành chính – Nhân sự hay Dịch vụ".



Hình 29

7. Biểu đồ cột kép ở *Hình 30* biểu diễn số lượng học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của một trường trung học cơ sở.

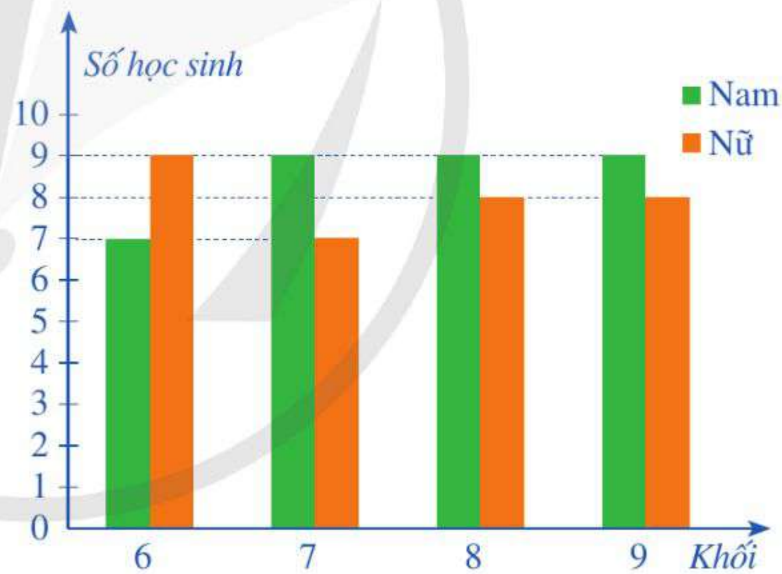
Chọn ngẫu nhiên một học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của trường đó.

Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn là nam";

B: "Học sinh được chọn thuộc khối 6";

C: "Học sinh được chọn là nữ và không thuộc khối 9".



Hình 30

8. Trong một kì thi học sinh giỏi Toán, tỉ lệ học sinh đạt giải là 35%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đã tham gia kì thi đó. Tính xác suất của biến cố: "Học sinh được chọn đạt giải".

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 2

MẬT ĐỘ DÂN SỐ

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Giới thiệu về mật độ dân số

Trước hết, ta nhắc lại những khái niệm sau:

- *Dân số* là tập hợp người sinh sống trong một quốc gia, khu vực, vùng địa lí kinh tế hoặc một đơn vị hành chính (Căn cứ khoản 1, Điều 3, Pháp lệnh dân số 2003).
- *Mật độ dân số* là số dân tính bình quân trên một kilômét vuông diện tích lãnh thổ.

  Mật độ dân số có thể tính cho toàn quốc hoặc riêng từng vùng (nông thôn, thành thị, vùng kinh tế), từng tỉnh, từng huyện, từng xã, … nhằm phản ánh tình hình phân bố dân số theo địa lí vào một thời gian nhất định.
- Mật độ dân số được tính bằng cách chia dân số (thời điểm hoặc bình quân) của một vùng dân cư nhất định cho diện tích lãnh thổ (đơn vị: km^2) của vùng đó. Công thức tính như sau:

$$\text{Mật độ dân số (người/km}^2\text{)} = \frac{\text{Số lượng dân số (người)}}{\text{Diện tích lãnh thổ (km}^2\text{)}}.$$

Ví dụ: Năm 2021, mật độ dân số (đơn vị: người/km^2) của các tỉnh, thành phố: Sơn La; Yên Bái; Hà Nội; Hà Nam; Ninh Bình; Thái Bình; Nghệ An; Hà Tĩnh; Thừa Thiên Huế; Khánh Hoà; Bà Rịa – Vũng Tàu; Long An; Thành phố Hồ Chí Minh; Hậu Giang lần lượt là: 88; 122; 2 398; 941; 642; 1 138; 207; 219; 233,2; 240; 593; 384; 4 640; 495.

(Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022)

2. Ý nghĩa của việc thống kê mật độ dân số

Dữ liệu thống kê về mật độ dân số sẽ giúp cho mỗi quốc gia:

- Nắm được tình hình dân số sinh sống ở một vùng địa lí (hoặc một không gian nhất định). Qua đó, có thể đánh giá dân số ở một vùng (hoặc một không gian nhất định) một cách khái quát nhất có thể, tính toán lượng tài nguyên cần sử dụng cho khu vực đó, cũng như có thể điều chỉnh, đề xuất kế hoạch để tạo việc làm, điều kiện sống tốt cho dân cư ở những nơi có điều kiện kinh tế khó khăn mà mật độ dân số cao.

Ngoài ra, căn cứ vào mật độ dân số, tiến hành phân bổ dân cư hợp lí giữa các khu vực, vùng địa lí để tạo điều kiện phát triển kinh tế – xã hội tốt nhất thông qua các chương trình, dự án khai thác đất đai, tài nguyên tiềm năng nhằm phát huy thế mạnh của từng khu vực (Căn cứ khoản 1, Điều 16, Pháp lệnh dân số 2003).

- Thực hiện việc quy hoạch các đô thị.

Chẳng hạn, mật độ dân số là một trong các tiêu chí cơ bản để phân loại đô thị: loại đặc biệt, I, II, III (Điều 140, Luật Tổ chức chính quyền địa phương 2015). Cụ thể là:

Loại đô thị	Mật độ dân số toàn đô thị (người/km^2)	Mật độ dân số khu vực nội thành, nội thị (người/km^2)
Loại đặc biệt	Từ 3 000 trở lên	Từ 12 000 trở lên
Loại I	Từ 2 000 trở lên	Từ 10 000 trở lên
Loại II	Từ 1 800 trở lên	Từ 8 000 trở lên
Loại III	Từ 1 400 trở lên	Từ 7 000 trở lên

(Nguồn: Phụ lục số 3 ban hành kèm Nghị quyết số 1210/2016/UBTVQH13)

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện những nhiệm vụ sau:

– Chia lớp thành các nhóm học sinh và cử nhóm trưởng của mỗi nhóm;

– Đối với mỗi nhóm học sinh, giáo viên chọn một tỉnh, thành phố ở Việt Nam và giao nhiệm vụ cho nhóm tìm hiểu mật độ dân số của các quận, huyện ở tỉnh, thành phố đó qua người thân hoặc qua trang web của những đơn vị hành chính đó;

– Giáo viên giao nhiệm vụ cho mỗi nhóm học sinh tìm hiểu mật độ dân số của 10 quốc gia trên thế giới qua người thân hoặc qua các trang web. Từ đó, nêu nhận xét về mật độ dân số của Việt Nam so với một số nước trên thế giới.

2 Các nhóm trao đổi, thảo luận.

– Xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và từng nhiệm vụ thành phần.

– Nhóm trưởng phân công nhiệm vụ cho các thành viên trong nhóm.

– Xác định thời gian hoàn thành từng nhiệm vụ thành phần và nhiệm vụ chung.

2. Phần thực hiện

– Tìm hiểu và làm báo cáo về mật độ dân số của các quận, huyện ở tỉnh, thành phố theo mẫu sau:

Bảng thống kê mật độ dân số của các quận, huyện ở tỉnh, thành phố …

Quận, huyện	Mật độ dân số (người/km^2)
?	?
…	…

– Tìm hiểu và làm báo cáo về mật độ dân số của một số quốc gia theo mẫu sau:

Bảng thống kê mật độ dân số của một số quốc gia

Quốc gia	Mật độ dân số (người/km^2)
?	?
…	…

3. Phần tổng kết

3 Làm việc chung cả lớp để thực hiện các nhiệm vụ sau:

– Các nhóm báo cáo kết quả thu thập được;

– Dựa trên kết quả thu thập của mỗi nhóm, cả lớp góp ý cho bảng thống kê của mỗi nhóm;

– Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: đánh giá trong dạy học dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

Chương VII

HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$; phương trình bậc hai một ẩn; định lí Viète.

§1. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Galileo Galilei (1564 – 1642), sinh tại thành phố Pisa (Italia), là nhà bác học vĩ đại của thời kì Phục Hưng. Ông được mệnh danh là "cha đẻ của khoa học hiện đại". Ngày 24/01/1590, tại đỉnh tháp nghiêng Pisa, ông đã thả hai quả cầu bằng chì có trọng lượng khác nhau để làm thí nghiệm nghiên cứu chuyển động của vật rơi tự do. Ông khẳng định rằng khi một vật rơi tự do (nếu không kể đến sức cản của không khí), tốc độ của vật rơi tăng dần và không phụ thuộc vào trọng lượng của vật. Quãng đường chuyển động y (m) của một vật rơi tự do được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$ với x là thời gian tính bằng giây.

Tháp nghiêng Pisa

(Ảnh: Muratart)

Hàm số $y = 5x^2$ và đồ thị của hàm số đó có những tính chất như thế nào?

I. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

1 Xét hàm số $y = 5x^2$ trong tình huống ở phần mở đầu.

Hàm số đó có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ hay không? Nếu có, hãy xác định hệ số a của x^2.

Ví dụ 1 Hàm số nào sau đây có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của x^2.

a) $y = x^2$.　　b) $y = -3x^2$.　　c) $y = \dfrac{4x^2}{9}$.　　d) $y = \dfrac{2}{x^2}$.

Giải

Các hàm số có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là:

a) $y = x^2$, có $a = 1$;

b) $y = -3x^2$, có $a = -3$;

c) $y = \dfrac{4x^2}{9}$, có $a = \dfrac{4}{9}$.

1 Hàm số nào sau đây có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của x^2.

a) $y = -x^2$.

b) $y = \dfrac{x^2}{2}$.

c) $y = \dfrac{1}{4x^2}$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = 4x^2$. Tính giá trị của y khi:

a) $x = 0$;

b) $x = 2$;

c) $x = -2$.

Giải

a) Với $x = 0$ thì $y = 4 \,.\, 0^2 = 0$.

b) Với $x = 2$ thì $y = 4 \,.\, 2^2 = 16$.

c) Với $x = -2$ thì $y = 4 \,.\, (-2)^2 = 16$.

2 Cho hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^2$. Tính giá trị của y khi:

a) $x = -3$;

b) $x = 0$;

c) $x = 3$.

Nhận xét: Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

2

a) Nêu khái niệm đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

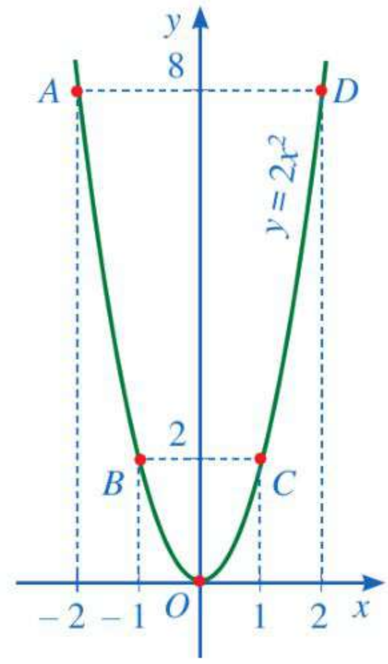
b) Xét hàm số $y = 2x^2$. Hãy thực hiện các hoạt động sau:

– Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	?	?	?	?	?

– Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định các điểm có hoành độ và tung độ như trong bảng giá trị trên.

– Quan sát *Hình 1*, vẽ đường cong như ở *Hình 1* đi qua 5 điểm A, B, O, C, D. Đường cong đó được gọi là đường parabol và đường parabol đó là đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.



Hình 1

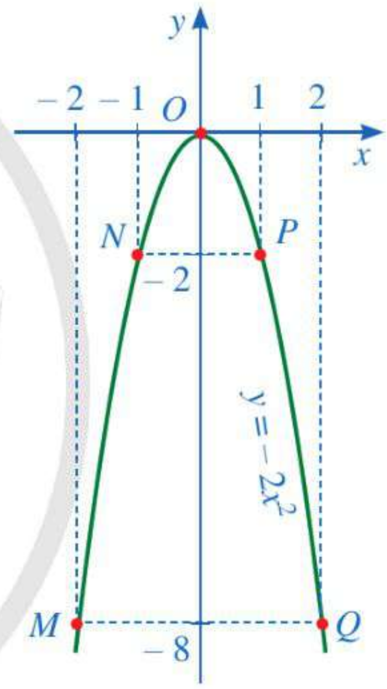
c) Xét hàm số $y = -2x^2$. Hãy thực hiện các hoạt động sau:

– Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	?	?	?	?	?

– Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định các điểm có hoành độ và tung độ như trong bảng giá trị trên.

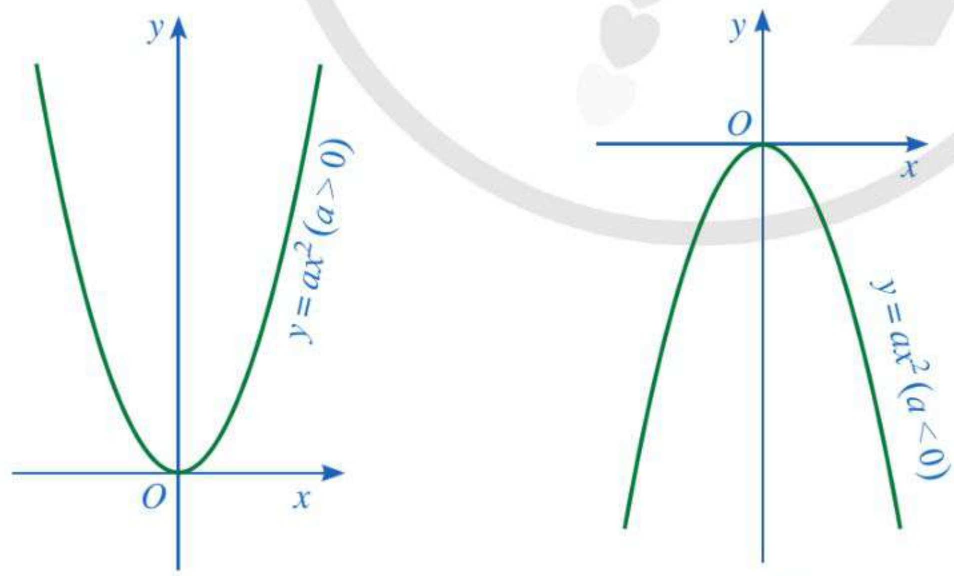
– Quan sát *Hình 2*, vẽ đường cong như ở *Hình 2* đi qua 5 điểm M, N, O, P, Q. Đường cong đó được gọi là đường parabol và đường parabol đó là đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.



Hình 2

Nhận xét

- Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong được gọi là parabol. Parabol đó luôn đi qua gốc toạ độ và có dạng như sau:



a) *b)*

Hình 3

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị đó nằm phía trên trục hoành (*Hình 3a*). Ngược lại, nếu $a < 0$ thì đồ thị đó nằm phía dưới trục hoành (*Hình 3b*).

Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng giá trị để tìm giá trị của y tương ứng với một số giá trị cụ thể của x

Bước 2. Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm cụ thể thuộc đồ thị của hàm số đó

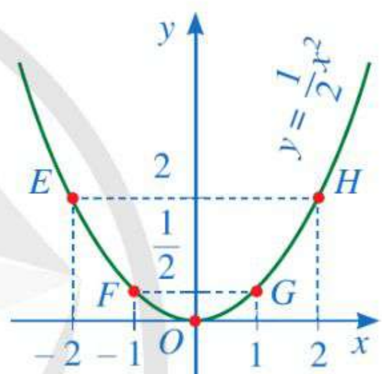
Bước 3. Vẽ parabol đi qua gốc toạ độ và các điểm đã xác định ở *Bước 2*, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

Ví dụ 3 Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

Giải

– Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



Hình 4

– Vẽ các điểm $E(-2\ ;\ 2)$, $F\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $O(0\ ;\ 0)$, $G\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $H(2\ ;\ 2)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

– Vẽ đường parabol đi qua 5 điểm E, F, O, G, H, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (*Hình 4*).

3 Vẽ đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.

3 Quan sát đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ ở *Hình 4*, hãy nêu nhận xét về vị trí cặp điểm E và H; F và G đối với trục Oy.

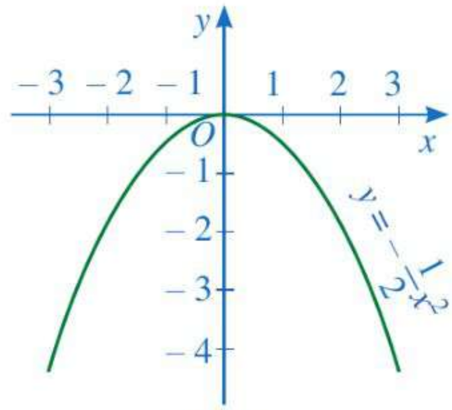
Ta thừa nhận tính chất sau:

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một parabol đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol được cho ở *Hình 5*.

a) Các điểm $M(-2\,;-2)$; $N(2\,;-2)$ có thuộc parabol đó hay không?

b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Oy.



Hình 5

Giải

a) Do $-2 = -\dfrac{1}{2}\cdot(-2)^2$ và $-2 = -\dfrac{1}{2}\cdot 2^2$ nên các điểm $M(-2\,;-2)$; $N(2\,;-2)$ thuộc parabol đó.

b) Ta thấy hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục Oy.

Ví dụ 5 Lực F (N) của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ v (m/s) của gió theo công thức: $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là 2 m/s thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng 120 N.

a) Tính hằng số a.

b) Khi tốc độ của gió là $v = 10$ m/s thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?


Thuyền buồm

(Ảnh: De Visu)

c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là 12 000 N. Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là 90 km/h hay không? Vì sao?

Giải

a) Thay $v = 2$, $F = 120$ vào công thức $F = av^2$, ta được: $120 = a\,.\,2^2$ hay $4a = 120$. Suy ra $a = 30$.

b) Do $a = 30$ nên $F = 30v^2$. Với $v = 10$, ta có:

$$F = 30\,.\,10^2 = 3\,000\ \text{(N)}.$$

c) Đổi 90 km/h = 25 m/s. Với $v = 25$, ta có:

$$F = 30\,.\,25^2 = 18\,750\ \text{(N)}.$$

Ta thấy $18\,750 > 12\,000$ nên con thuyền không thể ra khơi khi tốc độ gió là 90 km/h.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = ax^2$. Tìm a, biết rằng khi $x = -3$ thì $y = 5$.

2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	?	?	?	?	?	?	?

b) Dựa vào bảng giá trị trên, vẽ đồ thị của hàm số đó.

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt bằng -6; 10.

d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ bằng 27.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm $M(2\,;-1)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a.

b) Điểm $A(4\,;-4)$ có thuộc đồ thị của hàm số hay không?

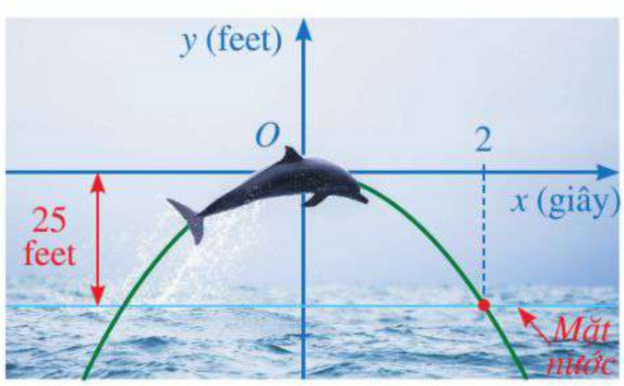
c) Hãy tìm một số điểm (không kể điểm O) thuộc đồ thị của hàm số, rồi vẽ đồ thị của hàm số.

4. Hàm số $y = at^2$ biểu thị quãng đường (đơn vị: mét) mà một chiếc xe đua đi được trong khoảng thời gian t (giây). Giả sử một chiếc xe đua đi được 125 m sau khoảng thời gian là 5 giây.

a) Tìm hệ số a.

b) Vẽ đồ thị của hàm số đó.

5. Cá heo có thể nhảy cao tới 25 feet và thực hiện các thủ thuật như nhảy qua vòng, lộn nhào trong không trung. Giả sử quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$, với gốc toạ độ là vị trí cao nhất mà cá heo đạt được, cách mặt nước 25 feet, trong đó y được tính theo đơn vị feet và x được tính theo đơn vị giây (*Hình 6*). Biết rằng sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất đó, cá heo rơi chạm mặt nước. Tìm hàm số biểu thị quỹ đạo nhảy của cá heo.



(*Ảnh: Gonzalo Jara*)

Hình 6

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Giả sử khi ném một quả bóng vào rổ, độ cao y (feet) của quả bóng và thời gian x (giây) liên hệ với nhau bởi công thức:

$$y = -5{,}8x^2 + 11{,}8x + 7.$$

(*Nguồn: https://askiitians.com*)

Khi quả bóng chạm đất, ta có thời gian x thoả mãn phương trình:

$$-5{,}8x^2 + 11{,}8x + 7 = 0.$$

Ném bóng vào rổ

(*Ảnh: FS Stock*)

Làm thế nào để giải được phương trình trên?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, đối với đa thức $-5{,}8x^2 + 11{,}8x + 7$ ở vế trái của phương trình, hãy xác định: bậc; hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

> *Phương trình bậc hai một ẩn* (nói gọn là *phương trình bậc hai*) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn? Đối với những phương trình bậc hai một ẩn đó, xác định hệ số a của x^2, hệ số b của x, hệ số tự do c.

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$. b) $0x^2 + 8x + 6 = 0$. c) $3x^2 - 8 = 0$.

Giải

a) Phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x và có $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$.

b) Phương trình $0x^2 + 8x + 6 = 0$ không phải là phương trình bậc hai một ẩn vì $a = 0$.

c) Phương trình $3x^2 - 8 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x và có $a = 3$, $b = 0$, $c = -8$.

1 Cho hai ví dụ về:

a) Phương trình bậc hai ẩn t;

b) Phương trình không phải là phương trình bậc hai một ẩn.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

2 Giải các phương trình:

a) $(x-2)^2 = 0$; b) $(x-1)^2 = 9$; c) $(x-3)^2 = -1$.

Nhận xét: Cho m, n là hai số thực. Ta có thể giải phương trình $(x-n)^2 = m$ như sau:

- Khi $m > 0$, ta có: $(x-n)^2 = m$

$$x - n = \sqrt{m} \text{ hoặc } x - n = -\sqrt{m}$$

$$x = n + \sqrt{m} \text{ hoặc } x = n - \sqrt{m}.$$

Như vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = n + \sqrt{m}$ và $x_2 = n - \sqrt{m}$.

- Khi m = 0, phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = n$ (nghiệm kép).
- Khi $m < 0$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2 Giải phương trình: $(x-1)^2 = 3$.

Giải

Ta có: $(x-1)^2 = 3$

$$x - 1 = \sqrt{3} \text{ hoặc } x - 1 = -\sqrt{3}$$

$$x = 1 + \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ và $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

2 Giải phương trình: $(x-4)^2 = 11$.

3 Xét phương trình

$$2x^2 - 4x - 16 = 0 \qquad (1)$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho 2, ta được phương trình:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad (2)$$

a) Tìm số thích hợp cho $\boxed{?}$ khi biến đổi phương trình (2) về dạng: $(x - \boxed{?})^2 = \boxed{?}$.

b) Từ đó, hãy giải phương trình (2).

c) Nêu các nghiệm của phương trình (1).

Nhận xét: Ta có thể giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ theo các bước sau:

Bước 1. Chia hai vế của phương trình cho a, ta được phương trình:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (3)$$

Bước 2. Viết lại số hạng $\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$ và thêm số hạng $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ vào hai vế của phương trình (3) rồi biến đổi để vế trái thành bình phương của một biểu thức:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Bước 3. Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi nó là *biệt thức* của phương trình (Δ là một chữ cái Hy Lạp, đọc là "đenta"). Khi đó, phương trình (3) viết được về dạng:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (4)$$

Bước 4. Giải phương trình (4). Từ đó, kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Tóm lại, ta có kết luận chung sau:

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3 Giải các phương trình:

a) $2x^2 - x - 3 = 0$;

b) $-3x^2 + x - 5 = 0$;

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

Giải

a) Phương trình có các hệ số $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$,

$$\Delta = (-1)^2 - 4 . 2 . (-3) = 25 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2.2} = \frac{3}{2};\ x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2.2} = -1.$$

b) Phương trình có các hệ số $a = -3$, $b = 1$, $c = -5$,

$$\Delta = 1^2 - 4.(-3).(-5) = -59 < 0.$$

Do $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Phương trình có các hệ số $a = 9$, $b = 6$, $c = 1$,

$$\Delta = 6^2 - 4.9.1 = 0.$$

Do $\Delta = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2.9} = \frac{-1}{3}.$$

3 Giải các phương trình:

a) $3x^2 - x - 0{,}5 = 0$;

b) $4x^2 + 10x + 15 = 0$;

c) $-x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$.

4 Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ với $b = 2b'$.

a) Đặt $\Delta' = b'^2 - ac$. Chứng tỏ rằng $\Delta = 4\Delta'$.

b) Xét tính có nghiệm và nêu công thức nghiệm (nếu có) của phương trình trong các trường hợp: $\Delta' > 0$; $\Delta' = 0$; $\Delta' < 0$.

Nhận xét: Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\quad x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức nghiệm vừa viết trên đây được gọi là *công thức nghiệm thu gọn*.

Ví dụ 4 Giải các phương trình:

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$;

b) $-16x^2 + 24x - 9 = 0$;

c) $3x^2 - 2x + 9 = 0$.

Giải

a) Phương trình có các hệ số $a = 3$, $b = -4$, $c = -2$. Do $b = -4$ nên $b' = -2$.

Ta có: $\Delta' = (-2)^2 - 3.(-2) = 10 > 0$.

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{10}}{3} = \frac{2+\sqrt{10}}{3};\ x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{10}}{3} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}.$$

b) Phương trình có các hệ số $a = -16$, $b = 24$, $c = -9$. Do $b = 24$ nên $b' = 12$.

Ta có: $\Delta' = 12^2 - (-16).(-9) = 0$.

Do $\Delta' = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-12}{-16} = \frac{3}{4}$.

c) Phương trình có các hệ số $a = 3$, $b = -2$, $c = 9$. Do $b = -2$ nên $b' = -1$.

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 3.9 = -26 < 0$.

Do $\Delta' < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

4 Giải các phương trình:

a) $x^2 - 6x - 5 = 0$;

b) $-3x^2 + 12x - 35 = 0$;

c) $-25x^2 + 30x - 9 = 0$.

Ví dụ 5 Giải phương trình: $3x^2 - 4x - 2 = 2x^2 + x - 8$.

Giải

Chuyển các số hạng ở vế phải của phương trình sang vế trái, ta nhận được phương trình sau:

$$3x^2 - 4x - 2 - 2x^2 - x + 8 = 0 \text{ hay } x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Ta giải phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (1)$

Phương trình trên có các hệ số $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$,

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 1 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2.1} = 3;\ x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2.1} = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

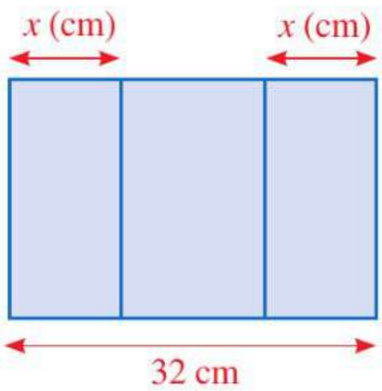
III. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

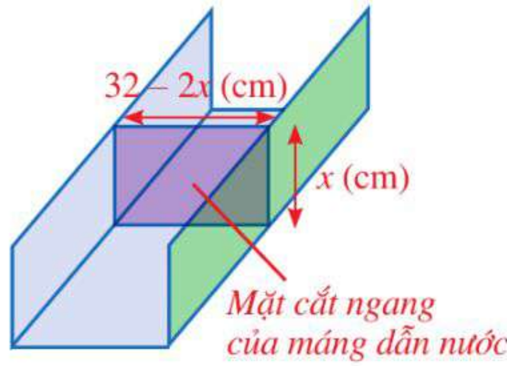
Phương trình bậc hai một ẩn giúp chúng ta giải quyết nhiều vấn đề trong toán học cũng như trong thực tiễn. Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 6 Bác Nam muốn uốn một tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang là 32 cm thành một máng dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như *Hình 7* với $0 < x < 16$. Bác Nam muốn diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước bằng 120 cm^2.

a) Thiết lập phương trình bậc hai ẩn x biểu thị diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước.

b) Tìm chiều cao của máng dẫn nước.





Hình 7

Giải

a) Mặt cắt ngang của máng dẫn nước có dạng hình chữ nhật với các kích thước là x (cm) và $32 - 2x$ (cm). Do đó, diện tích mặt cắt ngang là: $(32 - 2x)x$ (cm^2).

Để diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước bằng 120 cm^2 thì $(32 - 2x)x = 120$ hay ta có phương trình ẩn x biểu thị diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước là:

$$-2x^2 + 32x - 120 = 0 \text{ hay } x^2 - 16x + 60 = 0 \quad (1)$$

b) Phương trình (1) có các hệ số $a = 1$, $b = -16$, $c = 60$. Do $b = -16$ nên $b' = -8$.

Ta có: $\Delta' = (-8)^2 - 1 \,.\, 60 = 4 > 0$.

Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là:

$x_1 = \dfrac{-(-8) + \sqrt{4}}{1} = 10$; $x_2 = \dfrac{-(-8) - \sqrt{4}}{1} = 6$ (thoả mãn điều kiện $0 < x < 16$).

Vậy chiều cao của máng dẫn nước là 10 cm hoặc 6 cm.

Nhận xét: Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Lập phương trình bậc hai

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết

– Lập phương trình bậc hai biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng

Bước 2. Giải phương trình bậc hai

Bước 3. Kết luận

– Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn

– Đưa ra câu trả lời cho bài toán.

Ví dụ 7 Bác Hoa gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng. Sau kì hạn 12 tháng, tiền lãi của kì hạn đó được cộng vào tiền vốn, rồi bác Hoa tiếp tục đem gửi cho kì hạn 12 tháng tiếp theo. Tổng số tiền mà bác Hoa nhận được sau khi gửi 24 tháng trên là 113 635 600 đồng. Tìm lãi suất tính theo năm của ngân hàng đó, biết trong 24 tháng đó, lãi suất ngân hàng không thay đổi và bác Hoa không rút tiền ra khỏi ngân hàng.

Giải

Gọi lãi suất tính theo năm của ngân hàng đó là x%/năm ($x > 0$).

Số tiền bác Hoa có được sau khi gửi tiết kiệm 12 tháng đầu tiên là:

$$100 + 100 \cdot \frac{x}{100} = 100\left(1 + \frac{x}{100}\right) \text{ (triệu đồng).}$$

Số tiền bác Hoa có được sau khi gửi tiết kiệm 24 tháng là:

$$100\left(1 + \frac{x}{100}\right) + 100\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100} = 100\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$= 100\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \text{ (triệu đồng).}$$

Vì sau 24 tháng gửi tiết kiệm bác Hoa có tổng số tiền là 113 635 600 đồng nên ta có phương trình:

$100\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 113{,}6356$ hay $\frac{1}{100}(100 + x)^2 = 113{,}6356$; tức là $(100 + x)^2 = 11\ 363{,}56$.

Giải phương trình trên với $x > 0$, ta có:

$$100 + x = \sqrt{11\ 363{,}56}$$

$$100 + x = 106{,}6$$

$$x = 6{,}6 \text{ (thoả mãn điều kiện } x > 0).$$

Vậy lãi suất tính theo năm của ngân hàng đó là 6,6%/năm.

5 Trong bài toán ở phần mở đầu, sau bao lâu thì quả bóng chạm đất?

IV. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Ta có thể tìm nghiệm (đúng hoặc gần đúng) của phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng máy tính cầm tay. Mỗi loại máy tính khác nhau có thể có hệ thống phím, chức năng và cách sử dụng khác nhau. Tuy nhiên, chúng đều có quy tắc chung là phải mở chương trình giải phương trình bậc hai một ẩn rồi mới nhập dữ liệu. Chẳng hạn, ấn liên tiếp các phím MODE 5 3.

Ví dụ 8 Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

$$\sqrt{3}x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Giải

Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

Ta thấy trên màn hình hiện ra (kết quả gần đúng)

$x_1 = 3{,}473058841.$

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra (kết quả gần đúng) $x_2 = -1{,}163657764.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 \approx 3{,}5$; $x_2 \approx -1{,}2.$

6 Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

$$\sqrt{2}x^2 - 4x - \sqrt{3} = 0.$$

BÀI TẬP

1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn? Đối với những phương trình bậc hai một ẩn đó, xác định hệ số a của x^2, hệ số b của x, hệ số tự do c.

a) $0{,}5x^2 - 5x + \sqrt{3} = 0.$ b) $0x^2 - 0{,}25x + 6 = 0.$ c) $-x^2 + \sqrt{5}x = 0.$

2. Chứng minh rằng: Nếu $ac < 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt. Điều ngược lại có đúng hay không? Vì sao?

3. Giải các phương trình:

a) $x^2 - x - 5 = 0;$ b) $2x^2 - 0{,}5x + 0{,}03 = 0;$

c) $-16x^2 + 8x - 1 = 0;$ d) $-2x^2 + 5x - 4 = 0;$

e) $\dfrac{1}{5}x^2 - 5 = 0;$ g) $3x^2 - \sqrt{2}x = 0.$

4. Ra đa của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ô tô trong 10 phút, phát hiện rằng tốc độ v (km/h) của ô tô thay đổi phụ thuộc vào thời gian t (phút) bởi công thức $v = 3t^2 - 30t + 135$. (*Nguồn: Toán 9 – tập 2, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020*)

a) Tính tốc độ của ô tô khi $t = 5$.

b) Tính giá trị của t khi tốc độ ô tô bằng 120 km/h (theo đơn vị phút và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

5. Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2019, nhà máy sản xuất được 5 000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của dịch bệnh nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2020 và 2021 đều giảm, cụ thể: Số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2020 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2019; Số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2020. Biết rằng số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 giảm 51% so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2019. Tìm x.

6. Mảnh đất của bác An có dạng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng 10 m. Ở mỗi góc của mảnh đất, bác An đã dành một phần đất có dạng tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng $\frac{1}{8}$ chiều rộng của mảnh đất để trồng hoa (*Hình 8*). Tính chiều rộng mảnh đất đó, biết diện tích còn lại của mảnh đất không tính phần đất trồng hoa là 408 m^2.

Hình 8

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Đôi nét về lịch sử giải phương trình bậc hai

Ngay từ thời xa xưa đã xuất hiện nhiều vấn đề trong thực tiễn dẫn tới phương trình bậc hai và giải phương trình bậc hai. Vào thiên niên kỉ thứ hai trước Công nguyên, người Ba-bi-lon (Babylon) đã biết cách giải phương trình bậc hai. Các nhà toán học cổ Hy Lạp đã giải phương trình này bằng hình học. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai lần đầu tiên được nhà toán học Ấn Độ Bra-ma-gup-ta (Brahmagupta) thiết lập. Sau đó, vào thế kỉ IX, nhà bác học An Khô-va-ri-zmi (Al Khowarizmi) ở thành Bát-đa (Baghdad – Thủ đô nước Iraq ngày nay) cũng tìm ra được công thức này bằng phương pháp tách ra một bình phương nhờ một minh hoạ hình học.

(*Nguồn: Toán 9 – Tập 2, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020*)

§3. ĐỊNH LÍ VIÈTE

Đà Lạt là thành phố du lịch, có khí hậu mát mẻ. Nơi đây trồng nhiều loại hoa để phục vụ nhu cầu trong nước và xuất khẩu. Giả sử người ta trồng hoa trên một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với diện tích là 240 m^2, chu vi là 68 m.

Trồng hoa trong nhà kính

(*Ảnh: Martin Bergsma*)

Làm thế nào để xác định được chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn trồng hoa nói trên?

I. ĐỊNH LÍ VIÈTE

1 Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Giả sử phương trình đó có hai nghiệm là x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$; x_1x_2 theo các hệ số a, b, c.

Định lí sau đây, còn được gọi là định lí Viète, chỉ ra mối liên hệ giữa tổng và tích của hai nghiệm với các hệ số của phương trình bậc hai một ẩn.

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ví dụ 1 Cho phương trình $5x^2 - 7x - 3 = 0$.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tính $x_1 + x_2$; x_1x_2. Chứng minh cả hai nghiệm x_1, x_2 đều khác 0.

c) Tính $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

Giải

a) Phương trình có các hệ số $a = 5$, $b = -7$, $c = -3$ và $\Delta = (-7)^2 - 4 . 5 . (-3) = 109 > 0$.

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-7)}{5} = \frac{7}{5};\ x_1x_2 = \frac{-3}{5}.$$

Vì $x_1x_2 = \frac{-3}{5} \neq 0$ nên $x_1 \neq 0$ và $x_2 \neq 0$.

c) Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-7}{3}$.

1 Cho phương trình

$$-4x^2 + 9x + 1 = 0.$$

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tính $x_1 + x_2$; x_1x_2.

c) Tính $x_1^2 + x_2^2$.

Ví dụ 2 Cho phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c rồi tính $a + b + c$.

b) Chứng tỏ $x_1 = 1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Dùng định lí Viète để tìm nghiệm x_2 còn lại của phương trình.

Giải

a) Phương trình có các hệ số $a = 3$, $b = -4$, $c = 1$. Do đó $a + b + c = 3 + (-4) + 1 = 0$.

b) Ta thấy: $3 \,.\, 1^2 - 4 \,.\, 1 + 1 = 0$ nên $x_1 = 1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Theo định lí Viète, ta có: $x_1x_2 = \frac{1}{3}$. Do $x_1 = 1$ nên $1 \,.\, x_2 = \frac{1}{3}$ suy ra $x_2 = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3 Cho phương trình $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c rồi tính $a - b + c$.

b) Chứng tỏ $x_1 = -1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Dùng định lí Viète để tìm nghiệm x_2 còn lại của phương trình.

Giải

a) Phương trình có các hệ số $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$. Do đó $a - b + c = 2 - 5 + 3 = 0$.

b) Ta thấy: $2 \,.\, (-1)^2 + 5 \,.\, (-1) + 3 = 0$ nên $x_1 = -1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Theo định lí Viète, ta có: $x_1x_2 = \frac{3}{2}$. Do $x_1 = -1$ nên $(-1) \,.\, x_2 = \frac{3}{2}$ suy ra $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Nhận xét

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Ví dụ 4 Không tính Δ, giải phương trình

$$\sqrt{3}x^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)x - 2 = 0.$$

Giải

Phương trình có các hệ số $a = \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$, $c = -2$.

Ta thấy: $a + b + c = \sqrt{3} + \left(2 - \sqrt{3}\right) + (-2) = 0$.

Do đó phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$.

2 Không tính Δ, giải phương trình
$$4x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Ví dụ 5 Không tính Δ, giải phương trình

$$\sqrt{2}x^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)x + 1 = 0.$$

Giải

Phương trình có các hệ số $a = \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$, $c = 1$.

Ta thấy: $a - b + c = \sqrt{2} - \left(1 + \sqrt{2}\right) + 1 = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

3 Không tính Δ, giải phương trình
$$2x^2 - 9x - 11 = 0.$$

II. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH

2 Cho hai số có tổng bằng 5 và tích bằng 6.

a) Gọi một số là x. Tính số còn lại theo x.

b) Lập phương trình bậc hai ẩn x.

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình
$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Chú ý: Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 6 Cho hai số có tổng bằng -2 và tích bằng -8.

a) Lập phương trình bậc hai ẩn x nhận hai số đó làm nghiệm.

b) Tìm hai số đó.

Giải

a) Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (-2)x + (-8) = 0 \text{ hay } x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

b) Phương trình (1) có các hệ số $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$. Do $b = 2$ nên $b' = 1$.

Ta có: $\Delta' = 1^2 - 1 \,.\, (-8) = 9 > 0$.

Vì $\Delta' > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{1} = 2; \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{1} = -4.$$

Vậy hai số cần tìm là 2 và – 4.

4 Giải bài toán nêu trong phần mở đầu.

BÀI TẬP

1. Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì

A. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = -\frac{c}{a}$.

B. $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1x_2 = -\frac{b}{a}$.

C. $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$; $x_1x_2 = -\frac{c}{a}$.

D. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.

b) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.

c) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

d) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3. Giải thích vì sao nếu $ac < 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm là hai số trái dấu nhau.

4. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tính $x_1 + x_2$; x_1x_2. Chứng minh cả hai nghiệm x_1, x_2 đều khác 0.

c) Tính $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

d) Tính $x_1^2 + x_2^2$.

e) Tính $|x_1 - x_2|$.

5. Không tính Δ, giải các phương trình:

a) $3x^2 - x - 2 = 0$;

b) $-4x^2 + x + 5 = 0$;

c) $2\sqrt{3}x^2 + (5 - 2\sqrt{3})x - 5 = 0$;

d) $-3\sqrt{2}x^2 + (4 - 3\sqrt{2})x + 4 = 0$.

6. Tìm hai số trong mỗi trường hợp sau:

a) Tổng của chúng bằng 7 và tích của chúng bằng 12;

b) Tổng của chúng bằng 1 và tích của chúng bằng – 6.

7. Bác Đạt muốn thiết kế cửa sổ có dạng hình chữ nhật với diện tích bằng 2,52 m^2 và chu vi bằng 6,4 m. Tìm các kích thước của cửa sổ đó.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Nhà toán học François Viète

François Viète (F. Viète) sinh năm 1540 tại Pháp. Ông là một nhà toán học nổi tiếng. Chính ông là người đầu tiên dùng chữ để kí hiệu các ẩn và các hệ số của phương trình, đồng thời dùng chúng trong việc biến đổi và giải phương trình. Nhờ cách dùng chữ để kí hiệu mà Đại số đã phát triển mạnh mẽ.

Ông đã phát hiện mối liên hệ giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình mà ta vừa học. Ông còn nổi tiếng trong việc giải mật mã. Trong cuộc chiến tranh giữa Pháp và Tây Ban Nha hồi cuối thế kỉ XVI, vua Henri IV đã mời ông giải những bản mật mã lấy được của quân Tây Ban Nha. Nhờ đó mà quân Pháp đã phá được nhiều âm mưu của đối phương. Vua Tây Ban Nha Felipe II đã tuyên án thiêu sống ông trên dàn lửa. Tuy nhiên, họ không bắt được ông.

Ngoài việc làm toán, F. Viète còn là một luật sư và một chính trị gia nổi tiếng. Ông mất năm 1603.

(Trích: Toán 9 – tập 2, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020)

François Viète
(1540 – 1603)
(Minh hoạ: Geman Vizulis)

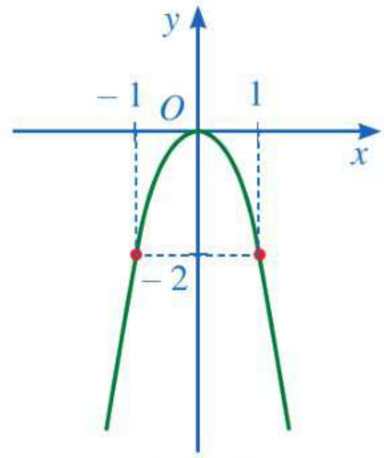
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

1. Cho phương trình $x^2 + 2x + c = 0$. Điều kiện của c để phương trình có hai nghiệm phân biệt là

A. $c < 1$. B. $c > 1$. C. $c \leq 1$. D. $c \geq 1$.

2. Giả sử đồ thị của hàm số $y = ax^2$ là parabol ở *Hình 9*. Giá trị của a bằng

A. 2. B. – 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.



Hình 9

3. Cho hàm số $y = -\frac{2}{3}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	– 3	– 1	0	1	3
$y = -\frac{2}{3}x^2$	?	?	?	?	?

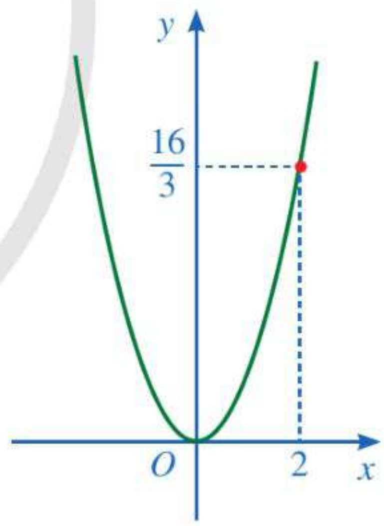
b) Dựa vào bảng giá trị trên, vẽ đồ thị của hàm số.

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường parabol ở *Hình 10* biểu diễn đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a.

b) Tìm điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng 3.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 4.



Hình 10

5. Giải các phương trình:

a) $3x^2 - 2x - 4 = 0$; b) $9x^2 - 24x + 16 = 0$; c) $2x^2 + x + \sqrt{2} = 0$.

6. Không tính Δ, giải các phương trình:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $-3x^2 + 5x + 8 = 0$; c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$.

7. Tìm hai số, biết tổng của chúng bằng $4\sqrt{2}$ và tích của chúng bằng 6.

8. Giải thích vì sao nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 2x - 3$; b) $3x^2 + 5x - 2$.

9. Một chiếc áo có giá niêm yết là 120 000 đồng. Để thanh lí chiếc áo, đầu tiên người ta giảm giá $x\%$ so với giá niêm yết. Do vẫn chưa bán được chiếc áo nên người ta tiếp tục giảm giá $x\%$ so với giá vừa được giảm. Sau hai đợt giảm giá, giá của chiếc áo còn 76 800 đồng. Tìm x.

10. Một công ty sản xuất các khay có dạng hình hộp chữ nhật để trồng rau trong chung cư ở các thành phố. Biết diện tích mặt đáy của khay đó là 2 496 cm^2 và chu vi mặt đáy của khay đó là 220 cm. Tìm các kích thước mặt đáy của khay đó.

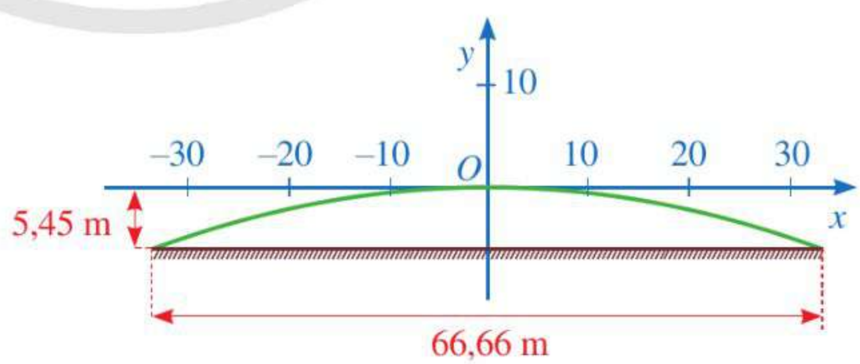
11. Cầu Trường Tiền (hay cầu Tràng Tiền) ở thành phố Huế được khởi công vào tháng 5/1899 và khánh thành vào ngày 18/12/1900. Cầu được thiết kế theo kiến trúc Gothic, bắc qua sông Hương. Từ Festival Huế năm 2002, cầu Trường Tiền được lắp đặt một hệ thống chiếu sáng đổi màu hiện đại. Cầu dài 402,60 m, gồm 6 nhịp dầm thép.

(*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)

Giả sử một nhịp dầm thép có dạng parabol $y = ax^2$ trong hệ trục toạ độ Oxy, ở đó Ox song song với mặt cầu. Biết rằng, hai chân nhịp dầm thép trên mặt cầu cách nhau 66,66 m, khoảng cách từ đỉnh cao nhất của nhịp dầm thép đến mặt cầu là 5,45 m (*Hình 11*).

Cầu Trường Tiền (cầu Tràng Tiền)

(*Ảnh: Huy Thoại*)



Hình 11

a) Xác định toạ độ của hai chân nhịp dầm thép đó.

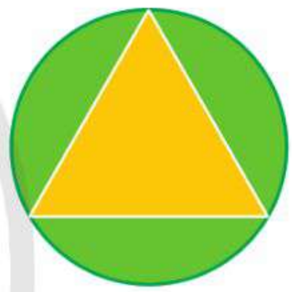
b) Tìm a (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Chương VIII
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: đường tròn ngoại tiếp tam giác, đường tròn nội tiếp tam giác; tứ giác nội tiếp.

§1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

Trong thiết kế logo ở *Hình 1*, đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác.

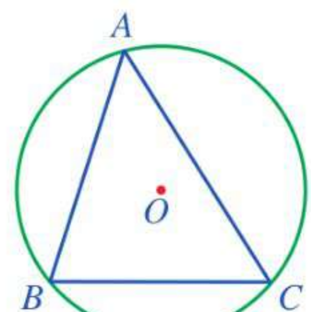


Hình 1

I. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

1. Định nghĩa

1 Cho biết các đỉnh của tam giác ABC (*Hình 2*) có thuộc đường tròn (O) hay không.



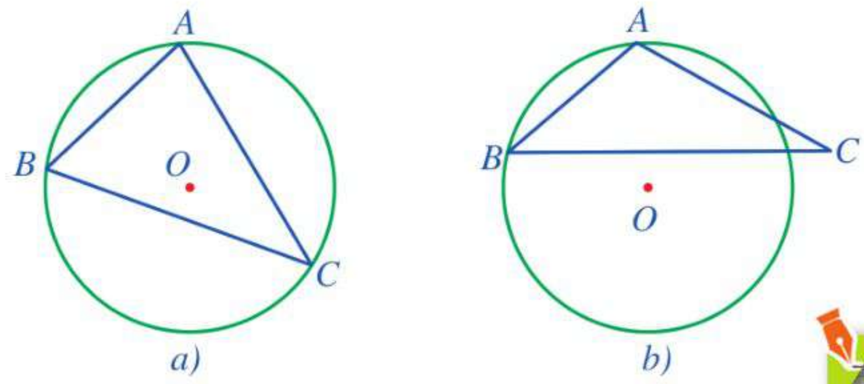
Hình 2

Ta có định nghĩa:

> Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác đó.

Chú ý: Khi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ABC *nội tiếp* đường tròn (O).

Ví dụ 1 Trong các hình *3a*, *3b*, ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC? Vì sao?



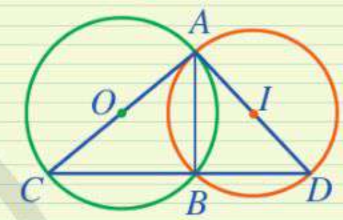
Hình 3

Giải

– Ở *Hình 3a*, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì nó đi qua cả ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

– Ở *Hình 3b*, đường tròn (O) không là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì nó không đi qua đỉnh C của tam giác ABC.

1 Quan sát *Hình 4* và cho biết trong hai đường tròn (O) và (I), đường tròn nào ngoại tiếp tam giác ABC, đường tròn nào ngoại tiếp tam giác ABD?



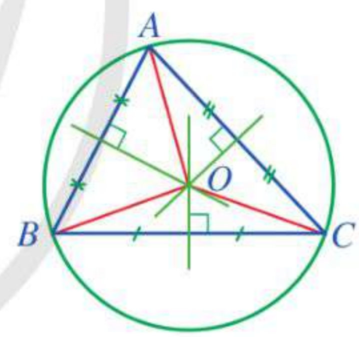
Hình 4

2. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

2 Cho tam giác ABC có O là giao điểm của ba đường trung trực (*Hình 5*).

a) Các đoạn thẳng OA, OB và OC có bằng nhau hay không?

b) Đặt $R = OA$. Đường tròn $(O; R)$ có phải là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay không? Vì sao?



Hình 5

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực của tam giác đó.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.

Nhận xét

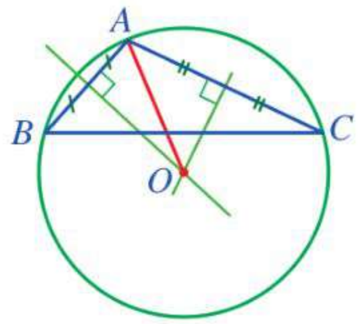
- Vì ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm hai đường trung trực bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn ngoại tiếp.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có góc A tù. Dùng thước thẳng và compa vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn. (*Hình 6*)

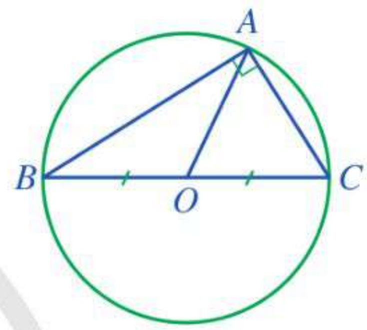
– Dùng thước thẳng và compa vẽ hai đường trung trực của các cạnh AB và AC. Gọi điểm O là giao điểm của hai đường trung trực đó.

– Dùng compa vẽ đường tròn $(O; OA)$. Đường tròn $(O; OA)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 6

3 Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O là trung điểm của BC (*Hình 7*). Đường tròn $(O; OB)$ có phải là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC hay không?



Hình 7

> *Đường tròn ngoại tiếp* tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a$, $AC = 4a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo a.

Giải

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pythagore).

Suy ra $BC^2 = (3a)^2 + (4a)^2 = 25a^2$.

Do đó $BC = \sqrt{25a^2} = 5a$.

> **2** Nêu cách sử dụng ê ke để xác định tâm của một đường tròn bất kì khi chưa biết tâm của nó.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng nửa cạnh huyền BC. Vậy $R = \dfrac{5a}{2} = 2{,}5a$.

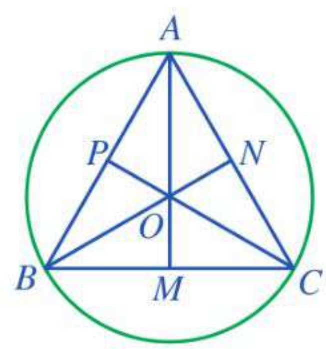
4 Cho tam giác đều ABC cạnh a, ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại trọng tâm O (*Hình 8*).

a) AM, BN, CP có là các đường trung trực của tam giác ABC hay không?

b) Điểm O có là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay không?

c) Tính AM theo a.

d) Tính OA theo a.



Hình 8

- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.
- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4 Ba vị trí A, B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m. Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C.

Giải

Vì O cách đều ba đỉnh A, B, C của tam giác đều ABC nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Suy ra khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C là:

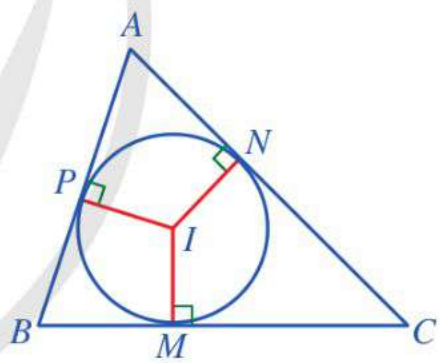
$$\frac{15\,.\,\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}\ (\text{m}).$$

3 Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;\ 2\text{ cm})$. Tính AB.

II. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

1. Định nghĩa

5 Cho tam giác ABC và đường tròn (I) (*Hình 9*). Nêu vị trí tương đối của các đường thẳng AB, BC, CA với đường tròn (I).

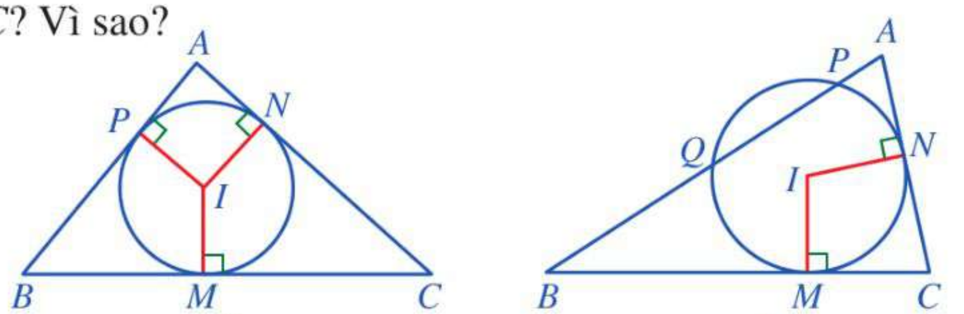


Hình 9

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác đó.

Chú ý: Khi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, ta còn nói tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I).

Ví dụ 5 Trong các hình *10a*, *10b*, ở hình nào ta có đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC? Vì sao?



a) *b)*

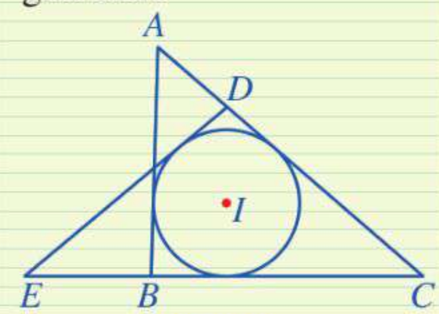
Hình 10

Giải

– Ở *Hình 10a*, đường tròn (*I*) là đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* vì nó tiếp xúc với ba cạnh *AB*, *BC*, *CA* lần lượt tại *P*, *M*, *N*.

– Ở *Hình 10b*, đường tròn (*I*) không là đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* vì nó không tiếp xúc với cạnh *AB*.

4 Trong *Hình 11*, đường tròn (*I*) là đường tròn nội tiếp những tam giác nào?



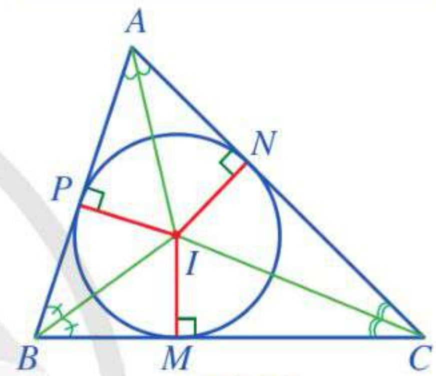
Hình 11

2. Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

6 Cho tam giác *ABC* có *I* là giao điểm của ba đường phân giác. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là hình chiếu của *I* trên các cạnh *BC*, *CA*, *AB* (*Hình 12*).

a) So sánh các đoạn thẳng *IM*, *IN* và *IP*.

b) Đặt $r = IM$. Đường tròn $(I; r)$ có phải là đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* hay không? Vì sao?



Hình 12

- *Tâm đường tròn nội tiếp tam giác* là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó.
- *Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác* bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.

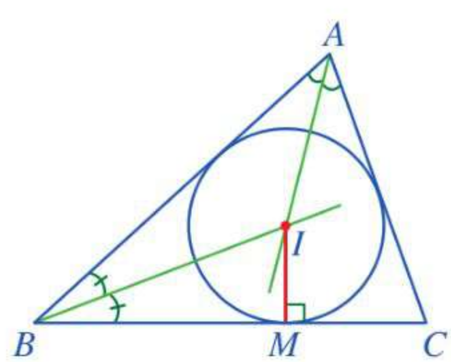
Nhận xét

- Vì ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm hai đường phân giác bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn nội tiếp.

Ví dụ 6 Cho tam giác *ABC*. Dùng thước thẳng, ê ke và compa vẽ đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

Hướng dẫn. (*Hình 13*)

– Dùng thước thẳng và compa vẽ hai đường phân giác của các góc *BAC* và *ABC*. Gọi điểm *I* là giao điểm của hai đường phân giác đó.



Hình 13

– Dùng ê ke vẽ đường vuông góc *IM* kẻ từ *I* đến đường thẳng *BC*.

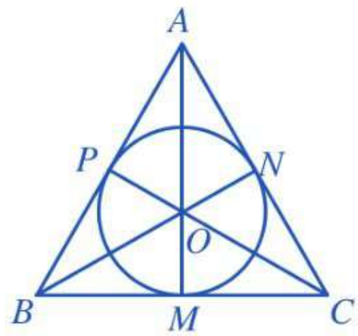
– Dùng compa vẽ đường tròn (*I*; *IM*). Đường tròn (*I*; *IM*) là đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

7 Cho tam giác đều ABC cạnh a, ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại trọng tâm O (*Hình 14*).

a) AM, BN, CP có là các đường phân giác của tam giác ABC hay không?

b) Điểm O có là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC hay không?

c) Tính OM theo a.



Hình 14

- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.
- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 7 Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 12 m. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính diện tích phần đất trồng hoa đó (theo đơn vị mét vuông, lấy $\pi \approx 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC.

Suy ra bán kính của phần đất trồng hoa đó là:

$$r = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}\ (\text{m}).$$

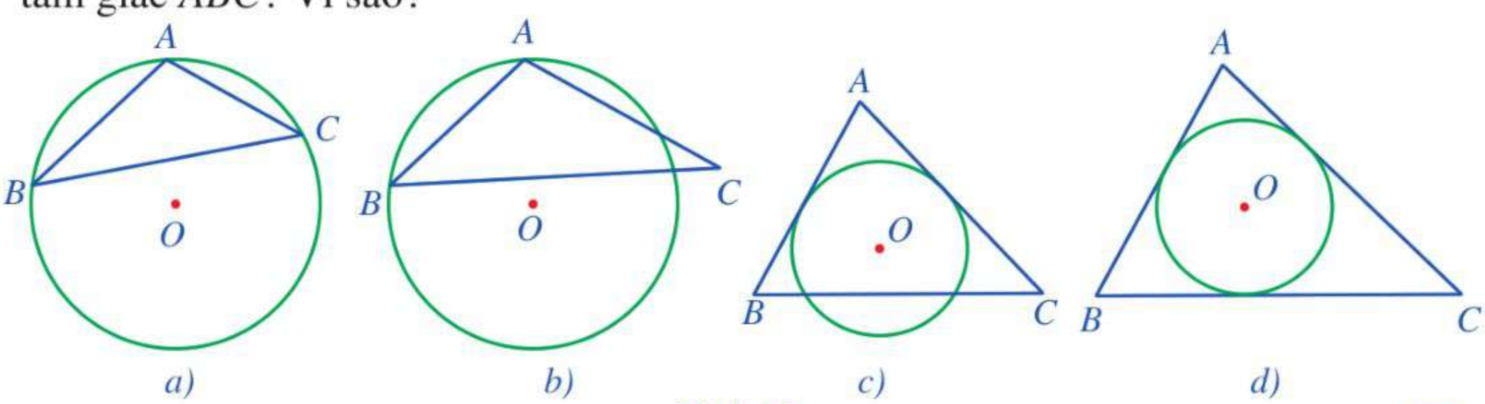
Diện tích phần đất trồng hoa đó là: $S = \pi r^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi \approx 37{,}7\ (\text{m}^2)$.

5 Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn $(O; 6\text{ cm})$. Tính AB.

Chú ý: Trong cuốn sách này, ở các ví dụ, luyện tập và bài tập, ta lấy $\pi \approx 3{,}14$.

BÀI TẬP

1. Trong các hình *15a*, *15b*, *15c*, *15d*, ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC? Ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC? Vì sao?



Hình 15

2. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm.

3. Cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều bằng 4 cm. Tính cạnh của tam giác đều đó.

4. Một chiếc máy quay ở đài truyền hình được đặt trên giá đỡ ba chân, các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là ba đỉnh A, B, C của tam giác đều ABC (*Hình 16*). Tính khoảng cách giữa hai vị trí A và B, biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 4 dm.

(*Ảnh: New Africa*)

Hình 16

5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh:

a) $DB \perp AB$ và $CD \perp AC$;

b) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;

c) $AC^2 + BH^2 = 4R^2$;

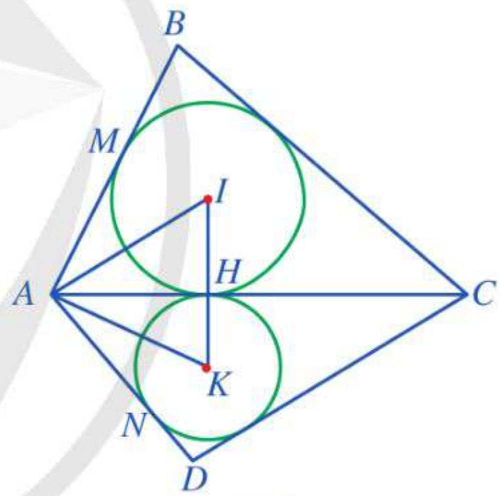
d) Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

6. Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC. Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M, đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (*Hình 17*). Chứng minh:

a) Ba điểm I, H, K thẳng hàng;

b) $AM = AN$;

c) $\widehat{IAK} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAD}$.



Hình 17

TÌM TÒI – MỞ RỘNG (Đọc thêm)

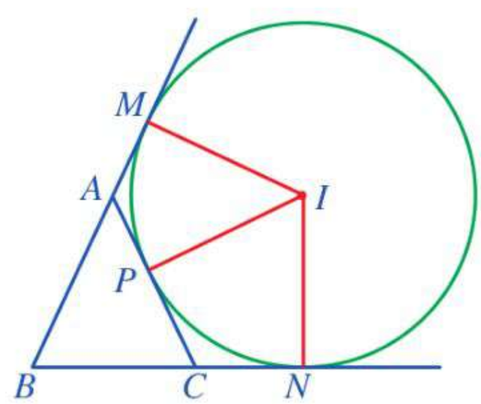
Đường tròn bàng tiếp tam giác

Cho tam giác ABC và đường tròn (I) (*Hình 18*).

Ta thấy đường tròn (I) lần lượt tiếp xúc với các đường thẳng AB, BC, CA tại các tiếp điểm M, N, P, trong đó điểm M nằm ngoài cạnh AB, điểm N nằm ngoài cạnh BC và điểm P thuộc cạnh CA.

Đường tròn (I) được gọi là *đường tròn bàng tiếp trong góc B* của tam giác ABC.

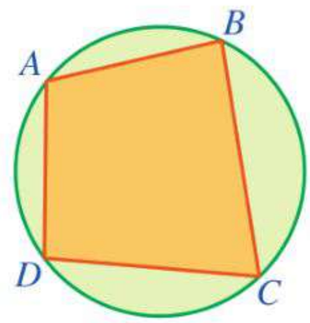
Tương tự, tam giác ABC còn có đường tròn bàng tiếp trong góc A và đường tròn bàng tiếp trong góc C.



Hình 18

§2. TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

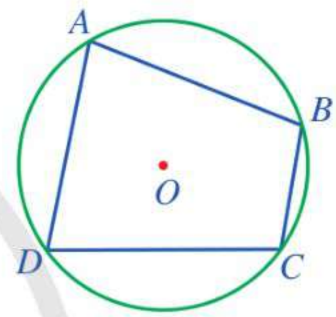
Hình 19 minh hoạ một đường tròn và tứ giác *ABCD* có bốn đỉnh thuộc đường tròn.



Hình 19

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Quan sát *Hình 20* và cho biết các đỉnh của tứ giác *ABCD* có thuộc đường tròn (*O*) hay không.

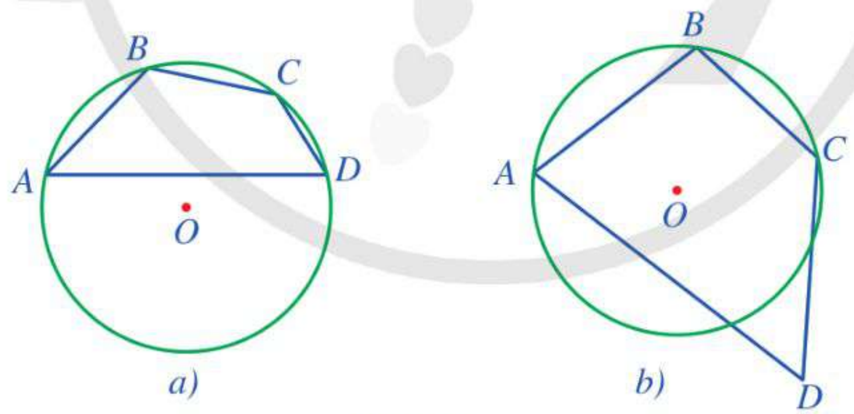


Hình 20

> Tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn được gọi là *tứ giác nội tiếp* đường tròn (hay còn gọi là tứ giác nội tiếp).

Chú ý: Trong *Hình 20*, tứ giác *ABCD* là tứ giác nội tiếp và đường tròn (*O*) được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABCD*.

Ví dụ 1 Trong các hình *21a*, *21b*, ở hình nào ta có tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (*O*)? Vì sao?



Hình 21

Giải

– Ở *Hình 21a*, đường tròn (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABCD* vì nó đi qua cả bốn đỉnh *A*, *B*, *C*, *D* của tứ giác đó.

– Ở *Hình 21b*, đường tròn (*O*) không là đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABCD* vì nó không đi qua đỉnh *D* của tứ giác đó.

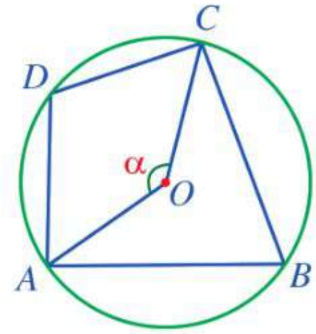
> **1** Dùng thước thẳng và compa vẽ một tứ giác nội tiếp đường tròn theo các bước sau:
>
> – Vẽ một đường tròn;
>
> – Vẽ tứ giác có bốn đỉnh thuộc đường tròn.

II. TÍNH CHẤT

2 Trong *Hình 22*, cho biết $\overset{\frown}{AOC} = \alpha$.

Tính số đo của các cung và góc sau theo α:

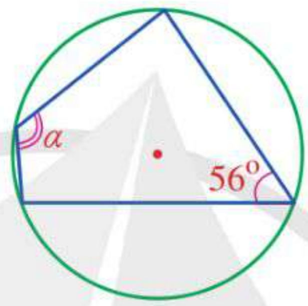
a) $\overset{\frown}{ADC}$, $\overset{\frown}{ABC}$; b) $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$; c) $\widehat{ADC} + \widehat{ABC}$.



Hình 22

Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180°.

Ví dụ 2 Tìm α trong *Hình 23*.



Hình 23

Giải

Từ *Hình 23*, ta có $\alpha + 56^\circ = 180^\circ$ (tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp).

Suy ra $\alpha = 180^\circ - 56^\circ$

$\alpha = 124^\circ$.

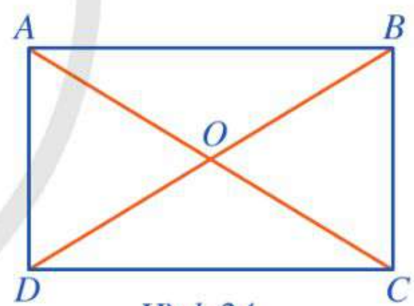
2 Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC và điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B và C). Tính số đo góc BMC.

III. HÌNH CHỮ NHẬT, HÌNH VUÔNG NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Hình chữ nhật nội tiếp đường tròn

3 Cho hình chữ nhật $ABCD$, AC cắt BD tại O (*Hình 24*).

Đặt $R = OA$ và vẽ đường tròn $(O; R)$. Các điểm A, B, C, D có thuộc $(O; R)$ hay không?



Hình 24

- Mỗi hình chữ nhật là một tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.

Ví dụ 3 Cửa ra vào ở *Hình 25* gợi nên hình ảnh hình chữ nhật nội tiếp đường tròn. Biết hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 2 m và 1,2 m. Hỏi đường kính d của đường tròn đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?


(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 25

Giải

Áp dụng định lí Pythagore, ta có $d^2 = 1,2^2 + 2^2 = 5,44$, suy ra $d = \sqrt{5,44} \approx 2,33$ (m).

Vậy đường kính d của đường tròn đó khoảng 2,33 m.

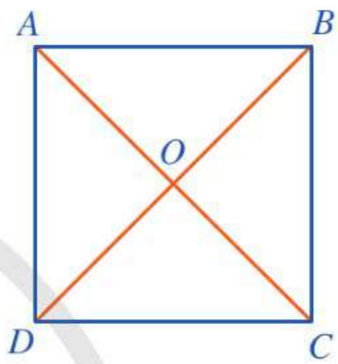
3 Người ta làm một logo có dạng hình tròn, trong đó có một hình chữ nhật nội tiếp đường tròn với chiều dài và chiều rộng lần lượt là 8 cm và 6 cm. Hình chữ nhật được tô màu xanh còn phần khác của logo được tô màu đỏ. Tính diện tích phần được tô màu đỏ.

2. Hình vuông nội tiếp đường tròn

4 Cho hình vuông $ABCD$, AC cắt BD tại điểm O (*Hình 26*).

a) Mỗi đường chéo của hình vuông $ABCD$ có phải là đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó hay không?

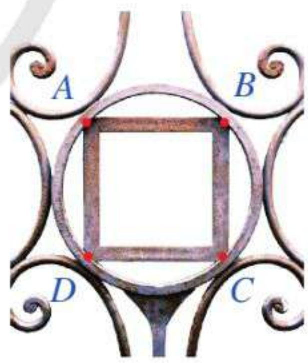
b) Cho biết $AB = a$, tính OA theo a.



Hình 26

- Mỗi hình vuông là một tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.
- Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 4 Quan sát khung sắt ở *Hình 27*, bạn Nam thấy hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Bạn Nam đo được độ dài cạnh của hình vuông đó là 2 dm. Hỏi chu vi của vòng sắt ứng với đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó bằng bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



(*Nguồn: https://www.maa.org*)

Hình 27

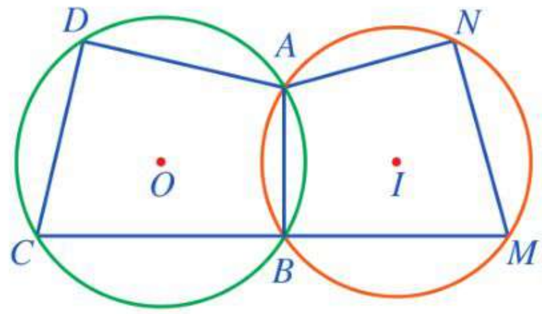
Giải

Vì độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là 2 dm nên bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó là $\dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (dm). Vậy chu vi của vòng sắt ứng với đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó là $2\sqrt{2}\,\pi \approx 8,9$ (dm).

4 Tính tỉ số giữa chu vi của một hình vuông và chu vi của đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó.

BÀI TẬP

1. Quan sát *Hình 28* và cho biết trong hai đường tròn (O) và (I), đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABMN$.



Hình 28

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} = 125^\circ$;

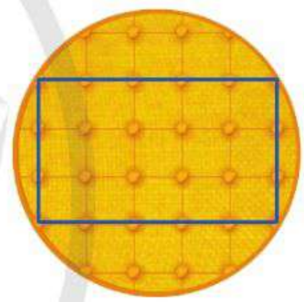
b) $\widehat{B} = 95^\circ$ và $\widehat{C} = 67^\circ$;

c) $\widehat{C} = 75^\circ$ và $\widehat{D} = 115^\circ$;

d) $\widehat{D} = 103^\circ$ và $\widehat{A} = 117^\circ$.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thoả mãn $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{ACB} = 70^\circ$. Giả sử D là điểm thuộc cung BC không chứa A (D khác B và C). Tính số đo góc BDC.

4. Mặt trên của tấm đệm có dạng hình tròn ở *Hình 29* gợi nên hình ảnh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật đó có chiều rộng, chiều dài lần lượt là 3 dm, 5 dm. Tính độ dài đường kính mặt trên của tấm đệm, từ đó tính diện tích mặt trên của tấm đệm.


Hình 29

5. Cho hình thang $ABCD$ (AB // CD) nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

6. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I.

a) Hai góc ABD và ACD có bằng nhau hay không? Vì sao?

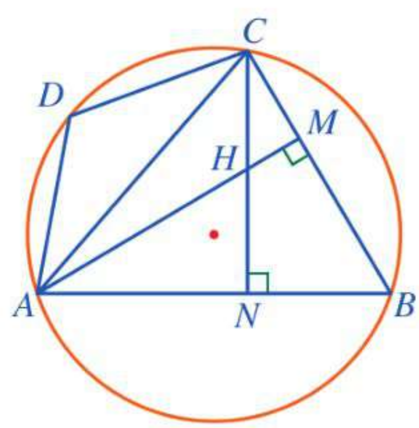
b) Chứng minh $\Delta IAB \backsim \Delta IDC$ và $IA \,.\, IC = IB \,.\, ID$.

7. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Hai đường cao AM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại H (*Hình 30*). Chứng minh:

a) $\widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ$;

b) $\widehat{AHC} = \widehat{ADC}$;

c) $\widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$.



Hình 30

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

1. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn có $\widehat{C} = 80^{\circ}$. Số đo góc *A* là:

A. 80°.　　B. 160°.　　C. 40°.　　D. 100°.

2. Cho đường tròn (*I*) nội tiếp tam giác *ABC* và lần lượt tiếp xúc với các cạnh *BC*, *CA*, *AB* tại *M*, *N*, *P*. Chứng minh: $\widehat{AIN} = \widehat{PMN} = \frac{1}{2}\widehat{PIN}$.

3. Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Các đường cao *AK*, *BM* cắt nhau tại trực tâm *H* của tam giác *ABC*. Tia *AK* cắt đường tròn (*O*) tại điểm *N* (khác *A*). Chứng minh:

a) $\widehat{CBM} = \widehat{CAK}$;

b) Tam giác *BHN* cân;

c) *BC* là đường trung trực của *HN*.

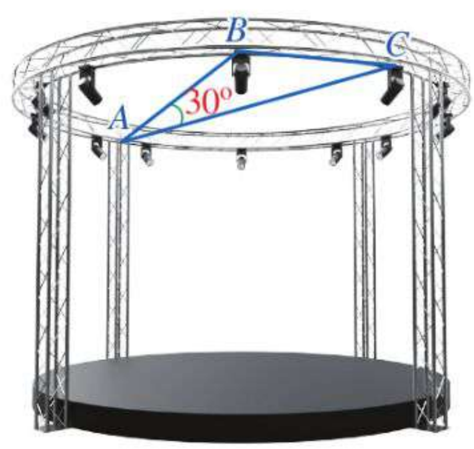
4. Cho tứ giác nội tiếp *ABCD* có hai tia *CD* và *BA* cắt nhau tại *I*. Chứng minh:

a) $\widehat{IAD} = \widehat{BCD}$;

b) $IA \cdot IB = ID \cdot IC$.

5. Cho tứ giác *ABCD* và các điểm *M*, *N* lần lượt thuộc các đoạn thẳng *AB* và *CD* sao cho các tứ giác *AMND*, *BMNC* là các tứ giác nội tiếp. Chứng minh $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^{\circ}$.

6. Khung thép của một phần sân khấu có dạng đường tròn bán kính 15 m. Mắt của một người thợ ở vị trí *A* nhìn hai đèn ở các vị trí *B*, *C* (*A*, *B*, *C* cùng thuộc đường tròn bán kính 15 m), bằng cách nào đó, người thợ thấy rằng góc nhìn $\widehat{BAC} = 30^{\circ}$ (*Hình 31*). Khoảng cách giữa hai vị trí *B*, *C* bằng bao nhiêu mét?



(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

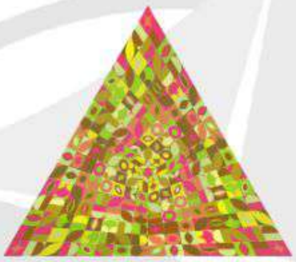
Hình 31

Chương IX
ĐA GIÁC ĐỀU

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: đa giác đều, hình đa giác đều trong thực tiễn; phép quay.

§1. ĐA GIÁC ĐỀU. HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với những hình có dạng tam giác đều (*Hình 1*), hình vuông (*Hình 2*), lục giác đều (*Hình 3*). Tam giác đều, hình vuông, lục giác đều là những đa giác đều đặc biệt.



Hình 1

Hình 2

(*Minh hoạ: David Zydd*)

Hình 3

Đa giác đều là đa giác như thế nào?

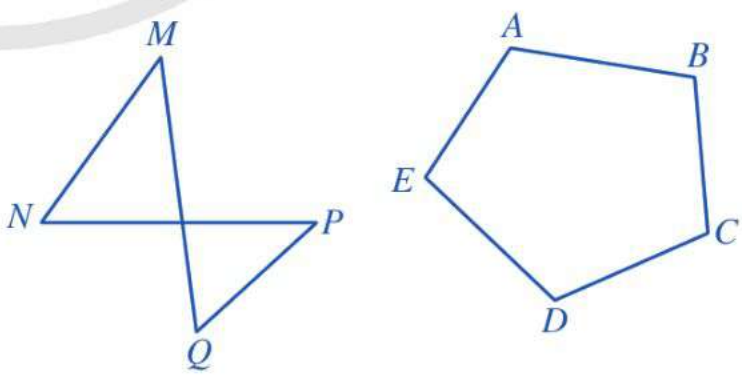
I. ĐA GIÁC. ĐA GIÁC LỒI

1. Đa giác

1 Tứ giác $MNPQ$ ở *Hình 4a* gồm 4 đỉnh M, N, P, Q và 4 cạnh MN, NP, PQ, QM. Ngũ giác $ABCDE$ ở *Hình 4b* gồm 5 đỉnh A, B, C, D, E và 5 cạnh AB, BC, CD, DE, EA. Quan sát hai hình đó, hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:

a) Mỗi đỉnh là điểm chung của đúng hai cạnh.

b) Không có hai cạnh nào nằm trên cùng một đường thẳng.



a) *b)*

Hình 4

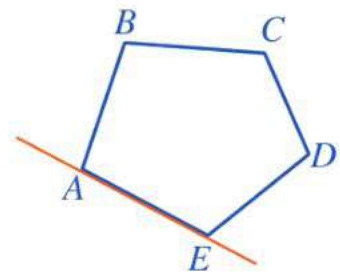
Ta nói tứ giác $MNPQ$ và ngũ giác $ABCDE$ là những *đa giác*.

Nhận xét

Đa giác $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) là một hình gồm n đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 sao cho mỗi điểm A_1, A_2, ..., A_n là điểm chung của đúng hai đoạn thẳng và không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng. Trong đa giác $A_1A_2...A_n$, các điểm A_1, A_2, ..., A_n là các đỉnh, các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 là các cạnh.

2. Đa giác lồi

2 Nêu đặc điểm về vị trí của ngũ giác *ABCDE* so với đường thẳng chứa một cạnh bất kì của ngũ giác đó (*Hình 5*).



Hình 5

Chú ý

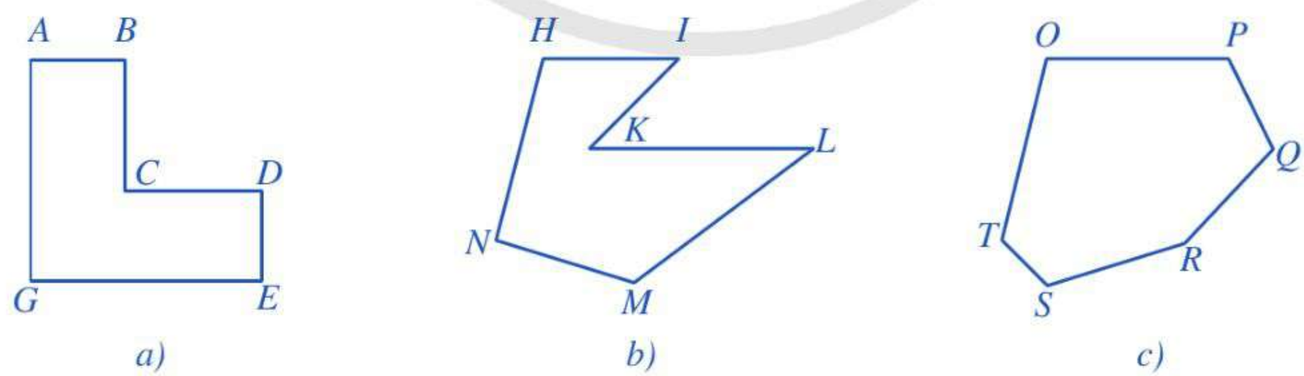
- Do ngũ giác *ABCDE* luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của ngũ giác đó nên ta nói ngũ giác *ABCDE* là *ngũ giác lồi*.

  Trong trường hợp tổng quát, ta nói: *Đa giác lồi* là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó.

- Với ngũ giác lồi *ABCDE* ở *Hình 5*, các góc *ABC, BCD, CDE, DEA, EAB* gọi là các *góc* của đa giác.

  Trong trường hợp tổng quát, đa giác lồi có n cạnh ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) cũng là đa giác lồi có n góc. Khi n lần lượt bằng 3; 4; 5; 6; ... ta có tam giác, tứ giác lồi, ngũ giác lồi, lục giác lồi, ...

Ví dụ 1 Quan sát các đa giác ở *Hình 6* và cho biết đa giác nào là đa giác lồi. Nêu tên các cạnh, các đỉnh, các góc của đa giác lồi đó.



Hình 6

Giải

– Ở *Hình 6c*, do đa giác *OPQRST* luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó nên đa giác này là đa giác lồi. Hai đa giác còn lại ở các hình *6a*, *6b* không phải là đa giác lồi.

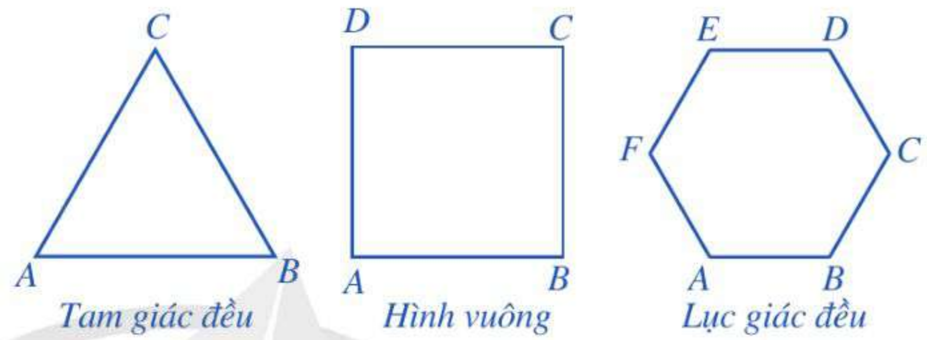
– Đa giác lồi $OPQRST$ có: các cạnh là OP, PQ, QR, RS, ST, TO; các đỉnh là O, P, Q, R, S, T; các góc là $\widehat{OPQ}$, $\widehat{PQR}$, $\widehat{QRS}$, $\widehat{RST}$, $\widehat{STO}$, $\widehat{TOP}$.

Quy ước: Từ nay về sau, khi nói về đa giác mà không chú thích gì thêm thì ta hiểu đó là đa giác lồi.

II. ĐA GIÁC ĐỀU

3 Quan sát *Hình 7* và nêu đặc điểm về cạnh và góc của tam giác đều, hình vuông, lục giác đều.

Ta có định nghĩa sau:



Hình 7

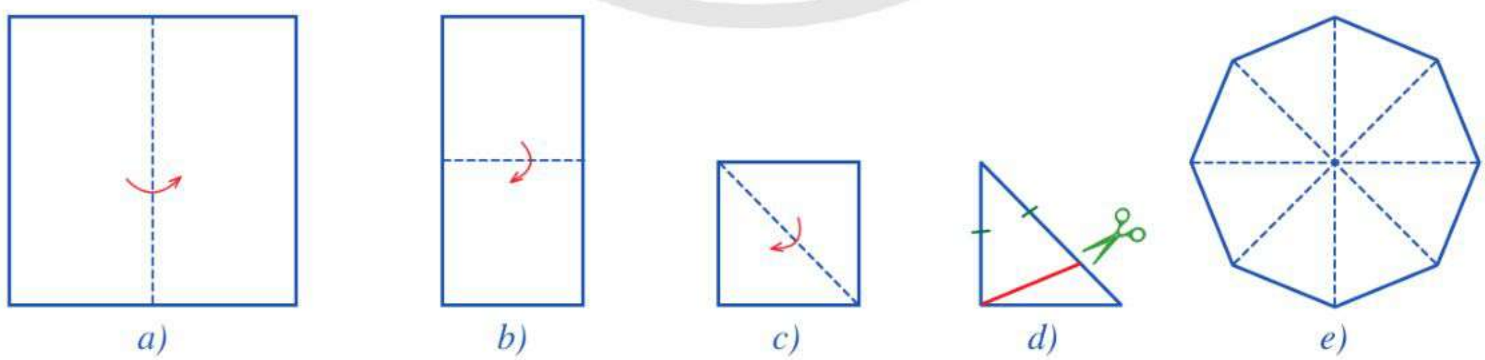
Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

Chẳng hạn, tam giác đều, hình vuông, lục giác đều là các đa giác đều vì mỗi đa giác đó có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh được rằng đối với mỗi đa giác đều, có đúng một điểm O cách đều tất cả các đỉnh của đa giác đó. Điểm O đó được gọi là *tâm của đa giác đều*.

Chú ý: Phần mặt phẳng giới hạn bởi đa giác đều được gọi là *hình đa giác đều*. Vì mỗi hình đa giác đều cũng là một phần của mặt phẳng nên hình đa giác đều còn gọi là hình phẳng đều.

Ví dụ 2 Bạn Thảo gấp một tờ giấy (có dạng hình vuông) lần lượt theo các hình *8a*, *8b*, *8c*, rồi cắt theo đoạn thẳng màu đỏ như ở *Hình 8d*, sau đó mở ra và được tờ giấy như *Hình 8e*. Bạn Thảo cho rằng đó là một *đa giác đều có 8 cạnh*. Theo em, bạn Thảo nói đúng hay không?



Hình 8

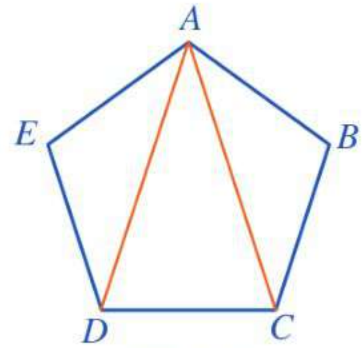
Giải

Theo cách mà bạn Thảo làm thì 8 tam giác ở *Hình 8e* là các tam giác cân bằng nhau, suy ra đa giác ở *Hình 8e* có 8 cạnh bằng nhau và 8 góc bằng nhau nên là một đa giác đều có 8 cạnh. Vậy bạn Thảo nói đúng.

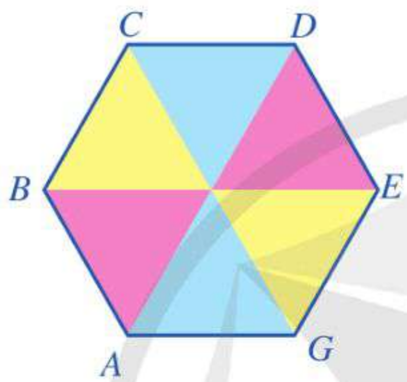
Ví dụ 3 Tính số đo mỗi góc của một ngũ giác đều.

Giải

Xét ngũ giác đều *ABCDE* (*Hình 9*), ta thấy: Tổng 5 góc của ngũ giác đều đó bằng tổng các góc trong ba tam giác *ABC*, *ACD*, *ADE*, tức là bằng $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Do tất cả các góc của ngũ giác đều bằng nhau nên số đo mỗi góc của ngũ giác đều bằng $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.



Hình 9



Hình 10

Ghép sáu miếng phẳng hình tam giác đều có cạnh bằng nhau để tạo thành hình lục giác *ABCDEG* như ở *Hình 10*. Lục giác *ABCDEG* có là lục giác đều hay không? Vì sao?

III. HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN

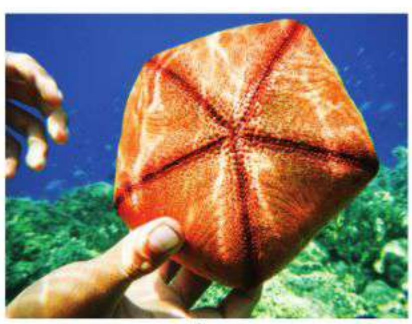
Trong thế giới tự nhiên, xuất hiện nhiều vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều. Dưới đây chúng ta sẽ tìm hiểu những vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều trong thế giới tự nhiên, trong nghệ thuật, kiến trúc và thiết kế, công nghệ.

1. Hình đa giác đều trong thế giới tự nhiên

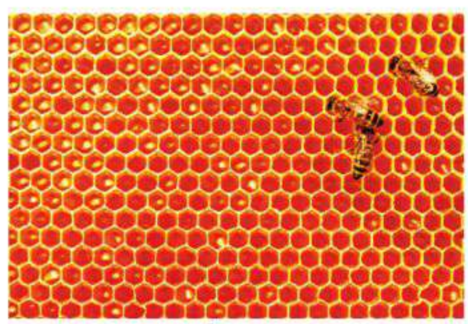
Trong tự nhiên, vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều rất đa dạng, phong phú, chẳng hạn: bông hoa (*Hình 11*), con sao biển (*Hình 12*) có hình ảnh liên quan đến ngũ giác đều; tổ ong (*Hình 13*) có hình ảnh liên quan đến lục giác đều; …


(*Ảnh: Tadashi Okabe*)

Hình 11


(*Ảnh: Ohshurat*)

Hình 12


(*Ảnh: Kosolovskyy*)

Hình 13

2. Hình đa giác đều trong nghệ thuật, kiến trúc

Ngay từ xa xưa, con người trong quá trình chinh phục thế giới tự nhiên luôn khao khát tạo dựng được những công trình hài hoà và bền vững. Để làm được điều đó, họ đã nghiên cứu, phân tích cấu trúc của những hình khối cân đối nhất.

Một trong các nguyên tắc quan trọng nhất với nghệ thuật, hay kiến trúc là *nguyên tắc cân bằng*. Theo đó, các thiết kế về kiến trúc, đồ hoạ hay một tác phẩm nghệ thuật cần thực hiện tốt về cân bằng. Vì thế, bố cục kiểu đối xứng, cân bằng thường được sử dụng trong các tác phẩm nghệ thuật hay kiến trúc. Chẳng hạn, các vật thể có dạng như ở những hình *14*, *15*, *16* được trang trí bởi hình tam giác đều, hình tứ giác đều, lục giác đều.


(*Ảnh: socrates 471*)
Hình 14


(*Ảnh: gant well*)
Hình 15


(*Ảnh: Dariusz Jarzabek*)
Hình 16

Trong thiết kế hay kiến trúc ta cũng thấy hình phẳng đều hiển hiện rất đa dạng, phong phú, chẳng hạn: *Palmanova* là một thị trấn thuộc Italia, được UNESCO công nhận là một di sản thế giới, điểm độc đáo nhất ở đây chính là kiến trúc của thị trấn gợi nên hình ảnh đa giác đều 18 cạnh (*Hình 17*). Toàn bộ thị trấn như một tổ hợp các pháo đài có kiến trúc cổ kính ở bên trong kết hợp với tổng thể tạo nên vẻ đẹp kì diệu.


(*Minh hoạ: SamKal*)
Hình 17

3. Hình đa giác đều trong thiết kế, công nghệ

Trong thiết kế, công nghệ, chúng ta cũng dễ dàng nhận ra các vật thể mà cấu trúc của chúng có dạng hình phẳng đều. Các công trình hay máy móc muốn tồn tại, ổn định, bền vững và có được vẻ đẹp thì phải chú trọng đến tính cân xứng, đều đặn. Theo đó, hình phẳng đều thường được sử dụng, chẳng hạn: các viên gạch lát nền (*Hình 18*) có dạng hình vuông; bề mặt của ốc và đai ốc (*Hình 19*) có dạng lục giác đều; chiếc đĩa (*Hình 20*) có dạng hình đa giác đều tám cạnh; …

(*Ảnh: Anton Starikov*)

Hình 18

(*Ảnh: Alexandr Makazov*)

Hình 19

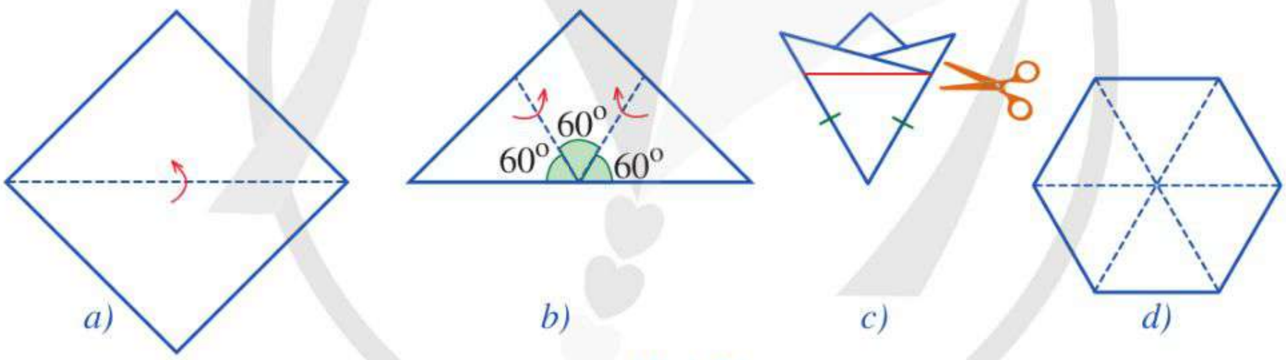
(*Ảnh: RoseLife_Family*)

Hình 20

BÀI TẬP

1. Cho ngũ giác *ABCDE* có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^{\circ}$. Ngũ giác *ABCDE* có phải là ngũ giác đều hay không?

2. Bạn Đan gấp một tờ giấy (có dạng hình vuông) lần lượt theo *Hình 21a* và *Hình 21b* để được *Hình 21c*, rồi cắt theo đoạn thẳng màu đỏ như ở *Hình 21c*, sau đó mở ra và được tờ giấy như *Hình 21d*. Bạn Đan cho rằng đó là một lục giác đều. Theo em, bạn Đan nói đúng hay không?



Hình 21

3. Hãy tìm hiểu trong tự nhiên hay trong nghệ thuật, trang trí, thiết kế, công nghệ, ... những vật thể mà cấu trúc của nó có dạng hình đa giác đều.

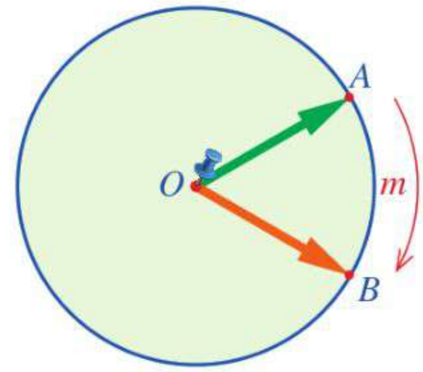
4. Thiết kế một đồ vật từ những hình có dạng đa giác đều. Chẳng hạn, vẽ trên giấy 20 hình tam giác đều bằng nhau rồi cắt ra và dán lại để tạo thành chao đèn (hình 20 mặt đều), như ở *Hình 22*.

Hình 22

§2. PHÉP QUAY

Bạn Ánh cắt một miếng bìa có dạng hình tròn tâm O, ghim miếng bìa đó lên bảng tại tâm O và gắn một đầu của chiếc kim vào tâm O của hình tròn (*Hình 23*).

Giả sử chiếc kim đi qua điểm A thuộc đường tròn (O). Bạn Ánh quay chiếc kim quanh điểm O, theo chiều kim đồng hồ, sao cho chiếc kim đi qua điểm B thuộc đường tròn (O) với cung AmB có số đo 60^o.



Hình 23

Phép quay như trên biến một điểm M khác điểm O thành điểm nào?

I. KHÁI NIỆM

1 Cho điểm O cố định.

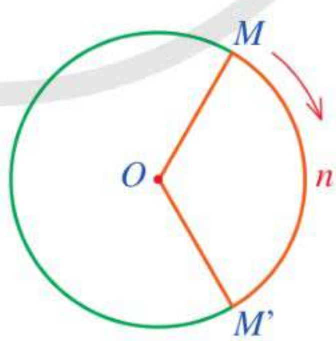
a) Xét điểm M tuỳ ý (khác điểm O) và đường tròn tâm O bán kính OM. Hãy tìm điểm M' thuộc đường tròn $(O; OM)$ sao cho chiều quay từ tia OM đến tia OM' cùng chiều quay của kim đồng hồ và cung MnM' có số đo 120^o.

b) Xét điểm N tuỳ ý (khác điểm O) và đường tròn tâm O bán kính ON. Hãy tìm điểm N' thuộc đường tròn $(O; ON)$ sao cho chiều quay từ tia ON đến tia ON' ngược chiều quay của kim đồng hồ và cung NpN' có số đo 300^o.

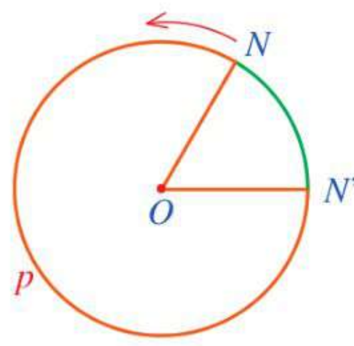
Nhận xét

- Ở *Hình 24*, ta có phép quay thuận chiều 120^o tâm O.

  Ở *Hình 25*, ta có phép quay ngược chiều 300^o tâm O.



Hình 24



Hình 25

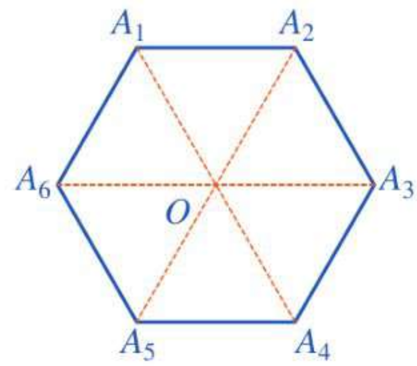
- Cho điểm O cố định và số thực α. Bằng cách tương tự như trên, ta nhận được: Phép quay thuận chiều α^o ($0^o < \alpha^o < 360^o$) tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm M (khác điểm O) thành điểm M' thuộc đường tròn $(O; OM)$ sao cho tia OM quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OM' thì điểm M tạo nên cung MM' có số đo α^o. Phép quay ngược chiều α^o tâm O được phát biểu tương tự.

  Lưu ý rằng phép quay 0^o và phép quay 360^o giữ nguyên mọi điểm.

Ví dụ 1 Cho hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có tâm O (*Hình 26*).

a) Tìm điểm đối xứng của mỗi điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 qua tâm O.

b) Chỉ ra phép quay thuận chiều tâm O sao cho phép quay đó biến mỗi điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.



Hình 26

Giải

a) Điểm đối xứng của mỗi điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 qua tâm O lần lượt là A_4, A_5, A_6, A_1, A_2, A_3.

b) Phép quay thuận chiều 180° tâm O sẽ biến mỗi điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Chỉ ra phép quay thuận chiều tâm O sao cho phép quay đó biến mỗi điểm A, B, C, D thành điểm đối xứng với nó qua tâm O.

II. PHÉP QUAY GIỮ NGUYÊN HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU

2 Cắt một miếng bìa có dạng hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ với tâm O và ghim miếng bìa đó lên bảng tại điểm O (*Hình 27*).

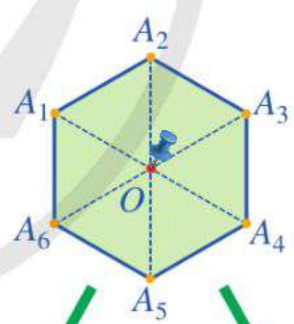
a) Quay miếng bìa đó theo phép quay thuận chiều 60° tâm O (*Hình 28a*). Hãy cho biết qua phép quay trên:

– Các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 lần lượt quay đến vị trí mới là các điểm nào.

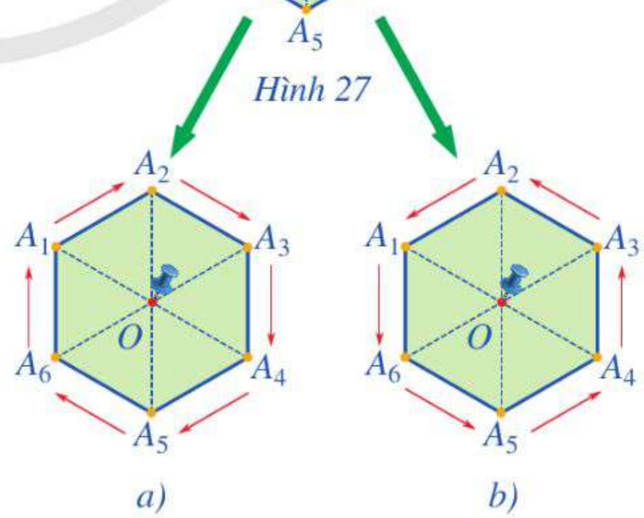
– Hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ sau khi quay đến một hình mới có trùng với chính nó hay không.

b) Quay miếng bìa đó theo phép quay ngược chiều 60° tâm O (*Hình 28b*). Hãy cho biết qua phép quay trên:

– Các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 lần lượt quay đến vị trí mới là các điểm nào.



Hình 27



Hình 28

– Hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ sau khi quay đến một hình mới có trùng với chính nó hay không.

Nhận xét

- Ở *Hình 28a*, có 6 phép quay thuận chiều α^o tâm O giữ nguyên hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, với α^o lần lượt nhận các giá trị $\alpha_1^o = 60^o$; $\alpha_2^o = 120^o$; ...; $\alpha_6^o = 360^o$.
- Ở *Hình 28b*, có 6 phép quay ngược chiều α^o tâm O giữ nguyên hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, với α^o lần lượt nhận các giá trị $\alpha_1^o = 60^o$; $\alpha_2^o = 120^o$; ...; $\alpha_6^o = 360^o$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

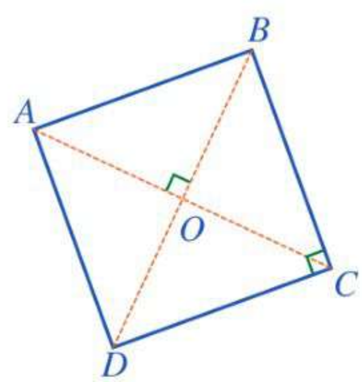
Cho hình đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) có tâm O.
Phép quay giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2...A_n$ là phép quay tâm O biến mỗi đỉnh của hình đa giác đều thành một đỉnh của hình đa giác đều đó.

Chú ý

Người ta chứng minh được rằng chỉ có các phép quay sau đây giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$) với tâm O: các phép quay thuận chiều α^o tâm O và các phép quay ngược chiều α^o tâm O, với α^o lần lượt nhận các giá trị

$$\alpha_1^o = \frac{360^o}{n};\ \alpha_2^o = \frac{2 \,.\, 360^o}{n};\ \ldots;\ \alpha_n^o = \frac{n \,.\, 360^o}{n} = 360^o.$$

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (*Hình 29*). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.



Hình 29

Giải

Các phép quay giữ nguyên hình vuông $ABCD$ là:

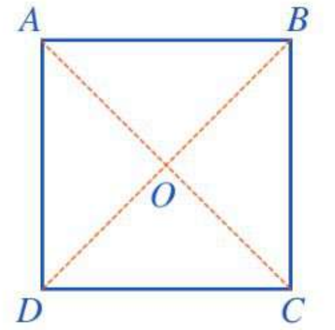
– Bốn phép quay thuận chiều α^o tâm O với α^o lần lượt nhận các giá trị 90^o, 180^o, 270^o, 360^o.

– Bốn phép quay ngược chiều α^o tâm O với α^o lần lượt nhận các giá trị 90^o, 180^o, 270^o, 360^o.

BÀI TẬP

1. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O (*Hình 30*).

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

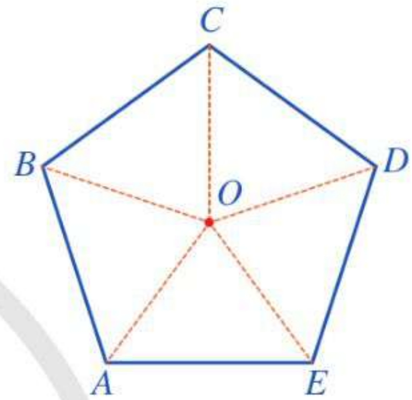


Hình 30

2. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (*Hình 31*).

a) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm E thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

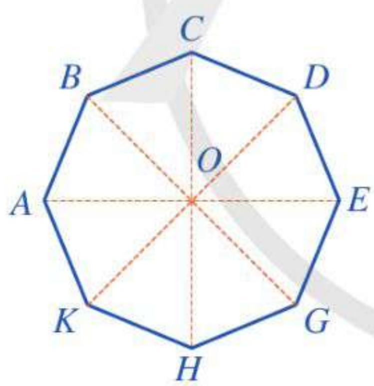
b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.



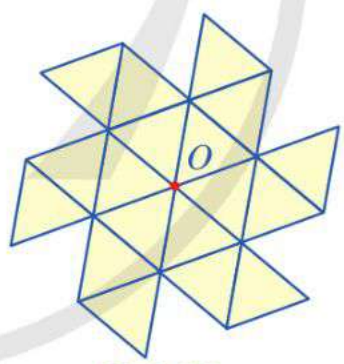
Hình 31

3. Cho hình đa giác đều có 8 cạnh $ABCDEGHK$ với tâm O (*Hình 32*).

Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình đa giác đều đã cho.



Hình 32



Hình 33

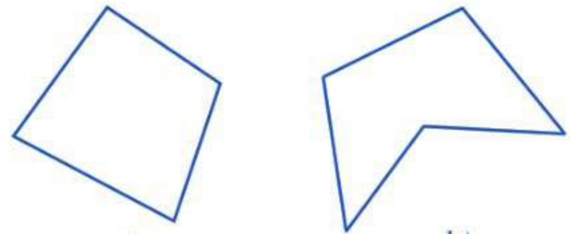
4. Vẽ trên giấy 18 hình tam giác đều bằng nhau và ở vị trí như *Hình 33* (còn gọi là *hình chong chóng*).

a) Hãy đánh dấu 6 điểm mút của hình chong chóng sao cho 6 điểm mút đó là các đỉnh của một hình lục giác đều tâm O.

b) Hãy chỉ ra những phép quay tâm O giữ nguyên hình chong chóng.

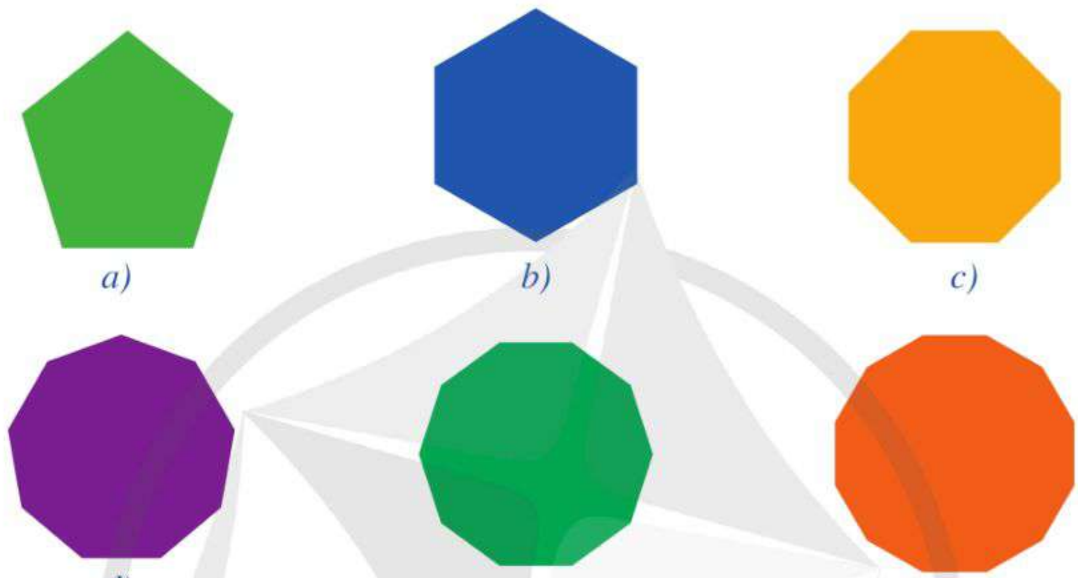
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

1. Quan sát các đa giác ở *Hình 34* và cho biết đa giác nào là đa giác lồi.


a) *b)*

Hình 34

2. Cho các vật thể có dạng đa giác đều như ở *Hình 35*. Gọi tên từng đa giác đều đó.


a) *b)* *c)*
d) *e)* *g)*

Hình 35

3. Mỗi phát biểu sau đây có đúng hay không? Vì sao?

a) Đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó là đa giác lồi.

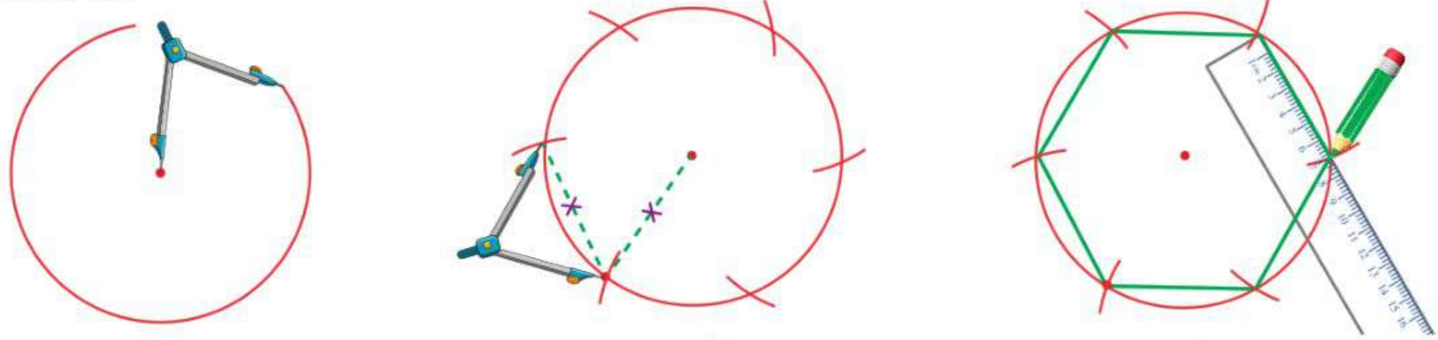
b) Tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau là tứ giác đều.

c) Tứ giác có tất cả các góc bằng nhau là tứ giác đều.

4. Quan sát từng đa giác đều và tìm số thích hợp cho ? trong bảng sau:

Đa giác đều	Số cạnh	Số góc	Số đo mỗi góc (°)
	?	?	?
	?	?	?

5. Quan sát các hình *36a, 36b, 36c* và dùng compa, thước thẳng để vẽ lục giác đều theo cách đó.

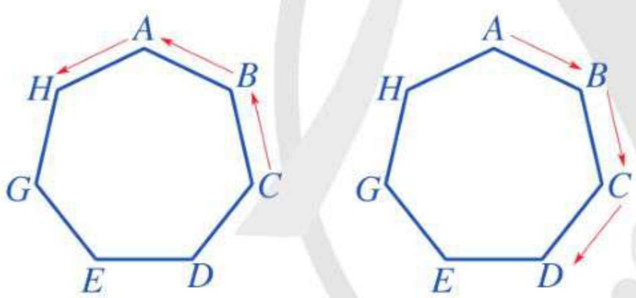


a) *b)* *c)*

Hình 36

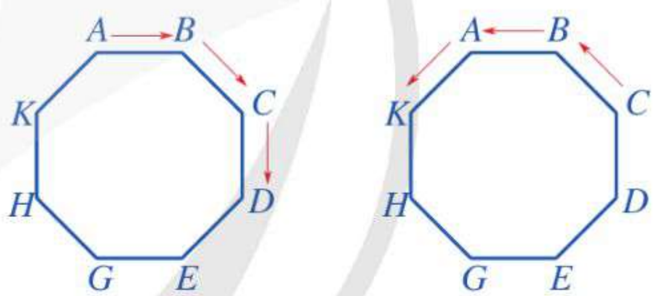
6. a) Ở *Hình 37a*, ta thực hiện phép quay giữ nguyên hình đa giác đều có 7 cạnh *ABCDEGH* và biến các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H* lần lượt thành các điểm *H*, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*. Phép quay đó là phép quay nào?

b) Ở *Hình 37b*, ta thực hiện phép quay giữ nguyên hình đa giác đều có 7 cạnh *ABCDEGH* và biến các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H* lần lượt thành các điểm *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*, *A*. Phép quay đó là phép quay nào?



a) *b)*

Hình 37



a) *b)*

Hình 38

c) Ở *Hình 38a*, ta thực hiện phép quay giữ nguyên hình đa giác đều có 8 cạnh *ABCDEGHK* và biến các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*, *K* lần lượt thành các điểm *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*, *K*, *A*. Phép quay đó là phép quay nào?

d) Ở *Hình 38b*, ta thực hiện phép quay giữ nguyên hình đa giác đều có 8 cạnh *ABCDEGHK* và biến các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*, *K* lần lượt thành các điểm *K*, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *H*. Phép quay đó là phép quay nào?

7. Hãy tìm hiểu và chỉ ra những vật thể trong thực tiễn mà cấu trúc của nó có dạng hình đa giác đều.

Chương X
HÌNH HỌC TRỰC QUAN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hình trụ, hình nón, hình cầu; bước đầu sử dụng kiến thức về thể tích, diện tích xung quanh của hình trụ, hình nón, hình cầu để giải quyết một số vấn đề từ thực tiễn.

§1. HÌNH TRỤ

Ở tiểu học, ta đã nhận biết được một số đồ vật có dạng hình trụ như ở *Hình 1*.

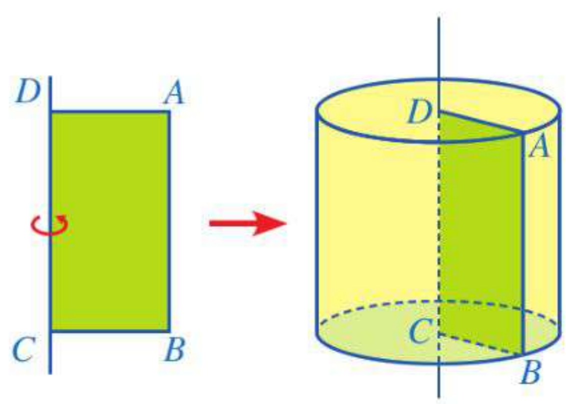
Lon nước *Bể cá* *Cốc (ly) thuỷ tinh* *Son môi* *Hộp sữa*

Hình 1

I. HÌNH TRỤ

1. Nhận biết hình trụ

1 Cắt một miếng bìa có dạng hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay miếng bìa một vòng quanh đường thẳng cố định chứa cạnh CD (*Hình 2a*), miếng bìa đó tạo nên một hình như ở *Hình 2b*. Hình đó có dạng hình gì?



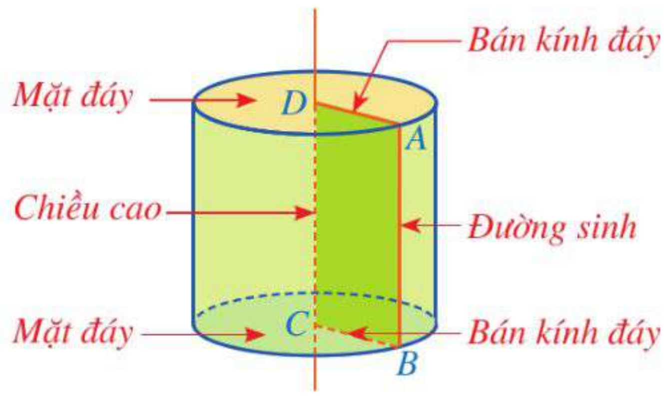
a) *b)*

Hình 2

Nhận xét: Hình được tạo ra khi quay một hình chữ nhật một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh của nó là *hình trụ*.

Với hình trụ như ở *Hình 3*, ta có:

- Hình tròn tâm D bán kính DA và hình tròn tâm C bán kính CB là hai *mặt đáy*; hai mặt đáy của hình trụ bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song;
- Độ dài cạnh DA được gọi là *bán kính đáy*;
- Độ dài cạnh CD được gọi là *chiều cao*;



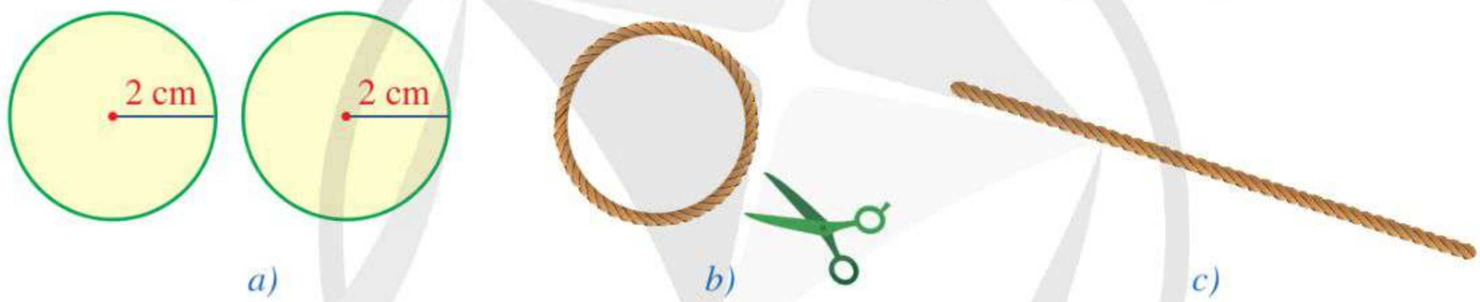
Hình 3

- Cạnh AB quét nên *mặt xung quanh* của hình trụ, mỗi vị trí của cạnh AB được gọi là một *đường sinh*; độ dài đường sinh bằng chiều cao của hình trụ.

2. Tạo lập hình trụ

2

a) Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính bằng 2 cm (*Hình 4a*).

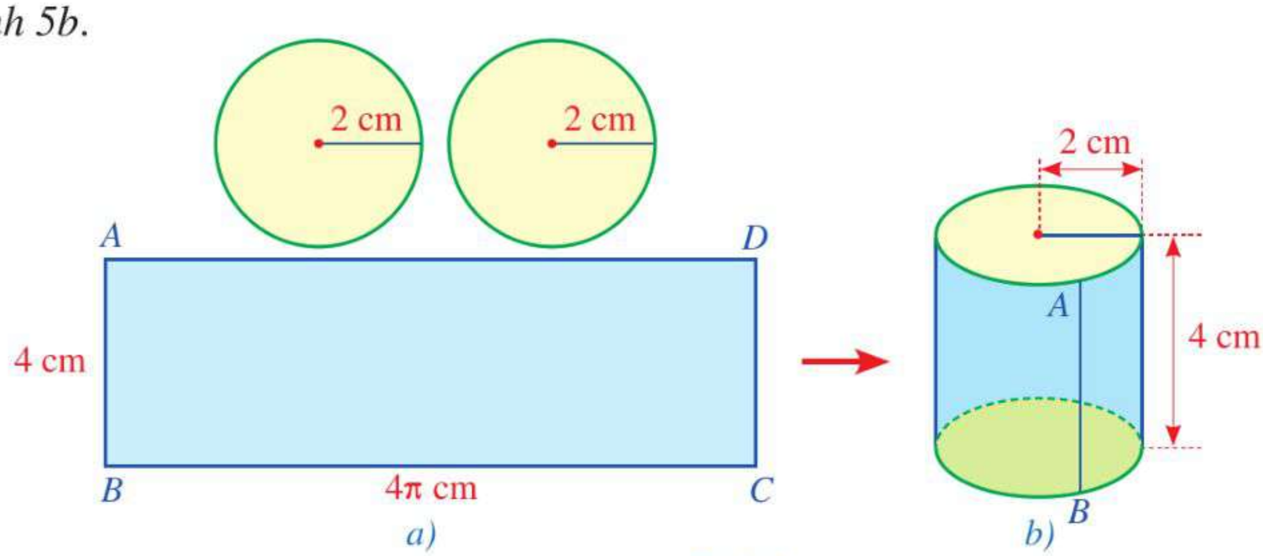


Hình 4

b) Lấy một sợi dây dài mảnh không dãn và tạo vòng dây cuốn quanh (một vòng) miếng bìa tròn thứ nhất (*Hình 4b*), cắt vòng dây và kéo thẳng vòng dây đó để nhận được đoạn dây như ở *Hình 4c*.

Cắt một miếng bìa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài bằng độ dài đoạn dây ở *Hình 4c* và chiều rộng bằng 4 cm.

c) Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở câu a, b (*Hình 5a*) để được một hình trụ như ở *Hình 5b*.



Hình 5

Ví dụ 1 Đối với hình trụ nhận được ở *Hoạt động 2* (*Hình 5b*), hãy chỉ ra:

a) Một đường sinh của hình trụ;

b) Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình trụ.

Giải

a) Đoạn thẳng AB là một đường sinh của hình trụ đó.

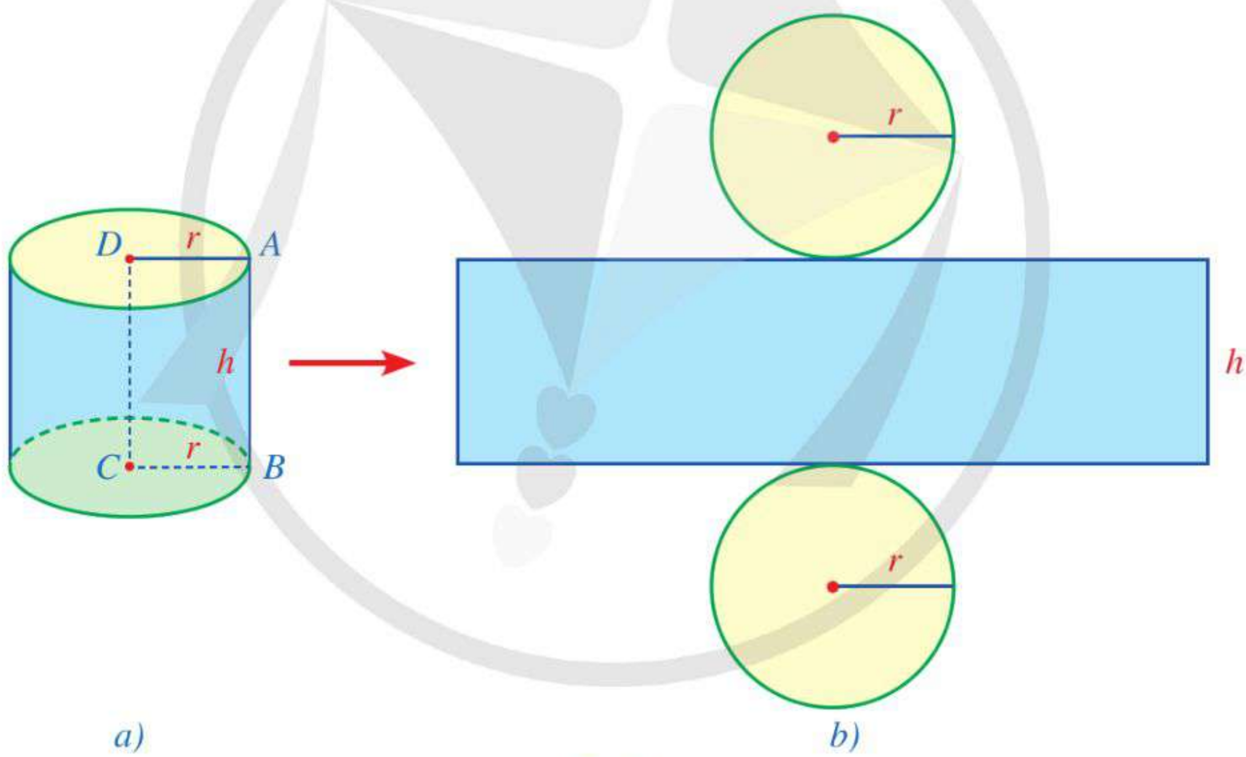
b) Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình trụ đó lần lượt là 2 cm, 4 cm.

1 Tạo lập một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm, chiều cao là 5 cm.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ

3 Thực hiện các hoạt động sau:

a) Chuẩn bị một hình trụ bằng giấy có bán kính đáy r và chiều cao h (*Hình 6a*);



Hình 6

b) Từ hình trụ đó, cắt rời hai đáy và cắt dọc theo đường sinh AB rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển mặt xung quanh của hình trụ là một hình chữ nhật (*Hình 6b*);

c) Hãy cho biết độ dài các cạnh của hình chữ nhật ở *Hình 6b* và tính diện tích của hình chữ nhật đó theo r và h.

Diện tích hình chữ nhật trong *Hình 6b* có thể coi là *diện tích xung quanh* của hình trụ và được tính như sau:

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của chu vi đáy với chiều cao:

$$S_{xq} = C \,.\, h = 2\pi rh,$$

trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh, C là chu vi đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ.

Ví dụ 2 Cho một hình trụ có bán kính đáy là 4 cm và chiều cao là 10 cm. Hỏi diện tích xung quanh của hình trụ đó là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Diện tích xung quanh của hình trụ đó là:

$$S_{xq} = 2\pi \,.\, 4 \,.\, 10 = 80\pi \approx 251 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Chú ý

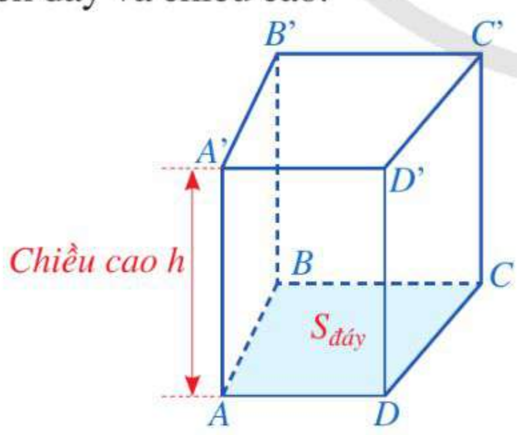
Tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ gọi là *diện tích toàn phần* của hình trụ. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ được tính theo công thức: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$, trong đó r là bán kính đáy và h là chiều cao của hình trụ.

2 Bác An muốn sơn mặt xung quanh của một cây cột có dạng hình trụ với đường kính đáy là 30 cm và chiều cao là 350 cm. Chi phí để sơn cây cột đó là 40 000 đồng/1 m^2. Hỏi chi phí bác An cần bỏ ra để sơn mặt xung quanh của cây cột đó là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

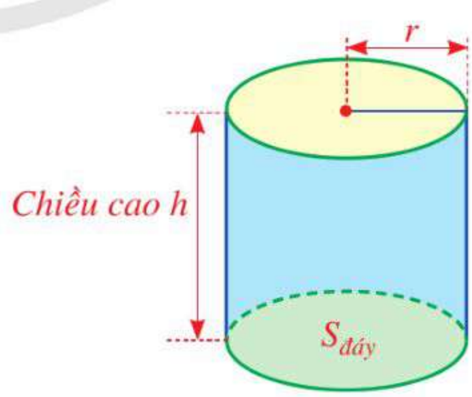
III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

4

a) Nêu công thức tính thể tích hình lăng trụ đứng tứ giác *ABCD.A'B'C'D'* (*Hình 7*) khi biết diện tích đáy và chiều cao.



Hình 7



Hình 8

b) Cũng như hình lăng trụ đứng tứ giác, mỗi hình trụ đều có thể tích. Hãy dự đoán cách tính thể tích của hình trụ (*Hình 8*).

Ta có thể tính được thể tích của hình trụ khi biết diện tích đáy và chiều cao.

Thể tích của hình trụ bằng tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = S \,.\, h = \pi r^2 h,$$

trong đó V là thể tích, S là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ.

Ví dụ 3 Một khối gỗ có dạng hình trụ với bán kính đáy khoảng 13 cm và chiều cao khoảng 43 cm (*Hình 9*). Hỏi thể tích của khối gỗ đó là bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hình 9

Giải

Thể tích của khối gỗ đó là:

$$V = \pi \,.\, 13^2 \,.\, 43 = 7\,267\pi \approx 22\,818{,}4 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

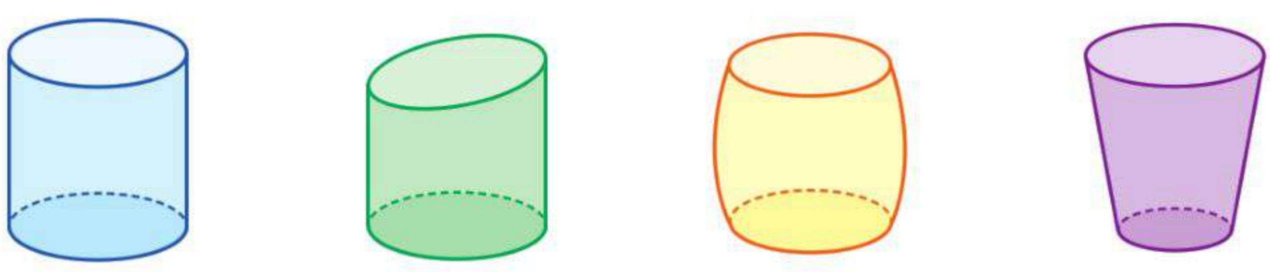
BÀI TẬP

1. Trong những vật thể ở các hình *10a*, *10b*, *10c*, *10d*, *10e*, vật thể nào có dạng hình trụ?

a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Hình 10

2. Trong các hình *11a*, *11b*, *11c*, *11d*, hình nào có dạng hình trụ?



a) *b)* *c)* *d)*

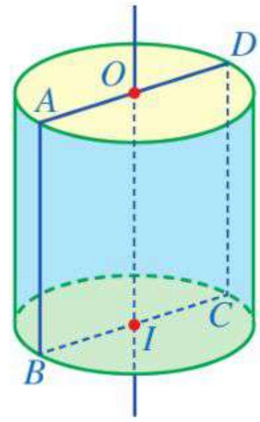
Hình 11

3. Cho hình chữ nhật *ABCD*, các điểm *O*, *I* lần lượt là trung điểm các cạnh *AD*, *BC*. Xét hình trụ được tạo ra khi quay hình chữ nhật *AOIB* một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa cạnh *OI* của hình chữ nhật đó (*Hình 12*). Quan sát *Hình 12*, hãy chỉ ra:

a) Bốn bán kính đáy của hình trụ;

b) Chiều cao của hình trụ;

c) Hai đường sinh của hình trụ.

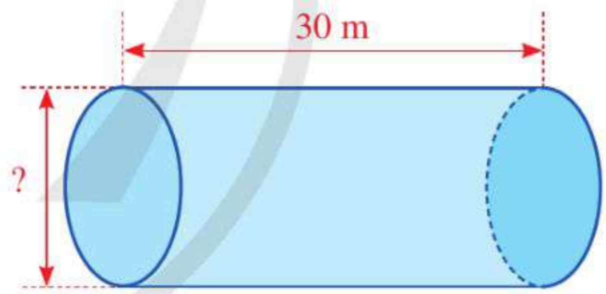


Hình 12

4. Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp bằng tôn có dạng hình trụ với hai đáy (*Hình 13*). Hình trụ đó có đường kính đáy khoảng 57 cm và chiều cao khoảng 89 cm. Chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 100 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 1 000 vỏ hộp đó là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Hình 13

5. Một đường ống nối hai bể cá trong một thuỷ cung có dạng hình trụ (không có hai đáy), với độ dài (hay chiều cao) là 30 m và có dung tích là 1 800 000 *l* (*Hình 14*). Hỏi đường kính đáy của đường ống đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 14

6. Pin là nguồn năng lượng phổ biến được sử dụng trong nhiều dụng cụ và thiết bị trong gia đình. Pin AAA (hay pin 3A) là một loại pin khô, thường được dùng trong những thiết bị điện tử cầm tay, chẳng hạn, điều khiển từ xa ti vi, máy nghe nhạc MP3, ... Mỗi chiếc pin 3A có dạng hình trụ (*Hình 15*), với kích cỡ tiêu chuẩn: chiều cao khoảng 44,5 mm và đường kính đáy khoảng 10,5 mm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần (theo đơn vị centimét vuông) và thể tích (theo đơn vị centimét khối) của một chiếc pin 3A đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

(*Ảnh: New Africa*)

Hình 15

§2. HÌNH NÓN

Trong đời sống hàng ngày, chúng ta thường gặp một số vật thể có dạng hình nón, như ở *Hình 16*.

Nón lá — *Kem ốc quế* — *Mũ sinh nhật* — *Đèn trang trí*

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 16

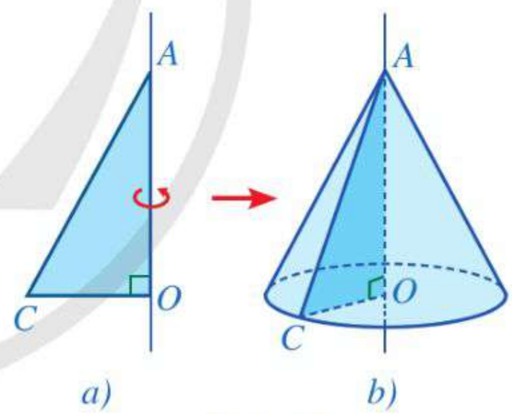
Hình nón có những đặc điểm gì?

I. HÌNH NÓN

1. Nhận biết hình nón

1

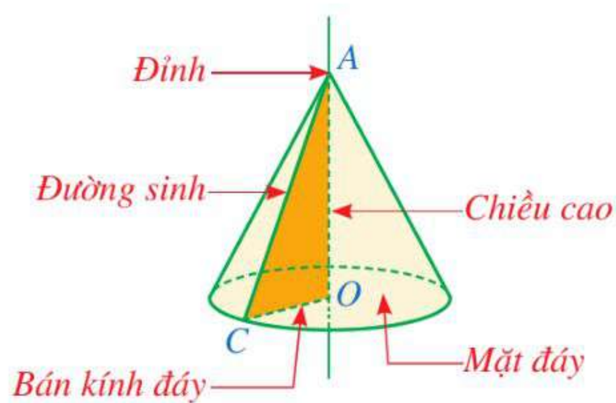
Cắt một miếng bìa có dạng tam giác vuông AOC. Khi quay miếng bìa một vòng quanh đường thẳng cố định chứa cạnh AO (*Hình 17a*), miếng bìa đó tạo nên một hình như ở *Hình 17b*. Hình đó có dạng hình gì?



Hình 17

Nhận xét: Hình được tạo ra khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đó là *hình nón*.

Với hình nón như ở *Hình 18*, ta có:



Hình 18

- Điểm A là *đỉnh*;
- Hình tròn tâm O bán kính OC là *mặt đáy*;
- Độ dài cạnh OC được gọi là *bán kính đáy*;
- Độ dài cạnh AO được gọi là *chiều cao*;
- Cạnh AC quét nên *mặt xung quanh* của hình nón, mỗi vị trí của cạnh AC được gọi là một *đường sinh*.

Chú ý: Nếu gọi độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là l, h và r thì theo định lí Pythagore ta có: $l^2 = h^2 + r^2$.

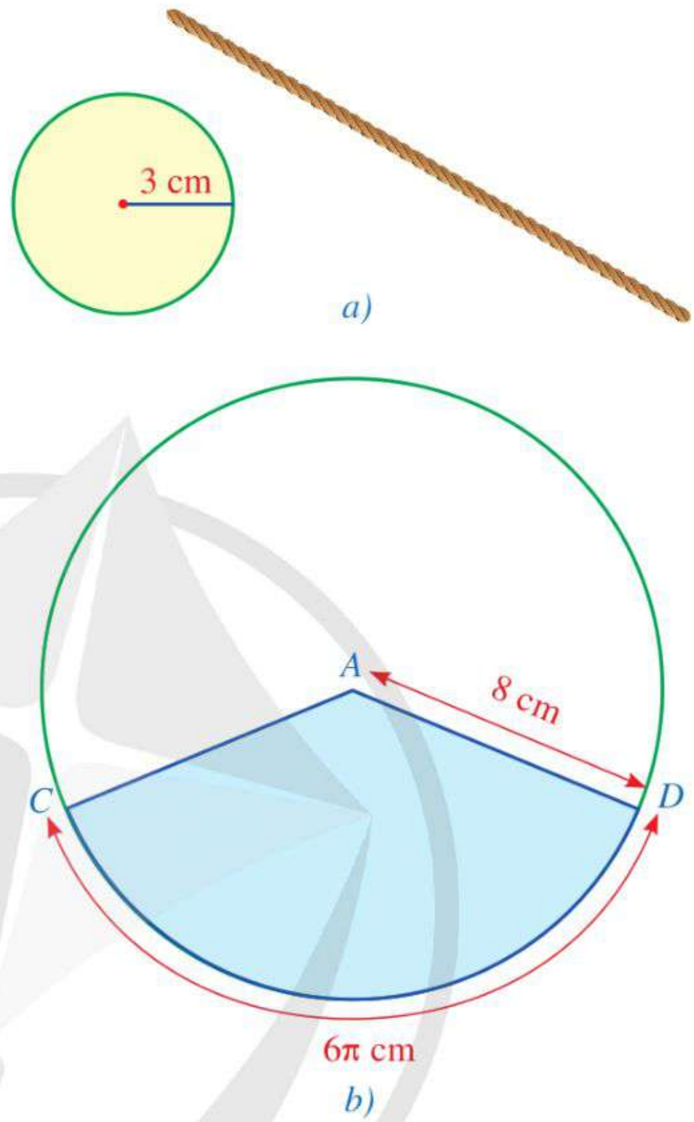
2. Tạo lập hình nón

2

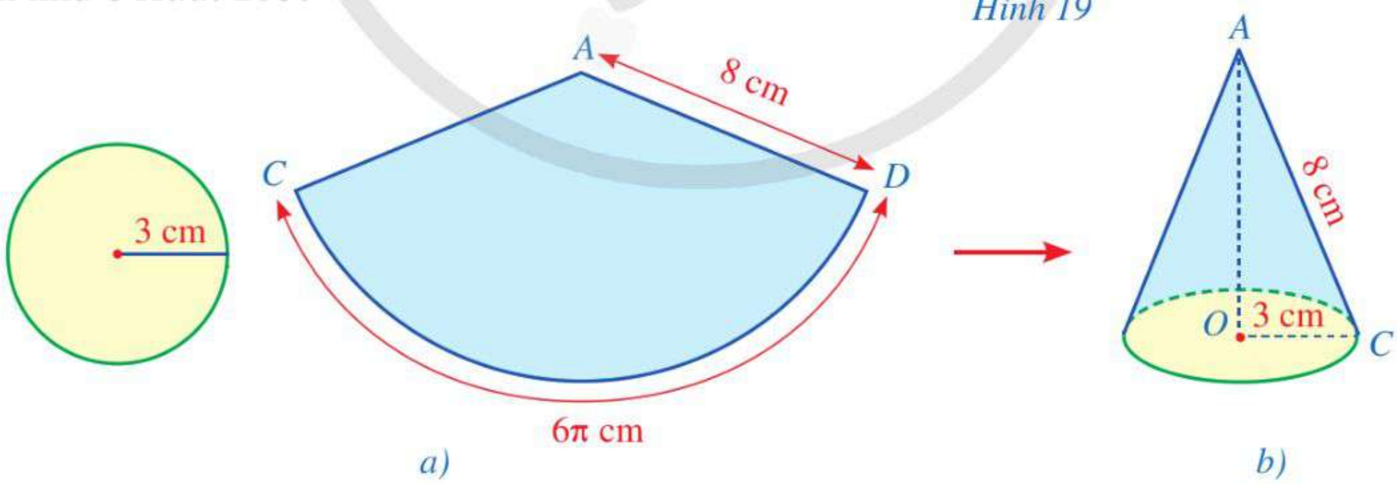
a) Cắt một miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính 3 cm và tạo một đoạn dây mảnh không dãn có độ dài bằng chu vi của đường tròn bán kính 3 cm (*Hình 19a*).

b) Lấy một miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính bằng 8 cm; đánh dấu điểm C trên mép ngoài của hình tròn đó; gắn một đầu của đoạn dây ở *Hình 19a* vào điểm C rồi cuốn đoạn dây xung quanh hình tròn và đánh dấu đầu mút cuối của sợi dây là điểm D trên mép ngoài của hình tròn; cắt ra từ miếng bìa tròn đó hình quạt tròn CAD (*Hình 19b*).

c) Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở câu a, b (*Hình 20a*) để được một hình nón như ở *Hình 20b*.



Hình 19



Hình 20

Ví dụ 1 Đối với hình nón nhận được ở *Hoạt động 2* (*Hình 20b*), hãy chỉ ra:

a) Một đường sinh của hình nón và độ dài của đường sinh đó;

b) Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình nón.

Giải

a) Đoạn thẳng AC là một đường sinh của hình nón đó, suy ra $l = 8$ cm.

b) Độ dài bán kính đáy của hình nón đó là 3 cm, suy ra $r = 3$ cm.

Áp dụng công thức $l^2 = h^2 + r^2$, ta có:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} \text{ (cm)}.$$

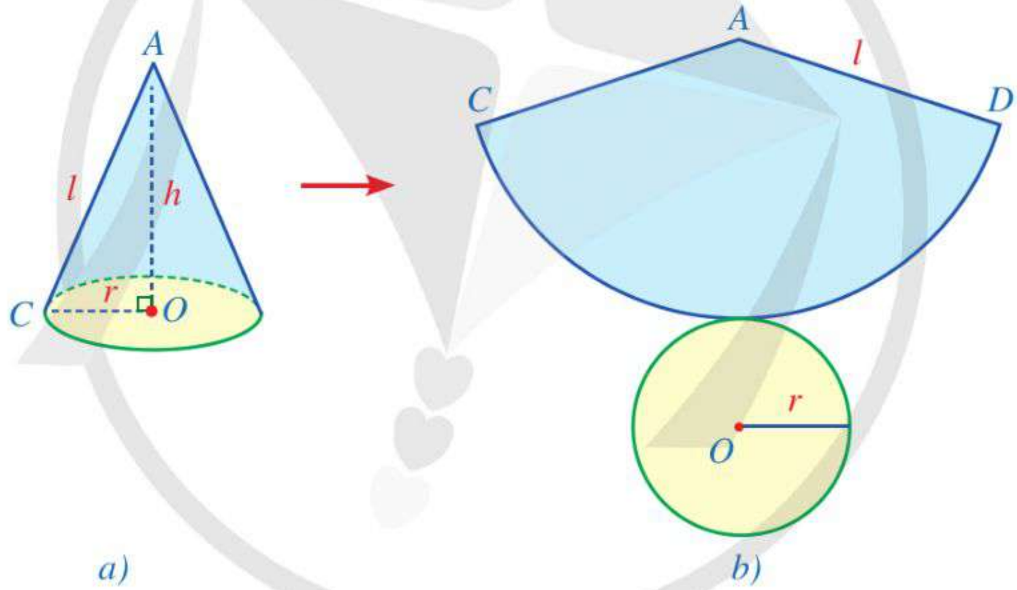
Vậy chiều cao của hình nón đó là $h = \sqrt{55}$ cm.

1 Tạo lập một hình nón có bán kính đáy là 3 cm, chiều cao là 4 cm.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH NÓN

3 Thực hiện các hoạt động sau:

a) Chuẩn bị một hình nón bằng giấy có bán kính đáy là r, chiều cao là h và độ dài đường sinh là l (*Hình 21a*);



Hình 21

b) Từ hình nón đó, cắt rời đáy và cắt dọc theo đường sinh AC rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển mặt xung quanh của hình nón là một hình quạt tròn CAD tâm A với bán kính bằng độ dài đường sinh và độ dài cung CD bằng độ dài đường tròn đáy của hình nón (*Hình 21b*).

c) Tính diện tích hình quạt tròn CAD theo r và l.

Diện tích của hình quạt tròn trong *Hình 21b* có thể coi là *diện tích xung quanh* của hình nón và được tính như sau:

Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh: $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot l = \pi rl$, trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh, r là bán kính đáy, C là chu vi đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón.

Ví dụ 2 Cho một hình nón có bán kính đáy là 4 cm và độ dài đường sinh là 10 cm. Hỏi diện tích xung quanh của hình nón đó là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

$$S_{xq} = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40\pi \approx 126 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

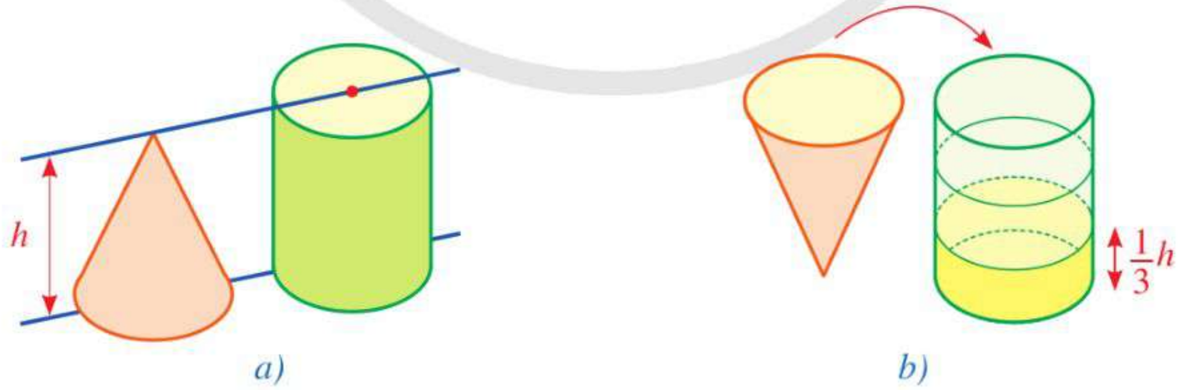
Chú ý: Tổng của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của hình nón gọi là *diện tích toàn phần* của hình nón đó. Diện tích toàn phần của hình nón được tính theo công thức: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$, trong đó S_{tp} là diện tích toàn phần, r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón.

2 Một chiếc nón lá có dạng hình nón với đường kính đáy khoảng 44 cm, chiều cao khoảng 20 cm. Hỏi diện tích xung quanh của chiếc nón đó bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Nón lá
(Nguồn: https://shutterstock.com)

III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

4 Cho hai dụng cụ đựng nước: một dụng cụ có dạng hình nón và một dụng cụ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy của hai dụng cụ bằng nhau (*Hình 22a*).



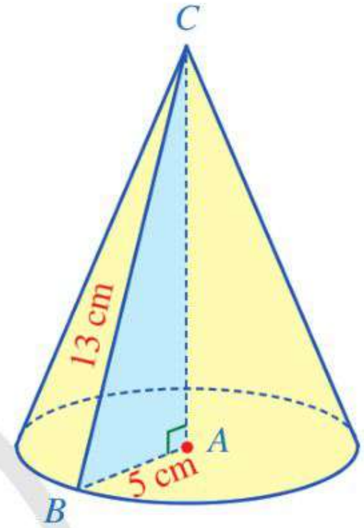
Hình 22

Đổ đầy nước vào dụng cụ có dạng hình nón rồi đổ nước từ dụng cụ đó sang dụng cụ có dạng hình trụ (*Hình 22b*). Ta cứ làm như thế ba lần và quan sát thấy dụng cụ có dạng hình trụ vừa đầy nước. Từ đó, hãy cho biết thể tích của dụng cụ có dạng hình trụ gấp bao nhiêu lần thể tích của dụng cụ có dạng hình nón.

Từ công thức tính thể tích của hình trụ, ta có thể tính thể tích của hình nón như sau:

Thể tích của hình nón bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao: $V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, trong đó V là thể tích, S là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình nón.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm. Quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh đường thẳng AC ta được hình nón (*Hình 23*). Hỏi thể tích của hình nón đó bằng bao nhiêu centimét khối?



Hình 23

Giải

Do tam giác ABC vuông tại A nên theo định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Suy ra $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

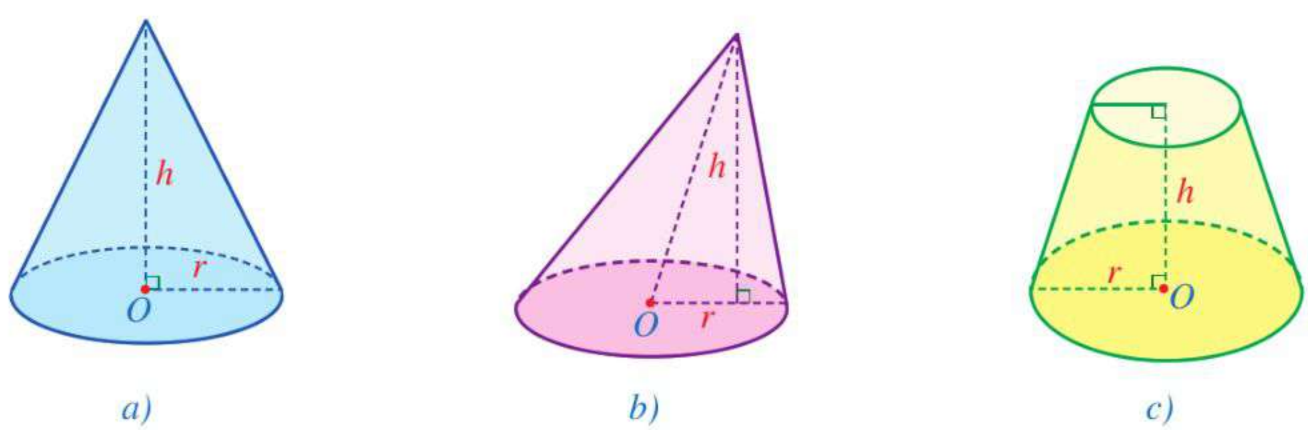
Do đó $AC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ hay $AC = \sqrt{144} = 12$ (cm).

Thể tích của hình nón đó là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \approx 314 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

BÀI TẬP

1. Trong các hình *24a*, *24b*, *24c*, hình nào có dạng hình nón (trong đó, O là tâm của mặt đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao)?



Hình 24

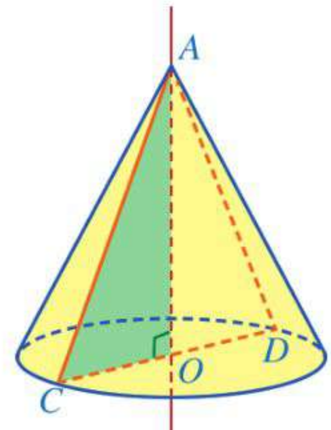
2. Cho tam giác cân ACD có O là trung điểm cạnh đáy CD. Xét hình nón được tạo ra khi quay tam giác vuông AOC một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa cạnh AO của tam giác vuông đó (*Hình 25*). Quan sát *Hình 25*, hãy chỉ ra:

a) Đỉnh của hình nón;

b) Hai bán kính đáy của hình nón;

c) Chiều cao của hình nón;

d) Hai đường sinh của hình nón.



Hình 25

3. Phần mái lá của một ngôi nhà có dạng hình nón (không có đáy) với đường kính đáy khoảng 12 m và độ dài đường sinh khoảng 8,5 m (*Hình 26*). Chi phí để làm phần mái lá đó là 250 000 đồng/1 m^2. Hỏi tổng chi phí để làm toàn bộ phần mái lá đó là bao nhiêu đồng?

(*Ảnh: G.Lukac*)

Hình 26

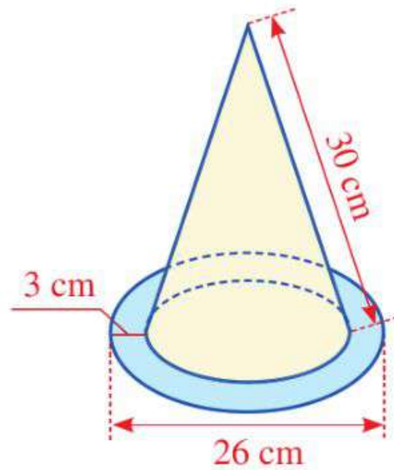
4. Chú hề trên sân khấu thường có trang phục như *Hình 27a*. Mũ của chú hề có dạng hình nón. Có thể mô phỏng cấu tạo, kích thước chiếc mũ của chú hề như *Hình 27b*.

a) Để phủ kín mặt ngoài chiếc mũ của chú hề như *Hình 27b* cần bao nhiêu centimét vuông giấy màu (không tính phần mép dán và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Hỏi thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ chú hề ở *Hình 27b* bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

(*Ảnh: Elnur*)

a)



b)

Hình 27

§3. HÌNH CẦU

Ở tiểu học, các em đã nhận biết được một số vật thể có dạng hình cầu, như ở *Hình 28*.

Quả bóng đá — *Quả cam* — *Quả trang trí Noel* — *Trái Đất (nhìn từ Vũ trụ)*

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

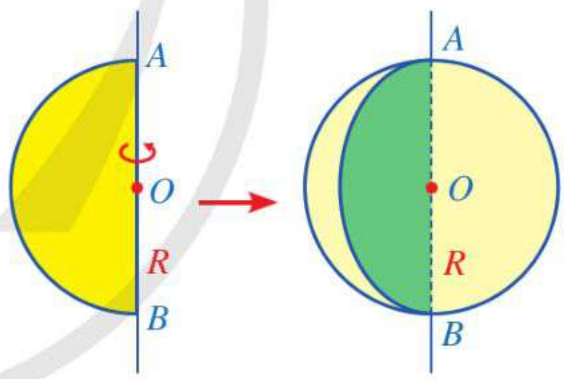
Hình 28

Hình cầu có những đặc điểm gì?

I. HÌNH CẦU

1. Nhận biết hình cầu

1 Cắt một miếng bìa có dạng nửa hình tròn (đường kính $AB = 2R$, tâm O). Khi quay miếng bìa một vòng quanh đường thẳng cố định chứa đường kính AB (*Hình 29a*), miếng bìa đó tạo nên một hình như ở *Hình 29b*. Hình đó có dạng hình gì?



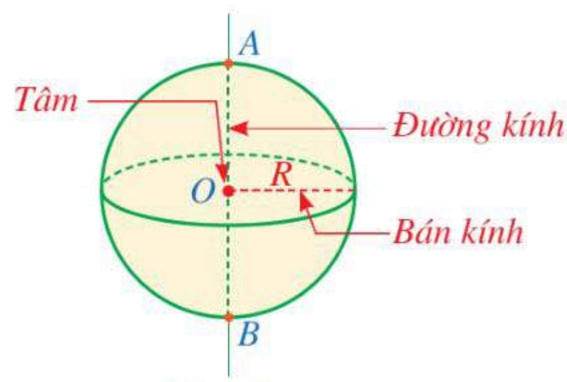
a) *b)*

Hình 29

Nhận xét: Hình được tạo ra khi quay một nửa hình tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó là *hình cầu*.

Với hình cầu như ở *Hình 30*, ta có:

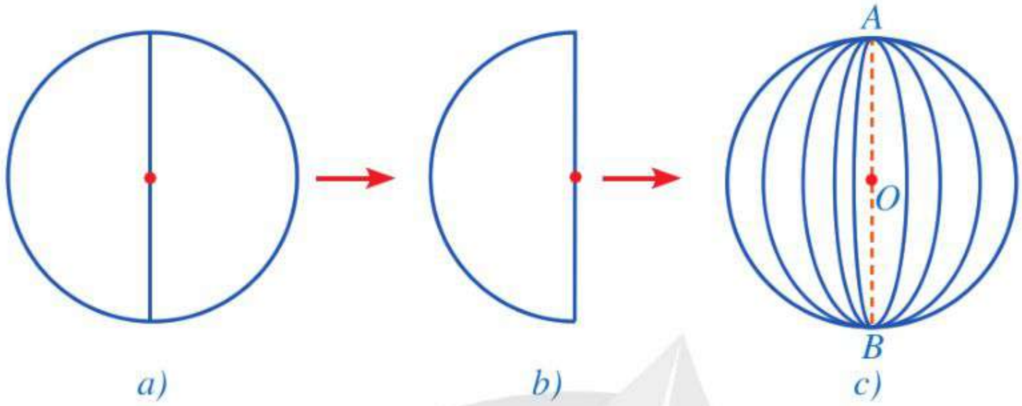
- Nửa đường tròn đường kính AB quét nên *mặt cầu*; như vậy, mặt cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa đường tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó;
- Điểm O là *tâm của hình cầu* (hay *tâm của mặt cầu*);
- Đoạn thẳng AB là *đường kính của hình cầu* (hay *đường kính của mặt cầu*);
- R là *bán kính của hình cầu* (hay *bán kính của mặt cầu*).



Hình 30

2. Tạo lập hình cầu

2 Cắt một số miếng bìa có dạng hình tròn có cùng đường kính. Mỗi miếng bìa tròn đó được cắt làm hai nửa hình tròn. Ghép các miếng bìa có dạng nửa hình tròn đó để được một hình cầu như ở *Hình 31*.



Hình 31

Ví dụ 1 Đối với hình cầu nhận được ở *Hoạt động 2* (*Hình 31c*), hãy chỉ ra:

a) Tâm của hình cầu;

b) Một đường kính của hình cầu.

Giải

a) Điểm O là tâm của hình cầu đó.

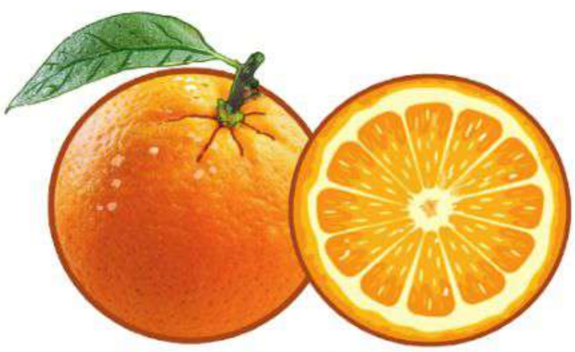
b) Đoạn thẳng AB là một đường kính của hình cầu đó.

1 Tạo lập một hình cầu có bán kính là 3 cm.

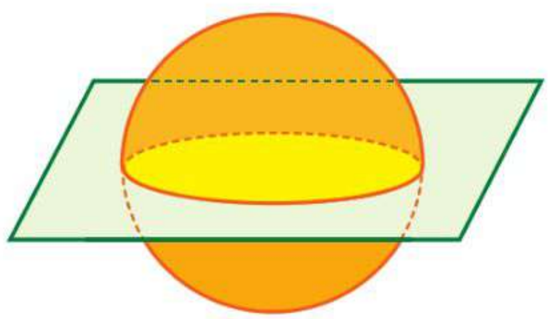
3. Nhận biết phần chung giữa mặt phẳng và hình cầu

3

a) Chuẩn bị một quả cam có dạng hình cầu. Dùng dao để cắt nó thành hai phần. Phần mặt cắt của quả cam như ở *Hình 32* có dạng hình gì?



Hình 32



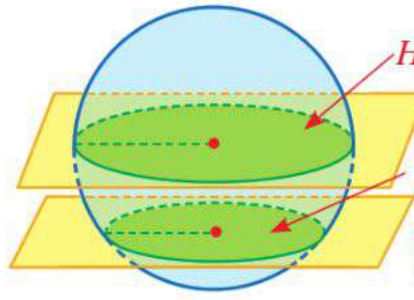
Hình 33

b) Quan sát *Hình 33* và cho biết một mặt phẳng cắt một hình cầu sẽ tạo ra hình gì.

Nhận xét

• Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một hình tròn như *Hình 34*.

Đặc biệt, nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu thì phần chung giữa chúng là một *hình tròn lớn* như *Hình 34*.



Hình 34

• Nếu cắt một mặt cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một đường tròn.

II. DIỆN TÍCH MẶT CẦU

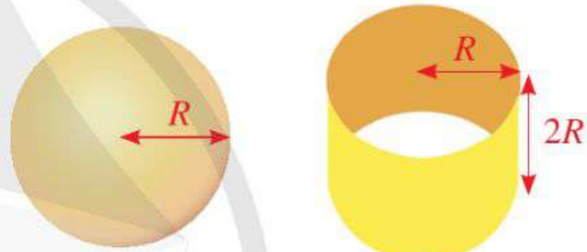
4 Thực hiện các hoạt động sau:

a) Chuẩn bị một mặt cầu bằng nhựa (chẳng hạn quả bóng bằng nhựa mỏng) có bán kính là R và một hình trụ bằng bìa cứng (hoặc nhựa mỏng) có bán kính đáy là R và chiều cao là $2R$ (như *Hình 35a*); một cuộn dây mảnh, không dãn (chẳng hạn dây len) đủ dài.

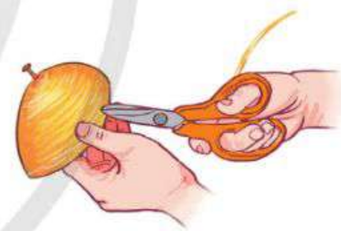
b) Dùng cuộn dây đó cuốn dần dần để phủ kín một nửa mặt cầu rồi cắt dây ở điểm cuối cùng (*Hình 35b*). Như vậy, đoạn dây thứ nhất "đã lát kín" một nửa mặt cầu. Tiếp tục dùng cuộn dây đó cuốn dần dần để phủ kín mặt xung quanh của hình trụ và cắt dây ở điểm cuối cùng (*Hình 35c*). Ta được đoạn dây thứ hai "lát kín" mặt xung quanh của hình trụ đã cho.

Gỡ từng đoạn dây quấn quanh nửa mặt cầu và mặt xung quanh của hình trụ nói trên, ta thấy hai đoạn dây đó có độ dài bằng nhau.

Do hai đoạn dây lần lượt lát kín một nửa mặt cầu, mặt xung quanh của hình trụ và độ dài hai đoạn dây đó bằng nhau nên ta có thể coi hai mặt đó có diện tích bằng nhau.



a)



b)

c)

Hình 35

c) Tính diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy là R và chiều cao là $2R$. Từ đó, hãy nêu dự đoán về công thức tính diện tích của mặt cầu bán kính R.

Ta có thể tính được diện tích mặt cầu khi biết bán kính.

Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2$.

Ví dụ 2 Cho một hình cầu có bán kính là 10 cm. Diện tích mặt cầu đó bằng bao nhiêu centimét vuông?

Giải

Diện tích mặt cầu đó là:

$$S = 4\pi \,.\, 10^2 = 400\pi \approx 1\,256\ (\text{cm}^2).$$

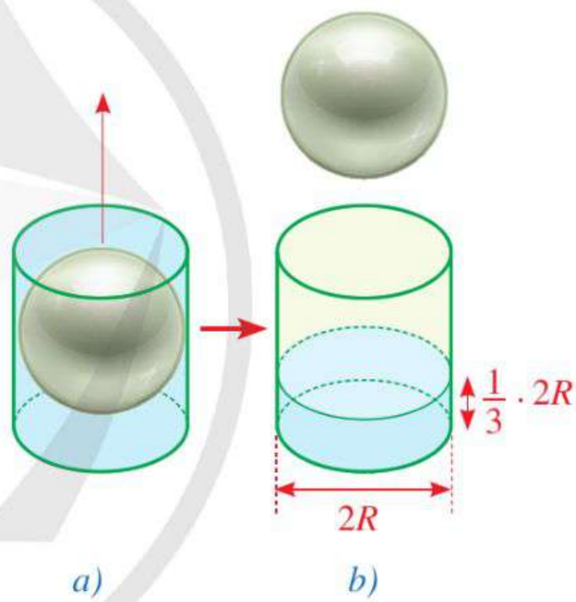
2 Một quả bóng đá theo tiêu chuẩn chuyên nghiệp (cho cả nam và nữ, từ khoảng 11, 12 tuổi trở lên), thường nặng khoảng 450 g, có chu vi đường tròn lớn khoảng 70 cm. Diện tích bề mặt của quả bóng đá như thế bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH CẦU

5 Cho một hình cầu bán kính R và một cốc thuỷ tinh có dạng hình trụ với bán kính đáy là R, chiều cao là $2R$.

Đặt hình cầu nằm khít trong cốc hình trụ rồi đổ đầy nước vào cốc đó (*Hình 36a*). Nhấc nhẹ hình cầu ra khỏi cốc. Đo độ cao cột nước còn lại, ta thấy độ cao này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của cốc (*Hình 36b*).

Hãy cho biết thể tích của hình cầu bằng bao nhiêu phần thể tích của cốc hình trụ.



Hình 36

Từ công thức tính thể tích của hình trụ, ta có thể tính thể tích của hình cầu như sau:

Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ví dụ 3 Bạn Lan cắt một trái cam có dạng hình cầu thành hai phần như nhau, đường kính của nửa trái cam vừa cắt (tính cả vỏ) đo được khoảng 7 cm, biết vỏ cam dày khoảng 4 mm. Hỏi thể tích phần ruột của quả cam đó khoảng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

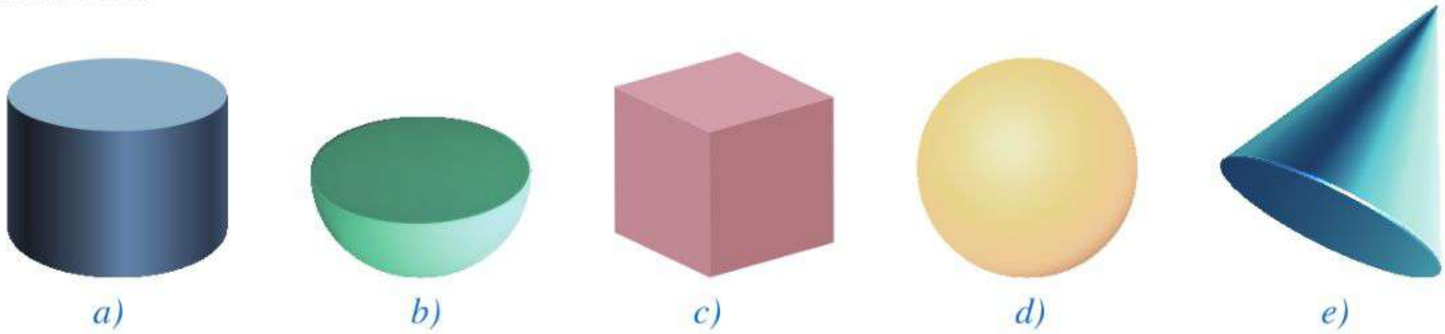
Giải

Đổi 4 mm = 0,4 cm.

Thể tích phần ruột của quả cam đó là: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7}{2} - 0{,}4\right)^3 \approx 124{,}72\ (\text{cm}^3)$.

BÀI TẬP

1. Trong những vật thể ở các hình *37a*, *37b*, *37c*, *37d*, *37e*, vật thể ở hình nào có dạng hình cầu?



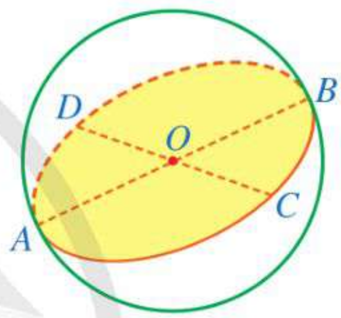
Hình 37

2. Cho một mặt phẳng đi qua tâm O của một hình cầu (*Hình 38*). Quan sát *Hình 38*, hãy chỉ ra:

a) Hai đường kính của hình cầu;

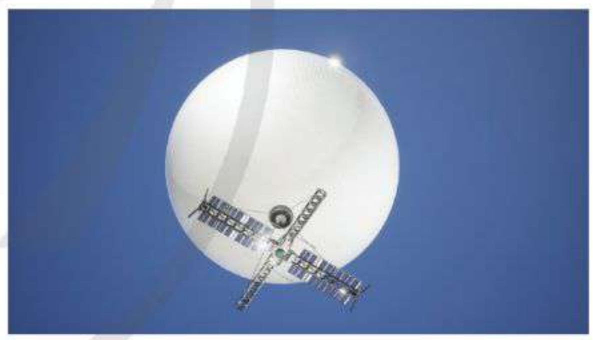
b) Bốn bán kính của hình cầu;

c) Một hình tròn lớn của hình cầu.



Hình 38

3. Để dự báo thời tiết, người ta sử dụng các bóng thám không, đó là một loại bóng bay mang theo các dụng cụ đo thời tiết như đo áp suất khí quyển, nhiệt độ, độ ẩm và tốc độ gió. Giả sử một quả bóng thám không có dạng hình cầu với bán kính 10 m. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng thám không đó là bao nhiêu mét vuông?



Bóng thám không

(*Ảnh: Something Special*)

4. Một bình nuôi cá cảnh có dạng hình cầu với đường kính khoảng 40 cm. Người ta muốn đổ vào bình nuôi cá đó một lượng nước bằng một nửa thể tích của bình (*Hình 39*). Hỏi cần phải đổ vào bình bao nhiêu lít nước (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hình 39

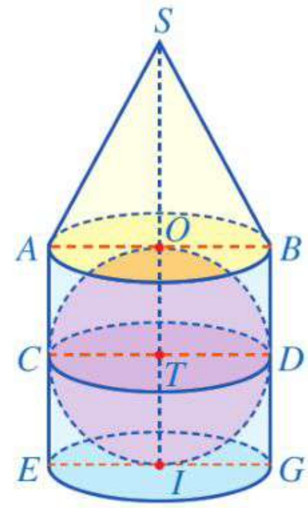
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

1. *Hình 40* gồm một hình cầu đặt nằm khít trong hình trụ, một hình nón có mặt đáy là mặt đáy trên của hình trụ và đặt phía trên hình trụ. Quan sát *Hình 40*, hãy chỉ ra:

a) Bốn bán kính đáy, hai đường sinh và chiều cao của hình trụ;

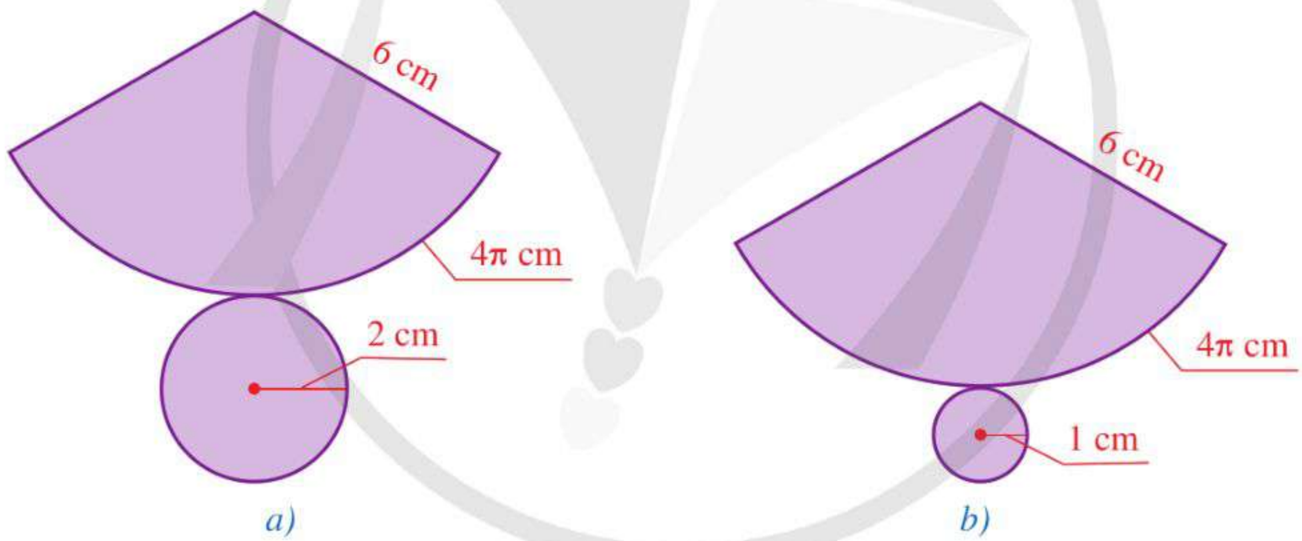
b) Đỉnh, hai bán kính đáy, hai đường sinh và chiều cao của hình nón;

c) Tâm, hai đường kính, bốn bán kính và một hình tròn lớn của hình cầu.



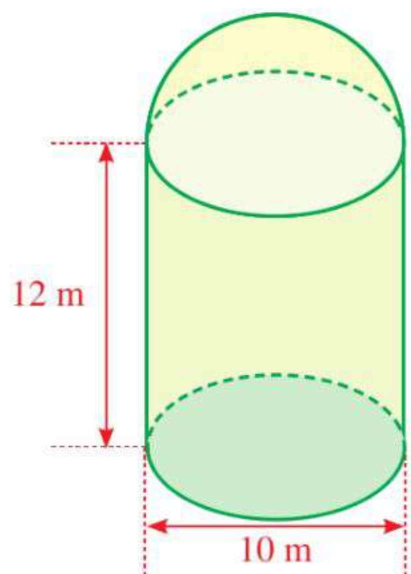
Hình 40

2. Trong số những miếng bìa có dạng như ở các hình *41a*, *41b*, miếng bìa nào có thể gấp và dán lại để được hình nón (có đáy)?



Hình 41

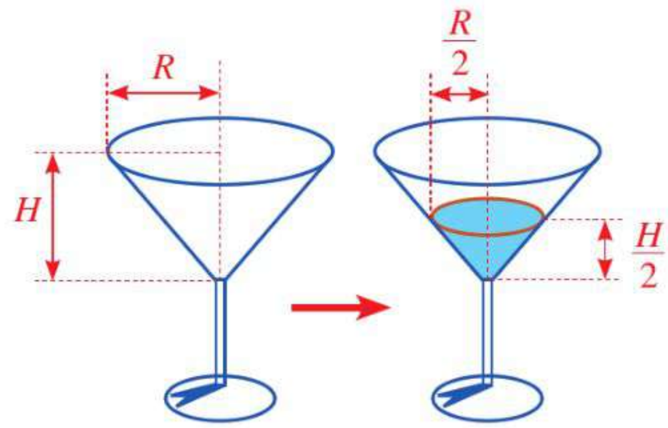
3. Một kho chứa ngũ cốc có dạng một hình trụ và một mái vòm có dạng nửa hình cầu. Phần hình trụ có đường kính đáy là 10 m và chiều cao là 12 m. Phần mái vòm là nửa hình cầu đường kính 10 m (*Hình 42*). Hỏi dung tích của kho đó là bao nhiêu mét khối (bỏ qua bề dày của tường nhà kho và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 42

4. Cho một hình trụ và một hình nón có cùng bán kính đáy là r và cùng chiều cao là h. Hình nào trong hai hình đã cho có thể tích lớn hơn?

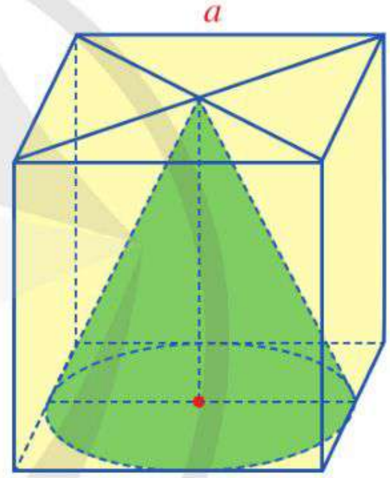
5. Phần đựng được nước của một chiếc ly có dạng hình nón với bán kính đáy là R và chiều cao là H (*Hình 43a*). Người ta đổ nước vào ly đó sao cho chiều cao của khối nước đó bằng $\frac{H}{2}$ và bán kính đáy của khối nước đó bằng $\frac{R}{2}$. Tính theo R và H thể tích phần không chứa nước của chiếc ly ở *Hình 43b*.



a) *b)*

Hình 43

6. *Hình 44* mô tả cách người ta cắt bỏ đi từ một khối gỗ có dạng hình lập phương cạnh a để được một khối gỗ có dạng hình nón. Tính thể tích của phần gỗ bị cắt bỏ đi theo a.



Hình 44

7. Có một quả bóng rổ (loại số 7 cho nam) và một quả bóng tennis (*Hình 45*). Biết rằng diện tích bề mặt của quả bóng rổ khoảng 1 884,75 cm^2 và bán kính của quả bóng rổ gấp khoảng 2 lần đường kính của quả bóng tennis. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng tennis đó là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bóng rổ *Bóng tennis*

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 45

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 3
TẠO ĐỒ DÙNG DẠNG HÌNH NÓN, HÌNH TRỤ

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Hình nón và hình trụ trong cuộc sống

Trong thực tiễn, có nhiều đồ vật được thiết kế, chế tạo ở dạng hình nón, chẳng hạn, chiếc nón lá. Chiếc nón lá không chỉ là một vật dụng thiết yếu trong đời sống sinh hoạt hằng ngày mà đã trở thành một nét đặc trưng cho văn hoá nước ta. Hình ảnh tiền thân của chiếc nón lá đã được chạm khắc trên trống đồng Ngọc Lũ, thạp đồng Đào Thịnh vào khoảng 2500 – 3000 năm trước Công nguyên. Ngày nay, nón lá cũng là quà tặng đặc biệt cho du khách nước ngoài khi đến tham quan Việt Nam. Hình ảnh chiếc nón lá cũng đã đi vào kiến trúc như nhà hát Cao Văn Lầu ở Bạc Liêu.

Nón lá
(*Ảnh: dezign 56*)

Nhà hát Cao Văn Lầu
(*Ảnh: HIFU.photos*)

Nhiều đồ vật trong cuộc sống được thiết kế, chế tạo ở dạng hình trụ, chẳng hạn, giếng nước ở các làng quê Việt Nam.

Hình ảnh cây đa – giếng nước – sân đình, những nét điển hình của làng quê, vẫn luôn được giữ gìn, khắc sâu trong tâm hồn mỗi con người Việt Nam như một biểu tượng về văn hoá, lịch sử truyền thống của dân tộc.

Giếng nước
(*Ảnh: guillermo celano*)

2. Kĩ năng tìm kiếm thông tin và trình bày kết quả hoạt động học tập

– Tìm hiểu hình ảnh về những đồ vật được thiết kế, chế tạo ở dạng hình nón, hình trụ.

– Giới thiệu sản phẩm tạo dựng những đồ vật có dạng hình nón, hình trụ.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG HỌC TẬP

1. Các hoạt động học tập cá nhân

1 Quan sát một số hình ảnh về các đồ vật có dạng hình nón, hình trụ sau đây. Em hãy tìm thêm các hình ảnh về hình nón hoặc hình trụ trong cuộc sống.

Vỏ kem ốc quế

Mũ sinh nhật

Hộp đựng đồ

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

2. Các hoạt động học tập nhóm

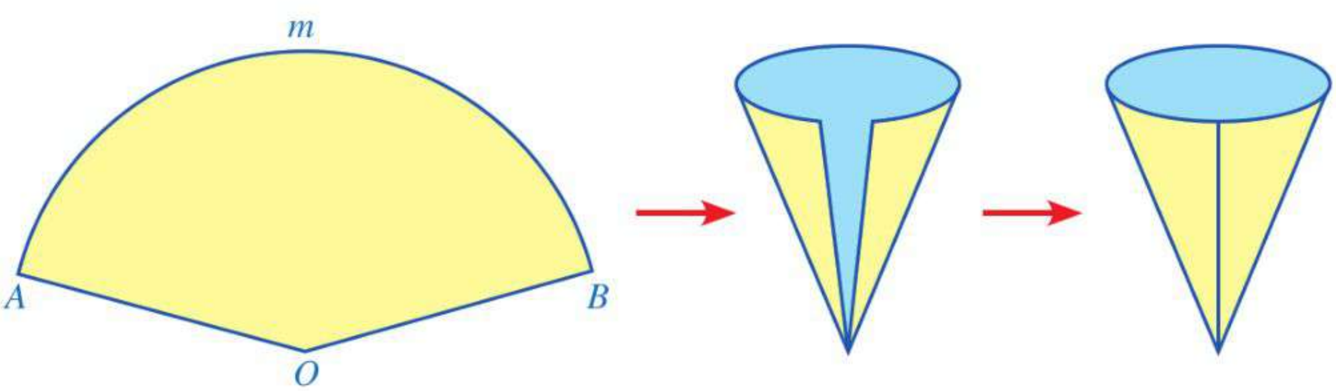
Học sinh được chia theo nhóm để tổ chức hoạt động.

2 Thực hành tạo đồ vật hình nón.

a) Nhiệm vụ: Thực hành tạo mũ sinh nhật có dạng hình nón với đường kính đáy và độ dài đường sinh cho trước, chẳng hạn, đường kính đáy là 20 cm và độ dài đường sinh là 30 cm.

b) Tổ chức thực hiện: Các nhóm học sinh trình bày ý tưởng thiết kế và cách thức thực hiện để tạo các sản phẩm.

– Sử dụng cách tạo lập hình nón đã được học, học sinh có thể gấp và dán giấy theo cách sau:



– Căn cứ vào độ dài đường kính đáy và độ dài đường sinh đã cho, xác định bán kính OA và số đo cung AmB của hình quạt tròn AOB.

3 Thực hành tạo đồ vật hình trụ.

a) Nhiệm vụ: Tạo hộp đựng bút để bàn có dạng hình trụ với đường kính đáy và diện tích xung quanh cho trước, chẳng hạn, đường kính đáy là 10 cm và diện tích xung quanh là 380 cm^2.

b) Tổ chức thực hiện: Các nhóm học sinh trình bày ý tưởng thiết kế và cách thức thực hiện để tạo các sản phẩm.

Hộp đựng bút để bàn
(Ảnh: Akhmad Dody Firmansyah)

– Sử dụng cách tạo lập hình trụ đã được học, học sinh có thể gấp và dán giấy theo cách sau:

– Căn cứ vào độ dài đường kính đáy và diện tích xung quanh đã cho, xác định bán kính của hình tròn (tô màu vàng) và các kích thước của hình chữ nhật (tô màu xanh).

4 Báo cáo thảo luận: Các nhóm học sinh trình bày ý tưởng thiết kế và cách thức thực hiện để tạo các sản phẩm, giới thiệu các sản phẩm do nhóm tạo ra.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: đánh giá trong dạy học dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA

(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. TẠO CÔNG CỤ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) VÀ TRẢI NGHIỆM TÍNH ĐỐI XỨNG TRỤC CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐÓ

a) Tạo số a *ban đầu*

Nhập lệnh: a = 1 rồi bấm ↵

b) Tạo các hộp chọn đầu vào

Dùng a=1 tạo hộp chọn đầu vào a và đặt tên là "Nhập số a (khác 0): a =" rồi tạo liên kết với a.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) *khi* a *thay đổi*

– Nhập lệnh: y = ax^2 rồi bấm ↵

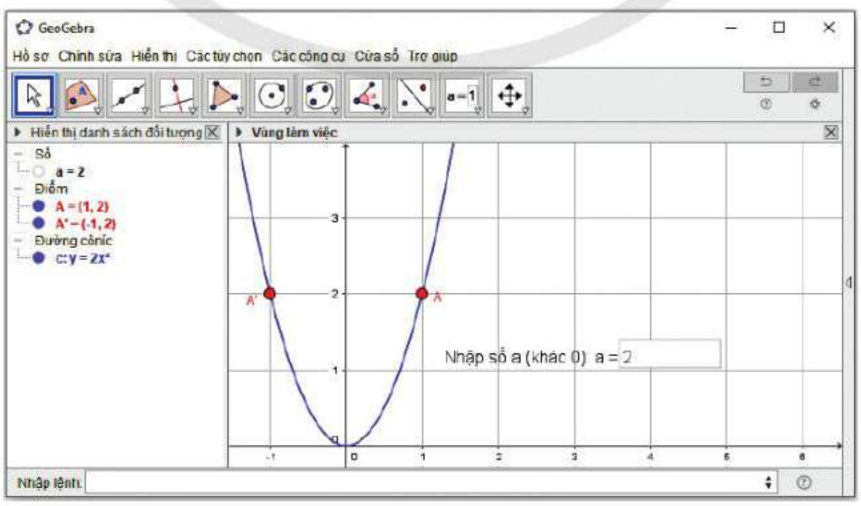
Khi đó màn hình sẽ xuất hiện đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

– Khi thay giá trị a ở hộp chọn đầu vào, màn hình sẽ xuất hiện đồ thị của hàm số $y = ax^2$ tương ứng.

d) Trải nghiệm tính chất đối xứng trục của đồ thị hàm số $y = ax^2$

– Dùng  để vẽ một điểm A thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

– Dùng  (lần lượt nháy chuột vào điểm A và trục Oy) để vẽ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy (*Hình 1*).



Hình 1

Khi thay giá trị a ở hộp chọn đầu vào hay di chuyển điểm A trên đồ thị của hàm số $y = ax^2$, ta thấy điểm A' luôn thuộc đồ thị của hàm số đó.

II. XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH, VẼ ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

1. Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có thể vẽ tam giác ABC rồi xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đó như sau:

– Dùng để vẽ các đỉnh A, B, C.

– Dùng để vẽ các cạnh AB, BC, CA.

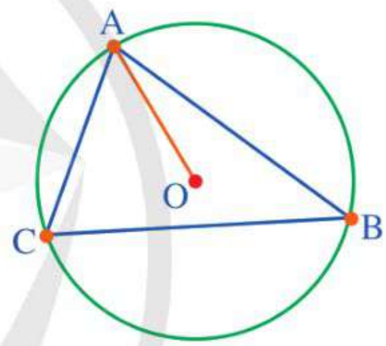
– Dùng để vẽ các đường trung trực a và b lần lượt của các cạnh AB và BC.

– Dùng để xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (điểm O là giao điểm của a và b).

– Dùng để vẽ đoạn thẳng OA là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

– Dùng để vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm O và đi qua A.

– Ẩn các tên và các đối tượng không cần thiết, ta có tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với tâm O bán kính OA (*Hình 2*).



Hình 2

2. Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn nội tiếp tam giác

Ta có thể vẽ tam giác ABC rồi xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn nội tiếp của tam giác ABC đó như sau:

– Dùng để vẽ các điểm A, B, C.

– Dùng để vẽ các cạnh AB, BC, CA.

– Dùng để vẽ các đường phân giác c và d lần lượt của góc A và góc B.

– Dùng để xác định tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC (điểm I là giao điểm của c và d).

– Dùng để vẽ đường thẳng e đi qua I và vuông góc với cạnh BC.

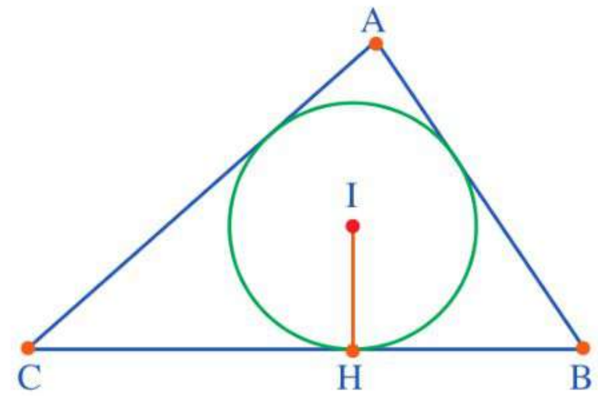
– Dùng để xác định giao điểm H của đường thẳng e và cạnh BC.

– Ẩn các đường thẳng: c, d, e.

– Dùng để vẽ đoạn thẳng IH là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

– Dùng để vẽ đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I và đi qua H.

– Ẩn các tên và các đối tượng không cần thiết, ta có tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tam giác ABC với tâm I, bán kính IH (*Hình 3*).



Hình 3

III. PHÉP QUAY

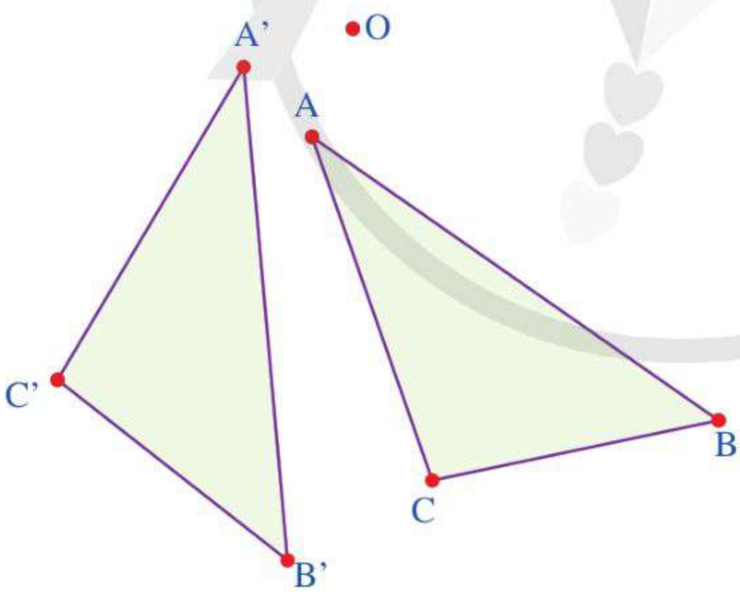
Ta có thể vẽ tam giác A'B'C' có được qua phép quay thuận chiều 50° tâm O tam giác ABC như sau:

– Dùng để vẽ tam giác ABC.

– Dùng và đổi tên điểm (nếu cần) để vẽ điểm O.

– Dùng (nháy chuột vào tam giác ABC, điểm O, nhập vào 50° và lựa chọn **theo chiều kim đồng hồ**) để vẽ tam giác A'B'C'.

Ở *Hình 4*, tam giác A'B'C' có được qua phép quay thuận chiều 50° tâm O tam giác ABC:



Hình 4

1 Vẽ tứ giác A'B'C'D' có được qua phép quay ngược chiều 70° tâm O tứ giác ABCD.

IV. TẠO LẬP HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

Ta có thể tạo lập hình trụ như sau:

* Thực hiện trong **Vùng làm việc**

– Dùng để vẽ đường tròn tâm A là gốc toạ độ và bán kính là 2.

– Dùng để vẽ điểm B thuộc đường tròn vừa vẽ.

– Chọn **Hiển thị** và **Hiển thị dạng 3D.**

* Thực hiện trong cửa sổ **Hiển thị dạng 3D**

Vẽ hình chữ nhật ABCD:

– Dùng để nối A với B.

– Dùng để vẽ đường thẳng d đi qua B và song song với trục màu xanh cô ban (cobalt).

– Dùng để vẽ điểm C thuộc đường thẳng d.

– Dùng để vẽ đường thẳng m đi qua C và song song với đường thẳng AB.

– Dùng để vẽ điểm D là giao điểm của đường thẳng m với trục màu xanh cô ban (cobalt).

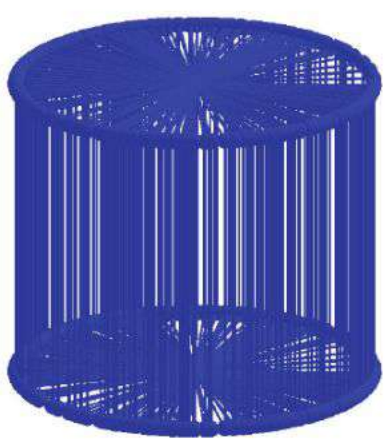
– Ẩn các đối tượng không cần thiết. Dùng để vẽ các cạnh BC, CD và DA của hình chữ nhật.

Cho hình chữ nhật ABCD *quay xung quanh cạnh* AD:

– Nháy chuột phải lần lượt vào các cạnh AB, BC, CD và chọn **Mở dấu vết khi di chuyển.**

– Nháy chuột phải vào các điểm B, C và chọn **Mở dấu vết khi di chuyển**.

– Cho điểm B di chuyển trên đường tròn (A; 2), ta thấy hình chữ nhật ABCD quay xung quanh cạnh AD tạo ra hình trụ (*Hình 5*).



Hình 5

2 a) Tạo lập hình nón.

b) Tạo lập hình cầu.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
đa giác đều	đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau	82
đa giác lồi	đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó	81
đường tròn ngoại tiếp tam giác	đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác	68
đường tròn nội tiếp tam giác	đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác	71
hình cầu	hình được tạo ra khi quay một nửa hình tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó	104
hình nón	hình được tạo ra khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đó	98
hình trụ	hình được tạo ra khi quay một hình chữ nhật một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh của nó	92
không gian mẫu	tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra của một phép thử	35
phương trình bậc hai một ẩn	phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$	52
tần số của giá trị x_i	số lần xuất hiện của giá trị x_i trong mẫu dữ liệu thống kê	17
tần số ghép nhóm của một nhóm	số số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm	26
tần số tương đối của giá trị x_i	tỉ số giữa tần số n_i của giá trị x_i và số lượng N các dữ liệu trong mẫu dữ liệu thống kê	20
tần số tương đối ghép nhóm của một nhóm	tỉ số giữa tần số n_i của nhóm và số lượng N các số liệu trong mẫu dữ liệu thống kê	29
tứ giác nội tiếp	tứ giác có bốn đỉnh cùng thuộc một đường tròn	75

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ NGÂN – NGUYỄN THỊ QUÝ
ĐÀO ANH TIẾN – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ

Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ HƯƠNG

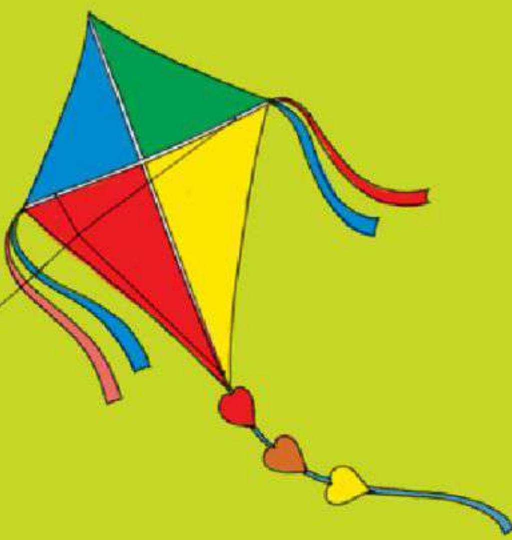
Trình bày bìa:
TRẦN TIỂU LÂM

Sửa bản in:
LÊ HUY ĐAN – VŨ THỊ MINH THẢO

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

TOÁN 9 – TẬP HAI
Mã số: ....
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5 cm, tại...............
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản ......- ... /CXBIPH/ ......-........./ĐHSP
Quyết định xuất bản số: ..../QĐ - NXBĐHSP, ngày ....
In xong và nộp lưu chiểu .....

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống



Toán 9 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 9, thuộc bộ sách giáo khoa *Cánh Diều*, thực hiện theo *Chương trình Giáo dục phổ thông 2018.*

Sách gồm hai tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.