KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN 11

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA
THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 11

(Theo Quyết định số 2026/QĐ-BGDĐT ngày 21 tháng 7 năm 2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Họ và tên	Chức vụ Hội đồng
Ông LÊ MẬU HẢI	Chủ tịch
Bà CAO THỊ HÀ	Phó Chủ tịch
Ông PHẠM ĐỨC TÀI	Uỷ viên, Thư kí
Ông PHẠM KHẮC BAN	Uỷ viên
Ông NGUYỄN HẮC HẢI	Uỷ viên
Ông NGUYỄN DOÃN PHÚ	Uỷ viên
Ông NGUYỄN CHIẾN THẮNG	Uỷ viên
Bà NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN	Uỷ viên
Ông ĐINH CAO THƯỢNG	Uỷ viên
Bà VŨ THỊ NHƯ TRANG	Uỷ viên
Ông PHẠM ĐÌNH TÙNG	Uỷ viên

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN

(Tái bản lần thứ nhất)

11

TẬP HAI

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

   Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

   Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

   Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

   Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

   Hình thành kiến thức: Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.

   Ví dụ: Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.

   Luyện tập: Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.

   Vận dụng: Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

   Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

   Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào ***Khám phá***, ***Trải nghiệm***, ***Thảo luận***, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng ***Em có biết?***,...

   Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy, cô giáo sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

MỤC LỤC

CHƯƠNG VI
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Trong chương này, luỹ thừa với số mũ nguyên được mở rộng cho số mũ hữu tỉ, số mũ thực và từ đó hình thành khái niệm lôgarit. Đây là những phép tính được sử dụng nhiều trong khoa học, kĩ thuật và đời sống. Trên cơ sở đó, hai hàm số quan trọng là hàm số mũ và hàm số lôgarit được giới thiệu. Phần cuối chương trình bày cách giải một số phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

Bài 18 LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

THUẬT NGỮ

- Cơ số
- Căn bậc *n*
- Luỹ thừa với số mũ nguyên
- Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ
- Luỹ thừa với số mũ thực
- Số mũ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên của một số thực khác 0; luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực của một số thực dương.
- Giải thích các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên, luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực.
- Sử dụng tính chất của phép tính luỹ thừa trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến.
- Tính giá trị biểu thức số có chứa phép tính luỹ thừa bằng cách sử dụng máy tính cầm tay.
- Giải quyết một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với phép tính luỹ thừa.

Ngân hàng thường tính lãi suất cho khách hàng theo thể thức *lãi kép theo định kì*, tức là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền P với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) được tính theo *công thức lãi kép* sau:

$$A = P(1+r)^N.$$

Bác Minh gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác Minh thu được sau 3 năm.

1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

HĐ1. Nhận biết luỹ thừa với số mũ nguyên

Tính: $(1,5)^2$; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$; $(\sqrt{2})^4$.

- Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

  Với a là số thực tuỳ ý:
  $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}.$$
  Với a là số thực khác 0:
  $$a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$
- Trong biểu thức a^m, a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad (ab)^m = a^m b^m;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Chú ý

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức:
$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}.$$

Giải

$$A = 2^8 \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{0,2^4 \cdot 5^4} = 2^2 + \frac{1}{(0,2 \cdot 5)^4} = 4 + 1 = 5.$$

Luyện tập 1. Một số dương x được gọi là viết dưới dạng *kí hiệu khoa học* nếu $x = a \cdot 10^m$, ở đó $1 \leq a < 10$ và m là một số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg;

b) Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 672 62 kg.

(Theo *Vật lí 12, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020*)

2. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

HĐ2. Nhận biết khái niệm căn bậc *n*

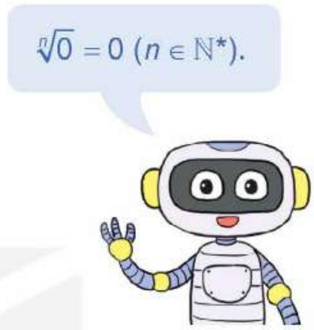
a) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^2 = 4$.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^3 = -8$.

Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét. Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a.

Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là *căn số học bậc n của a*), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.



Số âm có căn bậc chẵn không? Vì sao?

Ví dụ 2. Tính: a) $\sqrt[3]{-64}$; b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{2}$.

Luyện tập 2. Tính: a) $\sqrt[3]{-125}$; b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$.

HĐ3. Nhận biết tính chất của căn bậc *n*

a) Tính và so sánh: $\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{27}$ và $\sqrt[3]{(-8)\cdot 27}$.

b) Tính và so sánh: $\dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}$ và $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}$.

Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Ví dụ 3. Tính: a) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{-8}=\sqrt[5]{4\cdot(-8)}=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$.

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3}=\sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3}=-\sqrt{3}$.

Luyện tập 3. Tính: a) $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{625}$; b) $\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}$.

HĐ4. Nhận biết luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Lưu ý: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

Cho a là một số thực dương.

a) Với n là số nguyên dương, hãy thử định nghĩa $a^{\frac{1}{n}}$ sao cho $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$.

b) Từ kết quả của câu a, hãy thử định nghĩa $a^{\frac{m}{n}}$, với m là số nguyên và n là số nguyên dương, sao cho $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

> Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\dfrac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

? Vì sao trong định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ lại cần điều kiện cơ số $a>0$?

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Ví dụ 4. Tính: a) $16^{\frac{3}{2}}$; b) $8^{\frac{-2}{3}}$.

Giải

a) $16^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16^3}=\sqrt{(4^2)^3}=\sqrt{(4^3)^2}=4^3=64$.

b) $8^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{8^{-2}}=\sqrt[3]{(2^3)^{-2}}=\sqrt[3]{(2^{-2})^3}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.

Luyện tập 4. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y+xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x,y>0)$.

3. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

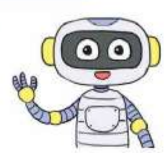
a) Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực

HĐ5. Nhận biết luỹ thừa với số mũ thực

Ta biết rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ và $\sqrt{2}=1,4142135624\ldots$

Gọi (r_n) là dãy số hữu tỉ dùng để xấp xỉ số $\sqrt{2}$, với $r_1=1$; $r_2=1,4$; $r_3=1,41$; $r_4=1,4142$;...

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\sqrt{2}$.



a) Dùng máy tính cầm tay, hãy tính: 3^{r_1}; 3^{r_2}; 3^{r_3}; 3^{r_4} và $3^{\sqrt{2}}$.

b) Có nhận xét gì về sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^{r_n}, tức là $\left|3^{\sqrt{2}} - 3^{r_n}\right|$, khi n càng lớn?

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là **luỹ thừa của a với số mũ α**, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}.$$

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}}$ $(a > 0)$.

Giải

$$A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}} = \frac{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}} = \frac{a^2}{a^{3-1}} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Ví dụ 6. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

Giải

Ta có: $8^{\sqrt{3}} = \left(2^3\right)^{\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}} = \left(2^2\right)^{2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3} < 4\sqrt{3}$ và $2 > 1$ nên $2^{3\sqrt{3}} < 2^{4\sqrt{3}}$. Vậy $8^{\sqrt{3}} < 4^{2\sqrt{3}}$.

Luyện tập 5. Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}$ $(a > 0)$.

Vận dụng. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

b) Tính luỹ thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay

Có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính căn bậc n và luỹ thừa với số mũ thực.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sqrt{20,15}$	√■ 2 0 • 1 5 =	4.488875137	$\sqrt{20,15} \approx 4,4889$
$\sqrt[5]{320}$	SHIFT $x^■$ 5 ▶ 3 2 0 =	3.169786385	$\sqrt[5]{320} \approx 3,1698$
$15^{3,2}$	1 5 $x^■$ 3 • 2 =	5800.855256	$15^{3,2} \approx 5\,800,8553$

BÀI TẬP

6.1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; b) $4^{\frac{3}{2}}$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

6.2. Thực hiện phép tính:

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5}$; b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$.

6.3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{x^5y^{-2}}{x^3y}\ (x, y \neq 0)$; b) $B = \dfrac{x^2y^{-3}}{\left(x^{-1}y^4\right)^{-3}}\ (x, y \neq 0)$.

6.4. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$; b) $B = \left(\dfrac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}$.

6.5. Chứng minh rằng: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

6.6. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

6.7. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

6.8. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á khoảng 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Bài 19 LÔGARIT

THUẬT NGỮ

- Lôgarit
- Lôgarit thập phân
- Lôgarit tự nhiên
- Cơ số của lôgarit
- Số *e*

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm lôgarit cơ số *a* của một số thực dương.
- Giải thích các tính chất của phép tính lôgarit nhờ sử dụng định nghĩa hoặc các tính chất đã biết trước đó.
- Sử dụng tính chất của phép tính lôgarit trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến.
- Tính giá trị (đúng hoặc gần đúng) của lôgarit bằng cách sử dụng máy tính cầm tay.
- Giải quyết một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với phép tính lôgarit.

Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau *n* năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

1. KHÁI NIỆM LÔGARIT

HĐ1. Nhận biết khái niệm lôgarit

Tìm *x*, biết: a) $2^x = 8$; b) $2^x = \frac{1}{4}$; c) $2^x = \sqrt{2}$.

Cho *a* là một số thực dương khác 1 và *M* là một số thực dương. Số thực α để $a^\alpha = M$ được gọi là lôgarit cơ số *a* của *M* và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \Leftrightarrow a^\alpha = M.$$

Chú ý. Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

Từ định nghĩa lôgarit, ta có các tính chất sau:

Với $0 < a \neq 1$, $M > 0$ và α là số thực tuỳ ý, ta có:

$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1;$$

$$a^{\log_a M} = M; \log_a a^\alpha = \alpha.$$

Ví dụ 1. Tính: a) $\log_2 \frac{1}{8}$; b) $\log_{\sqrt{3}} 9$.

Giải

a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$.

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^4 = 4$.

Luyện tập 1. Tính: a) $\log_3 3\sqrt{3}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$.

2. TÍNH CHẤT CỦA LÔGARIT

a) Quy tắc tính lôgarit

HĐ2. Nhận biết quy tắc tính lôgarit

Cho $M = 2^5$, $N = 2^3$. Tính và so sánh:

a) $\log_2(MN)$ và $\log_2 M + \log_2 N$; b) $\log_2\left(\frac{M}{N}\right)$ và $\log_2 M - \log_2 N$.

Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý. Khi đó:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_4 2 + \log_4 32$; b) $\log_2 80 - \log_2 5$.

Giải

a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3$.

b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4$.

Luyện tập 2. Rút gọn biểu thức:

$$A = \log_2(x^3 - x) - \log_2(x+1) - \log_2(x-1) \quad (x > 1).$$

b) Đổi cơ số của lôgarit

Trong nhiều vấn đề lí thuyết và ứng dụng, chúng ta cần đổi từ lôgarit theo một cơ số này sang lôgarit theo một cơ số khác.

HĐ3. Xây dựng công thức đổi cơ số của lôgarit

Giả sử đã cho $\log_a M$ và ta muốn tính $\log_b M$. Để tìm mối liên hệ giữa $\log_a M$ và $\log_b M$, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Đặt $y = \log_a M$, tính M theo y;

b) Lấy lôgarit theo cơ số b cả hai vế của kết quả nhận được trong câu a, từ đó suy ra công thức mới để tính y.

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì ($0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$) và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Ví dụ 3. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_4 8$.

Giải

Ta có: $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

a) Nếu a và b là hai số dương khác 1 thì $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

b) Nếu a là số dương khác 1, M là số dương và $\alpha \neq 0$, thì $\log_{a^\alpha} M = \frac{1}{\alpha}\log_a M$.

Giải

a) Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$.

b) Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_{a^\alpha} M = \frac{\log_a M}{\log_a a^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\log_a M$.

Luyện tập 3. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_9 \frac{1}{27}$.

3. LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

a) Lôgarit thập phân

Trong thực hành, ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10); lôgarit cơ số 10 đóng vai trò quan trọng trong tính toán.

Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit thập phân của M, kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$ (đọc là lốc của M).

Ví dụ 5. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức:

$$\text{pH} = -\log [H^+],$$

trong đó $[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lít) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu pH < 7 thì dung dịch có tính acid, nếu pH > 7 thì dung dịch có tính base, còn nếu pH $= 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,01 mol/lít.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 7,4.

Giải

a) Khi $[H^+] = 0{,}01$, ta có: $\text{pH} = -\log 0{,}01 = -\log 10^{-2} = 2$.

b) Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-7{,}4}$.

b) Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết: Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm kì) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}.$$

Nếu kì tính lãi được chia càng ngày càng nhỏ, tức là tính lãi hằng ngày, hằng giờ, hằng phút, hằng giây,... thì dẫn đến việc tính giới hạn của dãy số A_m khi $m \to +\infty$. Ta có:

$$A_m = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} = P\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr}.$$

Để tính giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m$, ta cần xét giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}$.

Một cách tổng quát, ta xét giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng 2,718281828... và kí hiệu là e. Vậy

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \approx 2,7183.$$

Từ các kết quả trên suy ra $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = Pe^{tr}$.

Thể thức tính lãi khi $m \to +\infty$ theo cách trên gọi là thể thức *lãi kép liên tục*.

Như vậy, với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}.$$

Công thức trên gọi là *công thức lãi kép liên tục*.

Lôgarit tự nhiên

Ta có định nghĩa sau:

Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M, kí hiệu là $\ln M$ (đọc là lôgarit Nêpe của M).

Ví dụ 6. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau:

$$t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải

Ta có: $r = 6\% = 0{,}06$. Do đó thời gian cần thiết để tăng gấp đôi khoản đầu tư là

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0{,}06} \approx 11{,}6 \text{ (năm)}.$$

c) Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Có thể dùng máy tính cầm tay để tính lôgarit của một số dương.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\log 6{,}52$	log 6 . 5 2 =	0.8142475957	$\log 6{,}52 \approx 0{,}8142$
$\ln 6{,}52$	ln 6 . 5 2 =	1.874874376	$\ln 6{,}52 \approx 1{,}8749$
$\log_{14} 17$	$\log_\square\square$ 1 4 ▶ 1 7 =	1.073570215	$\log_{14} 17 \approx 1{,}0736$

Ví dụ 7. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

Giải

Ta có: $A = 100 \cdot (1 + 0{,}06)^n = 100 \cdot 1{,}06^n$.

Với $A = 150$, ta có: $100 \cdot 1{,}06^n = 150$ hay $1{,}06^n = 1{,}5$, tức là $n = \log_{1,06} 1{,}5 \approx 6{,}96$.

Vì gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng (tức là 1 năm) nên n phải là số nguyên. Do đó ta chọn $n = 7$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì bác An nhận được số tiền ít nhất là 150 triệu đồng.

Vận dụng. Cô Hương gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất 6% một năm.

a) Tính số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm, nếu lãi suất được tính theo một trong các thể thức sau:

- Lãi kép kì hạn 12 tháng;
- Lãi kép kì hạn 1 tháng;
- Lãi kép liên tục.

b) Tính thời gian cần thiết để cô Hương thu được số tiền (cả vốn lẫn lãi) là 150 triệu đồng nếu gửi theo thể thức lãi kép liên tục (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

- Công thức lãi kép tính số tiền thu được sau N kì gửi là $A = 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{n}\right)^N$, trong đó n là số kì tính lãi trong 1 năm.
- Công thức lãi kép liên tục tính số tiền thu được sau t năm gửi là $A = 100 \cdot e^{0{,}06t}$.

BÀI TẬP

6.9. Tính:

a) $\log_2 2^{-13}$; b) $\ln e^{\sqrt{2}}$; c) $\log_8 16 - \log_8 2$; d) $\log_2 6 \cdot \log_6 8$.

6.10. Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $A = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2 - 1)$; b) $B = 21\log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3(9x^2) - \log_3 9$.

6.11. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2\log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5}$; b) $B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4$.

6.12. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$; b) $B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n$.

6.13. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15\,500(5 - \log p),$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascan).

Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao khoảng 8 850 m so với mực nước biển.

6.14. Mức cường độ âm L đo bằng deciben (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau:

$$L(I) = 10\log\frac{I}{I_0},$$

trong đó $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7}$ W/m^2.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3}$ W/m^2.

Em có biết?

Các luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và những quy tắc phép tính đơn giản nhất trên các luỹ thừa với số mũ hữu tỉ được nhà toán học Pháp Oresme đề xuất ở thế kỉ XIV. Đến thế kỉ XV, nhà toán học Pháp Chuquet khảo sát luỹ thừa với số mũ âm và số mũ không. Các kí hiệu về số mũ như hiện nay chúng ta đang dùng là do các nhà toán học Descartes và Euler đề xuất.

John Napier (1550 – 1617)

Lôgarit đã được đưa vào (một cách độc lập với nhau) bởi nhà toán học Anh Napier và nhà toán học Thuỵ Sĩ Bürgi như là một cách để đơn giản hoá việc tính toán. Nói riêng, Napier đã có công phát triển lí thuyết lôgarit. Trong công trình "Mô tả các bảng lôgarit" xuất bản năm 1614, ông đã trình bày các tính chất của lôgarit, mô tả bảng lôgarit, cho quy tắc dùng bảng và những ví dụ ứng dụng.

Các lôgarit thập phân được đưa vào bởi nhà toán học Anh Briggs. Việc dùng bảng lôgarit và thước tính lôgarit đã đơn giản hoá rất nhiều công việc tính toán. Trong một thời gian dài, đó là những phương tiện tính toán rất có hiệu lực. Nhà toán học Pháp Laplace đã nói rằng việc phát minh ra lôgarit kéo dài "tuổi thọ" cho các nhà tính toán. Ngày nay, thay cho việc dùng bảng lôgarit và thước tính lôgarit, người ta sử dụng máy tính cầm tay còn thuận tiện hơn rất nhiều.

(Theo C. B. Boyer, V. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, Third Edition, Wiley, 2011)

Bài 20 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

THUẬT NGỮ

- Hàm số mũ
- Hàm số lôgrarit

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết hàm số mũ và hàm số lôgarit. Nêu một số ví dụ thực tế về hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Nhận dạng đồ thị của các hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Giải thích các tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit thông qua đồ thị của chúng.
- Giải quyết một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Sự tăng trưởng dân số được ước tính theo công thức *tăng trưởng mũ* sau:

$$A = Pe^{rt},$$

trong đó P là dân số của năm lấy làm mốc, A là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào năm 2020, dân số Việt Nam khoảng 97,34 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 0,91% (theo *danso.org*). Nếu tỉ lệ tăng dân số này giữ nguyên, hãy ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050.

1. HÀM SỐ MŨ

HĐ1. Nhận biết hàm số mũ

a) Tính $y = 2^x$ khi x lần lượt nhận các giá trị -1; 0; 1. Với mỗi giá trị của x có bao nhiêu giá trị của $y = 2^x$ tương ứng?

b) Với những giá trị nào của x, biểu thức $y = 2^x$ có nghĩa?

Cho a là số thực dương khác 1.
Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a.

? Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số mũ? Khi đó hãy chỉ ra cơ số.

a) $y = (\sqrt{2})^x$; b) $y = 2^{-x}$; c) $y = 8^{\frac{x}{3}}$; d) $y = x^{-2}$.

HĐ2. Nhận dạng đồ thị và tính chất của hàm số mũ

Cho hàm số mũ $y = 2^x$.

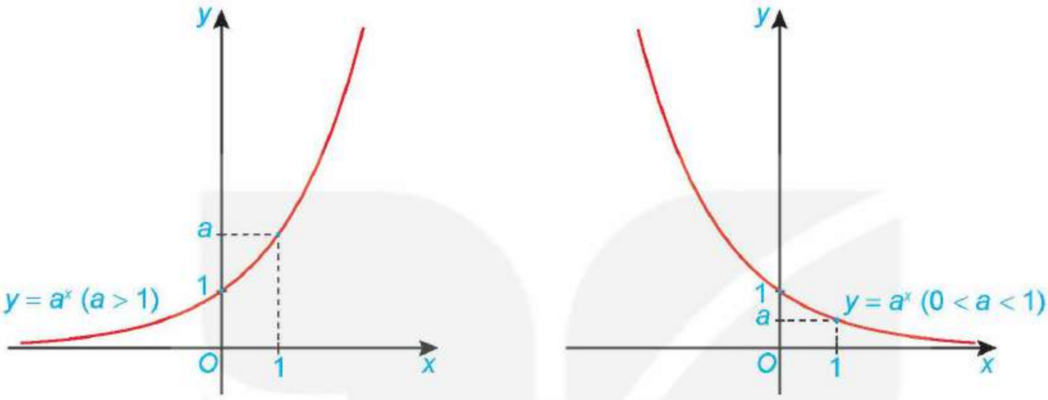
a) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x; 2^x)$ với $x \in \mathbb{R}$ và nối lại ta được đồ thị của hàm số $y = 2^x$.

c) Từ đồ thị đã vẽ ở câu b, hãy kết luận về tập giá trị và tính chất biến thiên của hàm số $y = 2^x$.

Hàm số mũ $y = a^x$:
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$;
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;
- Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0; 1)$, $(1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



Hình 6.1. Dạng đồ thị của hàm số $y = a^x$

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

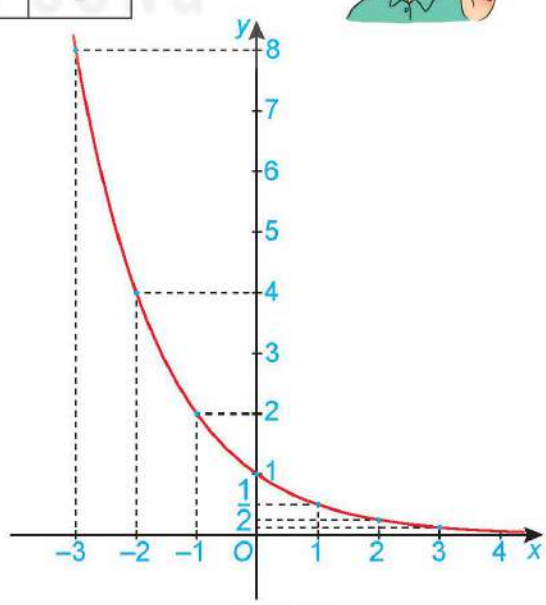
Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ còn được viết dưới dạng $y = 2^{-x}$.

Giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ như Hình 6.2.



Hình 6.2

Luyện tập. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

2. HÀM SỐ LÔGARIT

HĐ3. Nhận biết hàm số lôgarit

a) Tính $y = \log_2 x$ khi x lần lượt nhận các giá trị 1; 2; 4. Với mỗi giá trị của $x > 0$ có bao nhiêu giá trị của $y = \log_2 x$ tương ứng?

b) Với những giá trị nào của x, biểu thức $y = \log_2 x$ có nghĩa?

> Cho a là số thực dương khác 1.
> Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a.

? Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số lôgarit? Khi đó hãy chỉ ra cơ số.

a) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; b) $y = \log_{2^{-2}} x$; c) $y = \log_x 2$; d) $y = \log_{\frac{1}{x}} 5$.

HĐ4. Nhận dạng đồ thị và tính chất của hàm số lôgarit

Cho hàm số lôgarit $y = \log_2 x$.

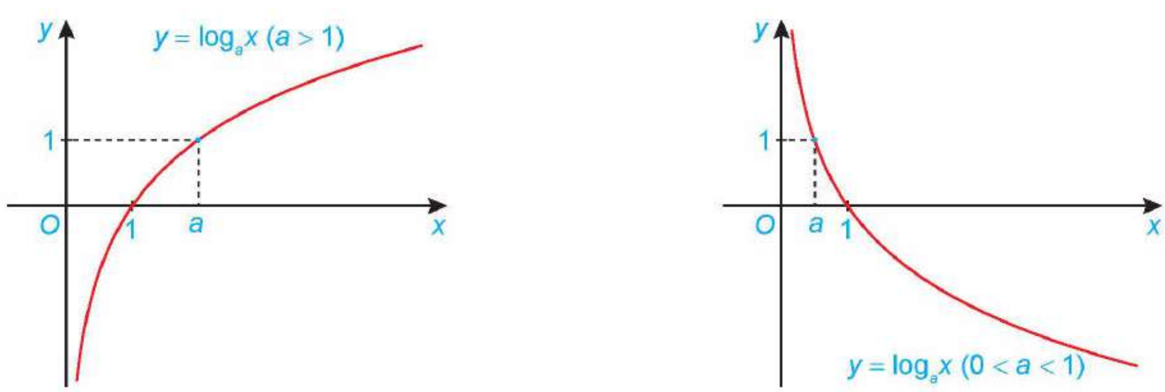
a) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3
$y = \log_2 x$	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x; \log_2 x)$ và nối lại ta được đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$.

c) Từ đồ thị đã vẽ ở câu b, hãy kết luận về tập giá trị và tính chất biến thiên của hàm số $y = \log_2 x$.

> Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:
> - Có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
> - Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;
> - Liên tục trên $(0; +\infty)$;
> - Có đồ thị đi qua các điểm (1; 0), (a; 1) và luôn nằm bên phải trục tung.



Hình 6.3. Dạng đồ thị của hàm số $y = \log_a x$

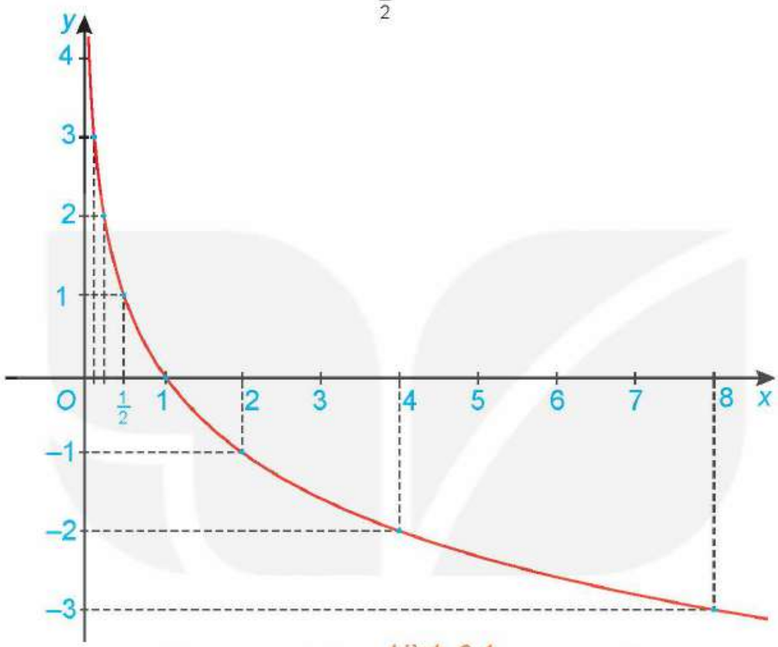
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	1	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ như Hình 6.4.



Hình 6.4

Vận dụng. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu* (kết quả tính theo đơn vị triệu người và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

BÀI TẬP

6.15. Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y = 3^x$; b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

6.16. Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y = \log x$; b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

6.17. Tìm tập xác định của các hàm số sau: a) $y = \log|x+3|$; b) $y = \ln\left(4 - x^2\right)$.

6.18. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

6.19. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$, $0 \le t \le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Bài 21 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

THUẬT NGỮ

- Phương trình mũ
- Phương trình lôgarit
- Bất phương trình mũ
- Bất phương trình lôgarit

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit ở dạng đơn giản.
- Giải quyết một số vấn đề liên môn hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức:

$$V(t) = 780 \cdot (0{,}905)^t.$$

Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc ô tô đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

HĐ1. Nhận biết nghiệm của phương trình mũ

Xét phương trình: $2^{x+1} = \frac{1}{4}$.

a) Khi viết $\frac{1}{4}$ thành luỹ thừa của 2 thì phương trình trên trở thành phương trình nào?

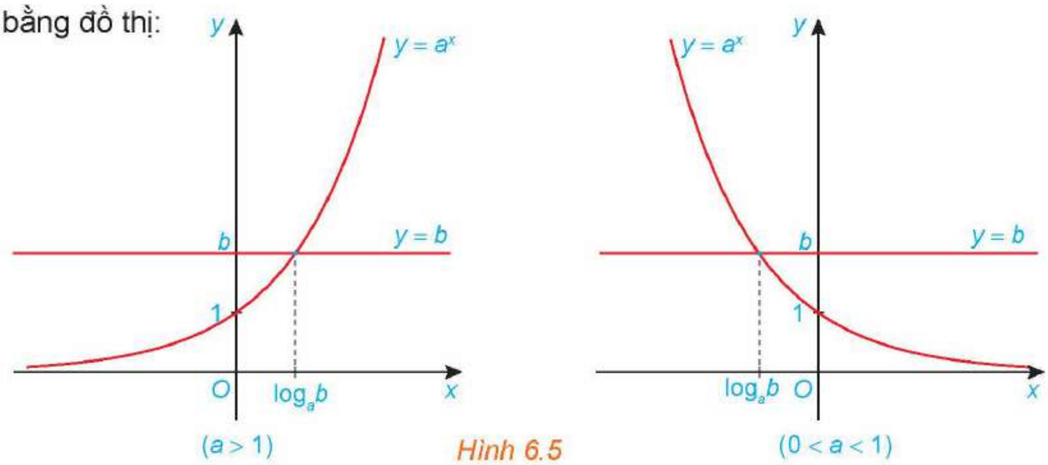
b) So sánh số mũ của 2 ở hai vế của phương trình nhận được ở câu a để tìm x.

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ (với $0 < a \neq 1$).

– Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

– Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh hoạ bằng đồ thị:



Hình 6.5

Chú ý. Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $3^{x+1} = \dfrac{1}{3^{1-2x}}$.

Giải

Đưa vế phải về cơ số 3, ta có $\dfrac{1}{3^{1-2x}} = 3^{2x-1}$.

Từ đó phương trình trở thành $3^{x+1} = 3^{2x-1} \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $10^{x-1} = 2\,022$.

Giải

Lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình ta được $x-1 = \log 2\,022$ hay $x = 1 + \log 2\,022$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \log 2\,022$.

Luyện tập 1. Giải các phương trình sau:

a) $2^{3x-1} = \dfrac{1}{2^{x+1}}$; b) $2e^{2x} = 5$.

2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

HĐ2. Nhận biết nghiệm của phương trình lôgarit

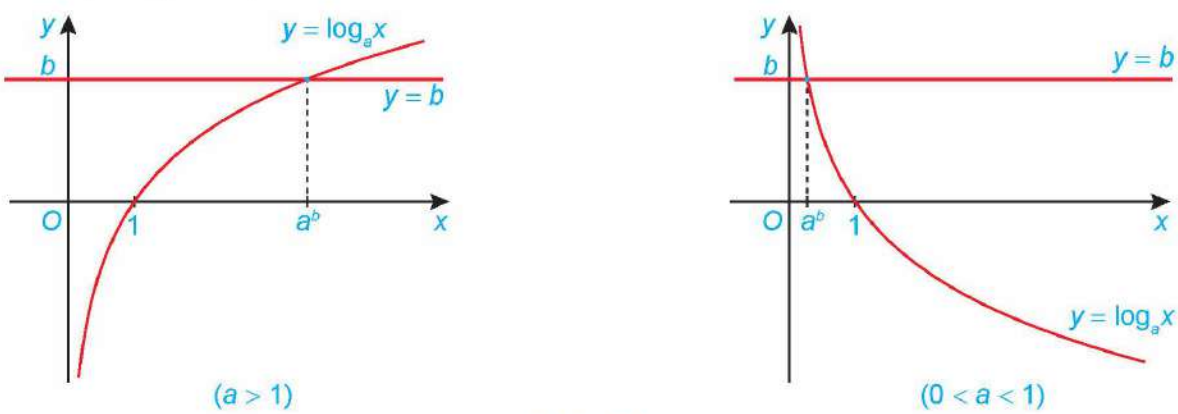
Xét phương trình: $2\log_2 x = -3$.

a) Từ phương trình trên, hãy tính $\log_2 x$.

b) Từ kết quả ở câu a và sử dụng định nghĩa lôgarit, hãy tìm x.

> Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ $(0 < a \neq 1)$.
>
> Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Minh hoạ bằng đồ thị:



Hình 6.6

Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

$$\text{Nếu } u, v > 0 \text{ và } 0 < a \neq 1 \text{ thì } \log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $4 + 3\log(2x) = 16$.

Giải

Điều kiện: $2x > 0$ hay $x > 0$.

Phương trình trở thành $\log(2x) = 4$. Từ đó $2x = 10^4$ hay $x = 5\,000$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 5\,000$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\log_3(x+1) = \log_3(x^2 - 1)$.

Giải

Điều kiện: $x + 1 > 0$ và $x^2 - 1 > 0$, tức là $x > 1$.

Phương trình trở thành $x + 1 = x^2 - 1$, hay $x^2 - x - 2 = 0$.

Từ đó tìm được $x = -1$ và $x = 2$, nhưng chỉ có nghiệm $x = 2$ thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

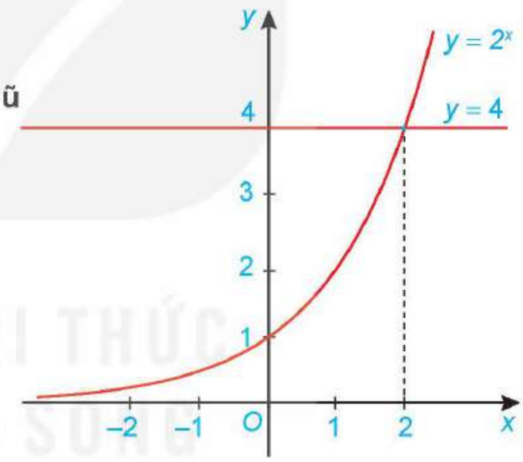
Luyện tập 2. Giải các phương trình sau:

a) $4 - \log(3 - x) = 3$; b) $\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 1$.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

HĐ3. Nhận biết nghiệm của bất phương trình mũ

Cho đồ thị của các hàm số $y = 2^x$ và $y = 4$ như Hình 6.7. Tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = 2^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 4$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 4$.



Hình 6.7

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \ge b$, $a^x < b$, $a^x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:
  – Nếu $b \le 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
  – Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

  Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Chú ý

a) Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

b) Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình: $16^x > \frac{1}{8}$.

Giải

Ta có: $16^x > \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{4x} > 2^{-3} \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$.

Ví dụ 6. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Ta cần tìm t sao cho

$V(t) \le 300 \Leftrightarrow 780 \cdot (0,905)^t \le 300 \Leftrightarrow (0,905)^t \le \frac{5}{13} \Leftrightarrow t \ge \log_{0,905} \frac{5}{13} \approx 9,6$.

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

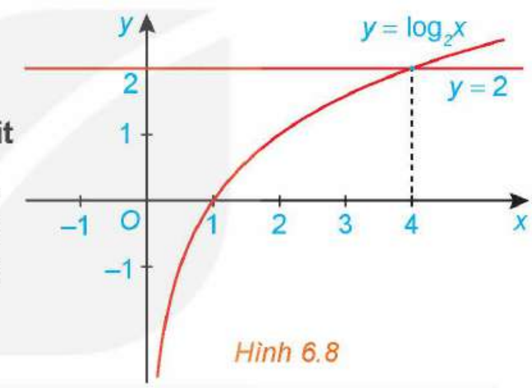
Luyện tập 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2x-1} \le 0,1^{2-x}$;　　　　b) $3 \cdot 2^{x+1} \le 1$.

4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

HĐ4. Nhận biết nghiệm của bất phương trình lôgarit

Cho đồ thị của các hàm số $y = \log_2 x$ và $y = 2$ như Hình 6.8. Tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 2$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > 2$.



Hình 6.8

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \ge b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \le b$) với $a > 0$, $a \ne 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:
  - Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
  - Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Chú ý

a) Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

b) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình: $\log_{0,3}(x+1) \le \log_{0,3}(2x-1)$.

Giải

Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$.

Vì cơ số $0,3 < 1$ nên bất phương trình trở thành $x + 1 \ge 2x - 1$, từ đó tìm được $x \le 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x \le 2$.

Luyện tập 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{7}}(x+1) > \log_7(2-x)$;

b) $2\log(2x+1) > 3$.

Vận dụng. Áp suất khí quyển p (tính bằng kilôpascan, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển, tính bằng km) được tính theo công thức sau:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}.$$

(Theo *britannica.com*)

a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 4 km.

b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

BÀI TẬP

6.20. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x-1} = 27$;

b) $100^{2x^2-3} = 0,1^{2x^2-18}$;

c) $\sqrt{3}e^{3x} = 1$;

d) $5^x = 3^{2x-1}$.

6.21. Giải các phương trình sau:

a) $\log(x+1) = 2$;

b) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$;

c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x$;

d) $\log_3(x^2-3x+2) = \log_3(2x-4)$.

6.22. Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x}$;

b) $2\cdot 5^{2x+1} \le 3$;

c) $\log_3(x+7) \ge -1$;

d) $\log_{0,5}(x+7) \ge \log_{0,5}(2x-1)$.

6.23. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A = 500\cdot(1+0,075)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

6.24. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau:

$$N(t) = 500e^{0,4t}.$$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

6.25. Giả sử nhiệt độ T (°C) của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30 °C?

6.26. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A – TRẮC NGHIỆM

6.27. Cho hai số thực dương x, y và hai số thực α, β tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$.

B. $x^{\alpha} \cdot y^{\beta} = (xy)^{\alpha+\beta}$.

C. $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$.

D. $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$.

6.28. Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} : x^{\frac{5}{8}}$ $(x > 0)$ ta được

A. $\sqrt[4]{x}$.

B. $\sqrt{x}$.

C. $\sqrt[3]{x}$.

D. $\sqrt[5]{x}$.

6.29. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_a(a^3b^2) = 3 + \log_a b$.

B. $\log_a(a^3b^2) = 3 + 2\log_a b$.

C. $\log_a(a^3b^2) = \dfrac{3}{2} + \log_a b$.

D. $\log_a(a^3b^2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

6.30. Cho bốn số thực dương a, b, x, y với a, $b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

C. $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.

D. $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.

6.31. Đặt $\log_2 5 = a$, $\log_3 5 = b$. Khi đó, $\log_6 5$ tính theo a và b bằng

A. $\dfrac{ab}{a+b}$.

B. $\dfrac{1}{a+b}$.

C. $a^2 + b^2$.

D. $a + b$.

6.32. Cho hàm số $y = 2^x$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

B. Tập giá trị của hàm số là $(0; +\infty)$.

C. Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại đúng một điểm.

D. Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

6.33. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_{0,5} x$.

B. $y = e^{-x}$.

C. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

D. $y = \ln x$.

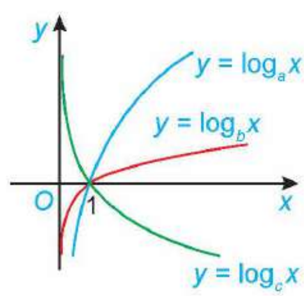
6.34. Cho đồ thị ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a > b > c$.

B. $b > a > c$.

C. $a > c > b$.

D. $b > c > a$.



B – TỰ LUẬN

6.35. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = \log_a\left(\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right) + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}}$.

6.36. Giải các phương trình sau:

a) $3^{1-2x} = 4^x$;

b) $\log_3(x+1) + \log_3(x+4) = 2$.

6.37. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1}}$;

b) $y = \ln(1 - \ln x)$.

6.38. *Lạm phát* là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50 000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là r% một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là

$$A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n.$$

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

6.39. Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có:

$$N(t) = N_0 e^{rt},$$

trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ.

Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

a) Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?

b) Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

6.40. Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó: $P = \log\dfrac{d+1}{d}$. (Theo F. Benford, The Law of Anomalous Numbers, *Proc. Am. Philos. Soc.* 78 (1938), 551 – 572).

Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng 4,6% (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

a) Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P.

b) Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.

c) Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1.

CHƯƠNG VII
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Chương này, ta sẽ tìm hiểu về quan hệ vuông góc, góc, khoảng cách và thể tích trong Hình học không gian.

Bài 22 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

THUẬT NGỮ

- Góc giữa hai đường thẳng
- Hai đường thẳng vuông góc

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết góc giữa hai đường thẳng.
- Nhận biết hai đường thẳng vuông góc.
- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong một số tình huống đơn giản.
- Vận dụng kiến thức về quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế.

Đối với các nút giao thông cùng mức hay khác mức, để có thể dễ dàng bố trí các nhánh rẽ và để người tham gia giao thông có góc nhìn đảm bảo an toàn, khi thiết kế người ta đều cố gắng để các tuyến đường tạo với nhau một góc đủ lớn và tốt nhất là góc vuông. Đối với nút giao thông cùng mức, tức là các đường giao nhau, thì góc giữa chúng là góc giữa hai đường thẳng mà ta đã biết. Còn đối với nút giao khác mức, tức là các đường chéo nhau, thì góc giữa chúng được hiểu như thế nào? Bài học này sẽ đề cập tới đối tượng toán học tương ứng.

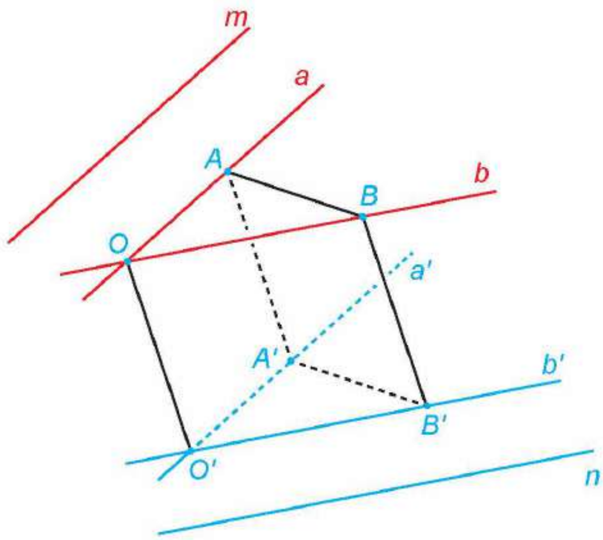
Hình 7.1. Nút giao (khác mức) Trạm 2, Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh (Ảnh: vnexpress.net)

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

HĐ1. Trong không gian, cho hai đường thẳng chéo nhau m và n. Từ hai điểm phân biệt O, O' tuỳ ý lần lượt kẻ các cặp đường thẳng a, b và a', b' tương ứng song song với m, n (H.7.2).

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' có cùng thuộc một mặt phẳng hay không?

b) Lấy các điểm A, B (khác O) tương ứng thuộc a, b. Đường thẳng qua A song song với OO' cắt a' tại A', đường thẳng qua B song song với OO' cắt b' tại B'. Giải thích vì sao $OAA'O'$, $OBB'O'$, $ABB'A'$ là các hình bình hành.



Hình 7.2

c) So sánh góc giữa hai đường thẳng a, b và góc giữa hai đường thẳng a', b'.

(*Gợi ý:* Áp dụng định lí côsin cho các tam giác OAB, $O'A'B'$).

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a, b) = (a, b')$.
- Với hai đường thẳng a, b bất kì: $0° \le (a, b) \le 90°$.

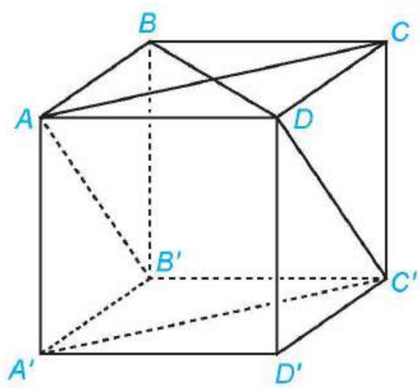
? Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì (a, b) và (a', b') có mối quan hệ gì?

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc (AA', CD), $(A'C', BD)$, (AC, DC').

Giải. (H.7.3)

Vì $CD // AB$ nên $(AA', CD) = (AA', AB) = 90°$. Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó, $A'C' // AC$. Vậy $(A'C', BD) = (AC, BD) = 90°$.

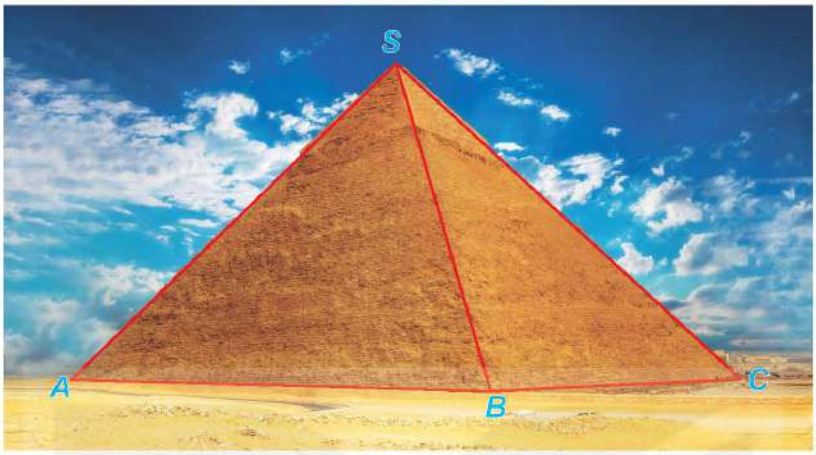
Tương tự, $DC' // AB'$. Vậy $(AC, DC') = (AC, AB')$. Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều. Từ đó, $(AC, DC') = (AC, AB') = 60°$.



Hình 7.3

Vận dụng. Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219 m (kích thước hiện nay). (Theo *britannica.com*).

Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

HĐ2. Đối với hai cánh cửa trong Hình 7.5, tính góc giữa hai đường mép cửa BC và MN.

> Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

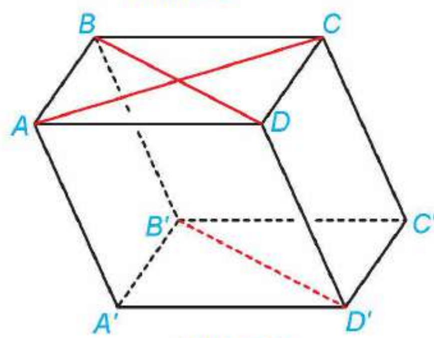
? Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b hay không?

Hình 7.5

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.7.6).

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.



Hình 7.6

Giải

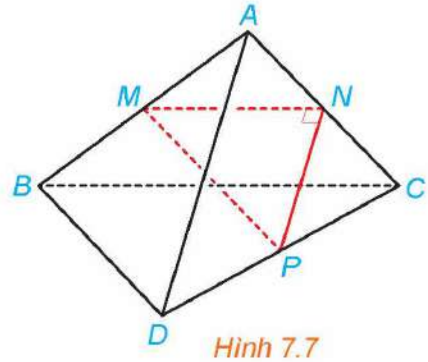
a) Hai đường thẳng AC và $B'D'$ lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.

Tứ giác $BDD'B'$ có hai cạnh đối BB' và DD' song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $B'D'$ song song với BD. Mặt khác, BD không song song với AC nên $B'D'$ không song song với AC.

Từ những điều trên suy ra AC và $B'D'$ chéo nhau.

b) Do $B'D'$ song song với BD nên $(AC, B'D') = (AC, BD)$. Do đó, AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi AC và BD vuông góc với nhau. Do $ABCD$ là hình bình hành nên AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

Luyện tập. Cho tam giác MNP vuông tại N và một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (MNP). Lần lượt lấy các điểm B, C, D sao cho M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, AC, CD (H.7.7). Chứng minh rằng AD và BC vuông góc với nhau và chéo nhau.



Hình 7.7

BÀI TẬP

7.1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đáy là các tam giác đều. Tính góc $(AB, B'C')$.

7.2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

7.3. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90°$.

a) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC.

b) Gọi G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD. Chứng minh rằng GK vuông góc với BC.

7.4. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện: hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

Hình 7.8

Bài 23 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

THUẬT NGỮ

- Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng
- Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Giải thích mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.
- Vận dụng kiến thức về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng vào thực tế.

Hình 7.9. Quảng trường màu nhiệm (Square of Miracles) ở Pisa, Toscana, Italy

Hầu hết các công trình kiến trúc đều được xây dựng theo phương thẳng đứng để có thể vững chãi, mặc dù vậy, cũng có những công trình có phương nghiêng. Nếu đứng tại Quảng trường màu nhiệm ở Pisa (H.7.9), bằng mắt thường, ta có thể cảm nhận rằng tháp ngoài cùng bên phải trong hình là nghiêng và các công trình còn lại đều thẳng đứng. Sau bài học, ta có thể diễn giải chính xác và bản chất hơn về điều này.

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

HĐ1. Đối với cánh cửa như trong Hình 7.10, khi đóng – mở cánh cửa, ta coi mép dưới BC của cánh cửa luôn sát sàn nhà (khe hở không đáng kể).

a) Từ quan sát trên, hãy giải thích vì sao đường thẳng AB vuông góc với mọi đường thẳng đi qua B trên sàn nhà.

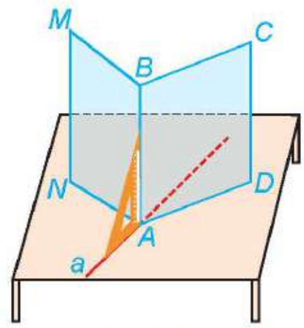
b) Giải thích vì sao đường thẳng AB vuông góc với mọi đường thẳng trên sàn nhà.

Hình 7.10

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Chú ý. Khi Δ vuông góc với (P), ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

? Nếu đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) vuông góc với nhau thì chúng có cắt nhau hay không?



Hình 7.11

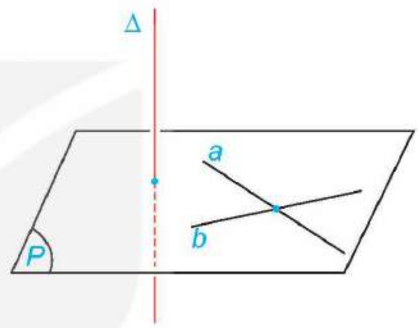
HĐ2. Gấp tấm bìa cứng hình chữ nhật sao cho nếp gấp chia tấm bìa thành hai hình chữ nhật, sau đó đặt nó lên mặt bàn như Hình 7.11.

a) Bằng cách trên, ta tạo được đường thẳng AB vuông góc với hai đường thẳng nào thuộc mặt bàn?

b) Trên mặt bàn, qua điểm A kẻ một đường thẳng a tuỳ ý. Dùng ê ke, hãy kiểm tra trên mô hình xem AB có vuông góc với a hay không.

Người ta chứng minh được rằng:

> Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.



Hình 7.12

? Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì đường thẳng đó có vuông góc với cạnh còn lại hay không?

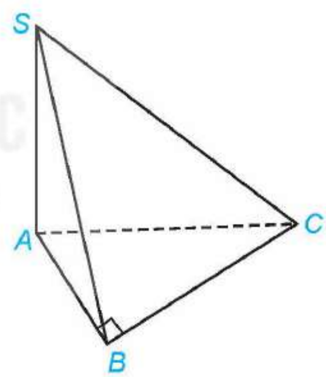
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

Giải. (H.7.13)

Vì SA vuông góc với hai đường thẳng AB và AC nên $SA \perp (ABC)$. Suy ra $SA \perp BC$.

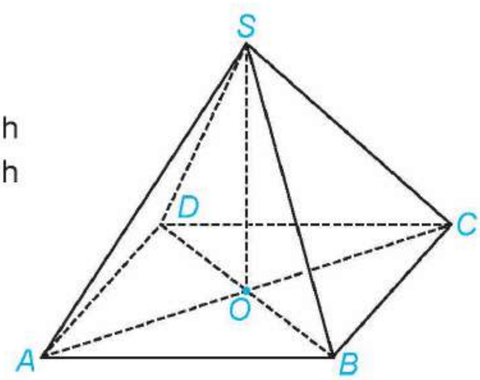
Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp BA$.

Vì BC vuông góc với hai đường thẳng SA và BA nên $BC \perp (SAB)$.



Hình 7.13

Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, $SA = SC$ và $SB = SD$ (H.7.14). Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.



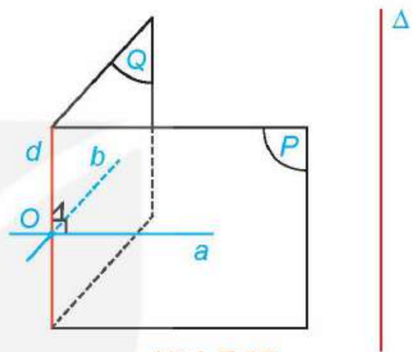
Hình 7.14

Vận dụng. Khi làm cột treo quần áo, ta có thể tạo hai thanh đế thẳng đặt dưới sàn nhà và dựng cột treo vuông góc với hai thanh đế đó (H.7.15). Hãy giải thích vì sao bằng cách đó ta có được cột treo vuông góc với sàn nhà.

Hình 7.15

2. TÍNH CHẤT

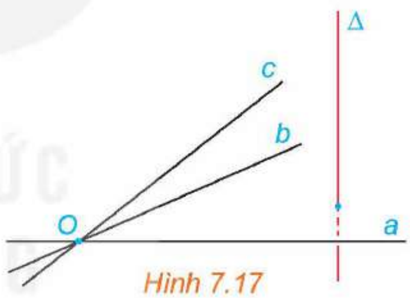
HĐ3. Cho điểm O và đường thẳng Δ không đi qua O. Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với Δ. Xét hai mặt phẳng phân biệt tuỳ ý (P) và (Q) cùng chứa d. Trong các mặt phẳng (P), (Q) tương ứng kẻ các đường thẳng a, b cùng đi qua O và vuông góc với d (H.7.16). Giải thích vì sao mp(a, b) đi qua O và vuông góc với Δ.



Hình 7.16

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ (H.7.17).

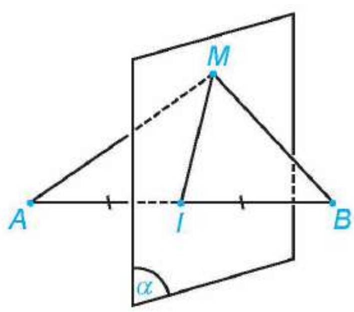


Hình 7.17

Ví dụ 2. Chứng minh rằng điểm M cách đều hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi M thuộc mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.

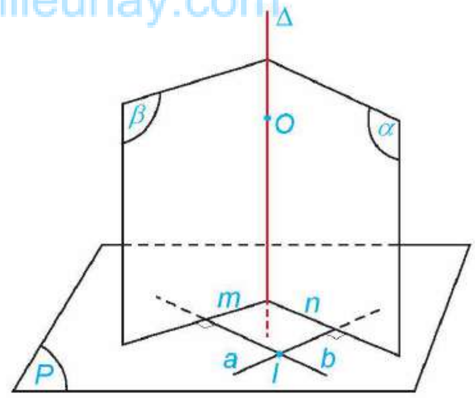
Giải. (H.7.18)

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB. Ta có $MA = MB$ khi và chỉ khi M trùng I hoặc tam giác MAB cân tại M. Mặt khác, ΔMAB cân tại M khi và chỉ khi $MI \perp AB$, tức là M thuộc mặt phẳng (α). Do đó, $MA = MB$ khi và chỉ khi M thuộc (α).



Hình 7.18

Chú ý. Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B.



Hình 7.19

HĐ4. Cho mặt phẳng (P) và điểm O. Trong mặt phẳng (P), lấy hai đường thẳng cắt nhau a, b tuỳ ý. Gọi $(\alpha),(\beta)$ là các mặt phẳng qua O và tương ứng vuông góc với a, b (H.7.19).

a) Giải thích vì sao hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau theo một đường thẳng Δ đi qua O.

b) Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa Δ và (P).

> Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Luyện tập 2. Cho ba điểm phân biệt A, B, C sao cho các đường thẳng AB và AC cùng vuông góc với một mặt phẳng (P). Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

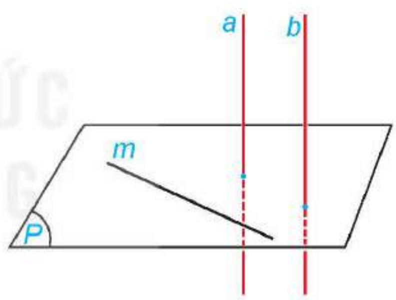
Ví dụ 3. Cho điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P). Giải thích vì sao có duy nhất điểm H thuộc (P) sao cho đường thẳng AH vuông góc với (P).

Giải

Gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P). Lấy điểm H thuộc (P). Khi đó, đường thẳng AH vuông góc với (P) khi và chỉ khi AH trùng với a, tức là H là giao điểm của a và (P). Vậy có duy nhất điểm H thuộc (P) để AH vuông góc với (P), đó là giao điểm của a với (P).

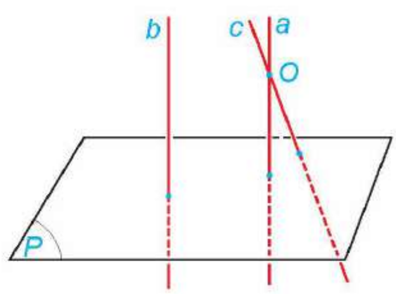
3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Nội dung của mục này nhằm củng cố kiến thức và kĩ năng đã học ở hai mục trên. Ngoài ra, từ đó có thể rút ra các tính chất về mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 7.20

HĐ5. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và song song với đường thẳng b. Lấy một đường thẳng m bất kì thuộc mặt phẳng (P) (H.7.20). Tính (b, m) và từ đó rút ra mối quan hệ giữa b và (P).



Hình 7.21

HĐ6. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P). Xét O là một điểm thuộc a nhưng không thuộc b. Gọi c là đường thẳng qua O và song song với b (H.7.21).

a) Hỏi c có vuông góc với (P) hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa a và c.

b) Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng a và b.

> - Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P).
> - Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

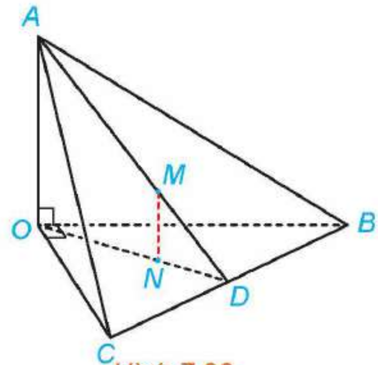
Ví dụ 4. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Giải. (H.7.22)

Vì AO vuông góc với các đường thẳng OB, OC nên $AO \perp (OBC)$. Kẻ các đường trung tuyến AD, OD tương ứng của các tam giác ABC, OBC.

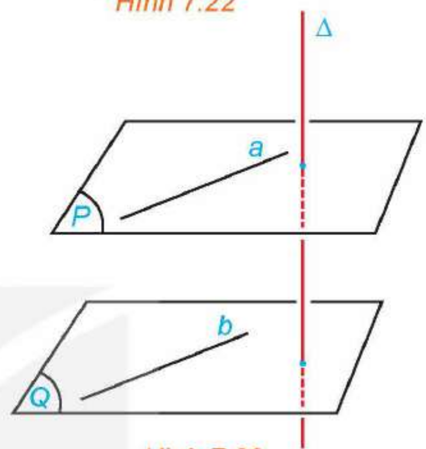
Ta có $\dfrac{MA}{MD} = 2 = \dfrac{NO}{ND}$. Do đó, MN song song với AO.

Mặt khác, $AO \perp (OBC)$ nên $MN \perp (OBC)$.



Hình 7.22

HĐ7. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng Δ vuông góc với (P). Gọi b là một đường thẳng bất kì thuộc (Q). Lấy một đường thẳng a thuộc (P) sao cho a song song với b (H.7.23). So sánh (Δ, b) và (Δ, a). Từ đó rút ra mối quan hệ giữa Δ và (Q).



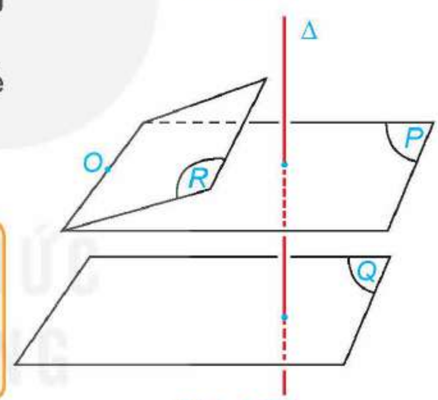
Hình 7.23

HĐ8. Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng Δ. Xét O là một điểm thuộc mặt phẳng (P) nhưng không thuộc mặt phẳng (Q). Gọi (R) là mặt phẳng đi qua O và song song với (Q) (H.7.24).

a) Hỏi (R) có vuông góc với Δ hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa (P) và (R).

b) Nêu vị trí tương đối giữa (P) và (Q).

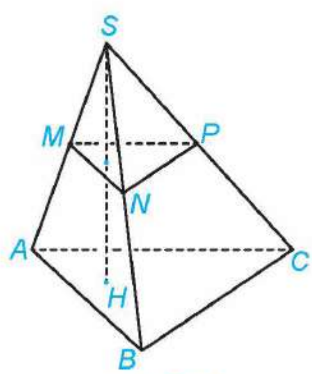
- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Hình 7.24

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H. Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

Giải. (H.7.25)
Do $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$ nên $(MNP) \parallel (ABC)$.
Mặt khác, $SH \perp (ABC)$. Do đó $SH \perp (MNP)$.



Hình 7.25

Luyện tập 3. Một chiếc bàn có các chân cùng vuông góc với mặt phẳng chứa mặt bàn và mặt phẳng chứa mặt sàn. Hỏi hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

HĐ9. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P). Tính (Δ, a).

HĐ10. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ.

a) Qua một điểm O thuộc (P), kẻ đường thẳng a' song song với a. Nêu vị trí tương đối giữa a' và (P).

b) Nêu vị trí tương đối giữa a và (P).

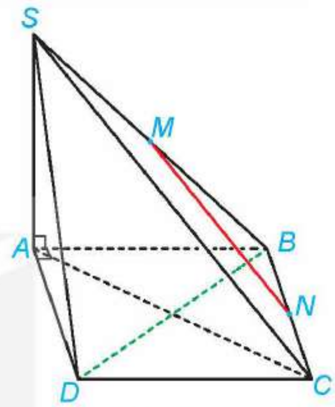
- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P).
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P).

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của SB, BC. Chứng minh rằng $BD \perp MN$.

Giải. (H.7.26)

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$. Mặt khác, $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$. Ta lại có $MN // SC$ nên $MN // (SAC)$. Do đó $BD \perp MN$.

Luyện tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC \perp (MBD)$ và $AH // (MBD)$.



Hình 7.26

BÀI TẬP

7.5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAM)$;

b) Tam giác SBC cân tại S.

7.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$.

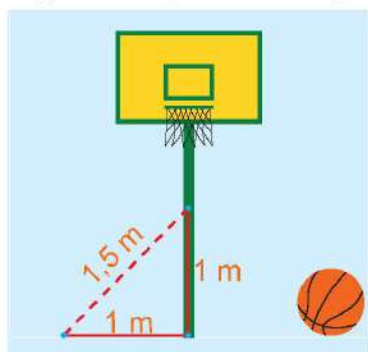
Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

7.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng:

$$AM \perp (SBC),\ AN \perp (SCD),\ SC \perp (AMN).$$

7.8. Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

7.9. Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột 1 m đến một điểm trên cột, cách chân cột 1 m được kết quả là 1,5 m (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?



Hình 7.27

Em có biết?

Phương thẳng đứng là phương đi qua tâm Trái Đất. Để xác định phương thẳng đứng đi qua một điểm, người ta thường dùng cách thả dây dọi từ điểm đó (H.7.28). Do quả dọi chịu lực hút hướng về tâm Trái Đất nên đường thẳng chứa dây dọi khi đó chính là phương thẳng đứng cần xác định.

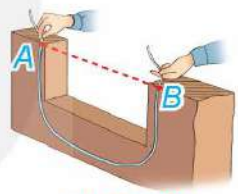
Trong xây dựng, để có thể vững chãi, các công trình kiến trúc thường được thiết kế với chiều cao có phương thẳng đứng. Trong khi xây, người thợ thường dùng dây dọi để đảm bảo các bức tường chứa phương thẳng đứng. Đặc biệt, đường giao nhau của hai bức tường có phương thẳng đứng (H.7.28).

Hình 7.28

Nếu công trình kiến trúc không thẳng đứng thì ta nói nó nghiêng, chẳng hạn tháp Pisa ở Italy là nghiêng và thường được gọi là Tháp nghiêng Pisa.

Mặt phẳng nằm ngang tại một điểm là mặt phẳng vuông góc với phương thẳng đứng tại điểm đó. Phương nằm ngang tại một điểm là phương đi qua điểm đó và thuộc mặt phẳng nằm ngang tại đó.

Mặt nước (trong chậu, trong hồ,...) lúc yên lặng là một mặt phẳng nằm ngang. Dựa vào nguyên tắc bình thông nhau, trong thực tế người ta thường dùng ống nhựa mềm chứa nước bên trong để xác định phương nằm ngang: Đường thẳng nối hai điểm A, B có phương nằm ngang khi có thể điều chỉnh hai đầu dây để mực nước trong hai đầu của dây tương ứng ở hai vị trí A và B (H.7.29).



Hình 7.29

Khi công trình kiến trúc được xây dựng trên một mặt phẳng nằm ngang thì bằng mắt thường ta có thể cảm nhận được tương đối chính xác công trình đó là đứng hay nghiêng. Tuy vậy, nếu công trình được xây dựng trên một nền không có phương nằm ngang thì việc nhận biết bằng mắt thường sẽ khó khăn hơn.

Sàn nhà thường được thiết kế có phương nằm ngang. Tuy vậy, cũng có một số ngoại lệ, chẳng hạn, để dễ dàng thoát nước, sàn nhà tắm, sân,... thường được làm nghiêng.

Hình 7.30. Mặc dù nằm trên dốc núi, các ruộng bậc thang đều được thiết kế theo các mặt phẳng nằm ngang nhằm giữ nước.

Hình 7.31. Các cây cột đèn có phương thẳng đứng nên không vuông góc với mặt dốc. (Ảnh: congan.hochiminhcity.gov.vn)

Bài 24 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

THUẬT NGỮ

- Phép chiếu vuông góc
- Hình chiếu vuông góc
- Định lí ba đường vuông góc

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết phép chiếu vuông góc.
- Xác định hình chiếu vuông góc của một điểm, một đường thẳng, một tam giác.
- Giải thích định lí ba đường vuông góc.
- Nhận biết và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong một số trường hợp đơn giản.
- Vận dụng kiến thức về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế.

Vào khoảng thời gian giữa mùa hè, ở phía bắc của vòng Bắc Cực (như một số vùng phía bắc của Na Uy, Phần Lan, Nga,...), Mặt Trời có thể được nhìn thấy trong suốt 24 giờ của ngày. Hình học giải thích hiện tượng này như thế nào?

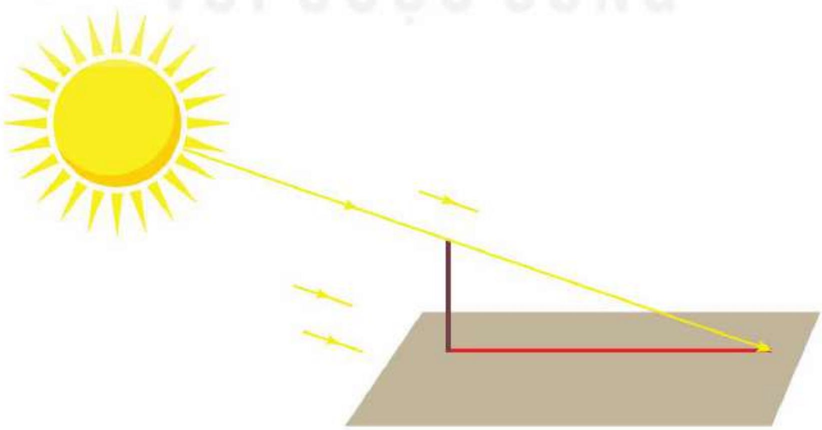
Hình 7.32. Mặt Trời lúc nửa đêm tại Nordkapp, Na Uy.

1. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

HĐ1. Trên sân phẳng có một cây cột thẳng vuông góc với mặt sân.

a) Dưới ánh sáng mặt trời, bóng của cây cột trên sân có thể được nhìn như là hình chiếu của cây cột qua phép chiếu song song nào không?

b) Khi tia sáng mặt trời vuông góc với mặt sân, liệu ta có thể quan sát được bóng của cây cột trên sân hay không?



Hình 7.33

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Chú ý

- Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (*P*) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (*P*). *Hình chiếu vuông góc* $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (*P*) còn được gọi là *hình chiếu* của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (*P*).

a) Nếu *A* là một điểm không thuộc mặt phẳng (*P*) và *A'* là hình chiếu của *A* trên (*P*) thì đường thẳng *AA'* có quan hệ gì với mặt phẳng (*P*)?

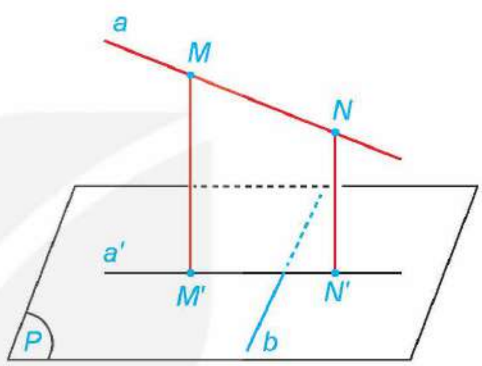
b) Nếu đường thẳng *a* vuông góc với mặt phẳng (*P*) thì hình chiếu của *a* trên (*P*) là gì?

HĐ2. Cho đường thẳng *a* và mặt phẳng (*P*) không vuông góc với nhau. Xét *b* là một đường thẳng nằm trong (*P*). Trên *a*, lấy hai điểm *M*, *N* tuỳ ý. Gọi *M'*, *N'* tương ứng là hình chiếu của *M*, *N* trên mặt phẳng (*P*) (H.7.34).

a) Hình chiếu của *a* trên mặt phẳng (*P*) là đường thẳng nào?

b) Nếu *b* vuông góc với *M'N'* thì *b* có vuông góc với *a* hay không?

c) Nếu *b* vuông góc với *a* thì *b* có vuông góc với *M'N'* hay không?



Hình 7.34

Định lí ba đường vuông góc:

> Cho đường thẳng *a* và mặt phẳng (*P*) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng *b* nằm trong mặt phẳng (*P*) vuông góc với đường thẳng *a* khi và chỉ khi *b* vuông góc với hình chiếu vuông góc *a'* của *a* trên (*P*).

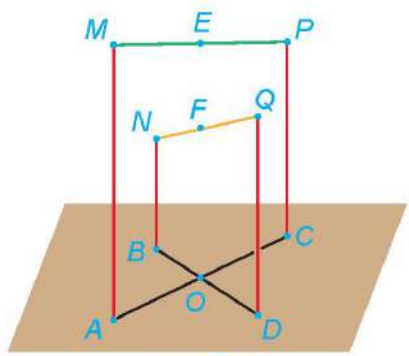
Định lí ba đường vuông góc cho phép chuyển việc kiểm tra tính vuông góc giữa *a* và *b* (có thể chéo nhau) sang kiểm tra tính vuông góc giữa *b* và *a'* (cùng thuộc mặt phẳng (*P*)).

Ví dụ 1. Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm *A*, *B*, *C*, *D*, người ta dựng các cột thẳng đứng *AM*, *BN*, *CP*, *DQ* và nối các sợi dây thẳng giữa *M* và *P*, *N* và *Q* như Hình 7.35.

a) Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây *MP* và *NQ* trên sân.

b) Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.

c) Chứng minh rằng nếu *ABCD* là một hình bình hành thì các trung điểm *E*, *F* tương ứng của các đoạn thẳng *MP* và *NQ* có cùng hình chiếu trên sân.



Hình 7.35

Giải

a) Do các cột có phương thẳng đứng và sân thuộc mặt phẳng nằm ngang nên các cột vuông góc với sân. Vậy A, B, C, D tương ứng là hình chiếu của M, N, P, Q trên sân. Do đó AC, BD tương ứng là hình chiếu của MP, NQ trên sân.

b) Nếu $BD \perp AC$, mà AC là hình chiếu của MP trên sân và BD thuộc sân nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $BD \perp MP$.

c) Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các đoạn thẳng AC, BD có chung trung điểm O. Do EO là đường trung bình của hình thang $ACPM$ nên $EO // MA$. Mặt khác, MA vuông góc với sân nên EO cũng vuông góc với sân. Vậy O là hình chiếu của E trên sân. Tương tự, O cũng là hình chiếu của F trên sân. Vậy E và F có cùng hình chiếu trên sân.

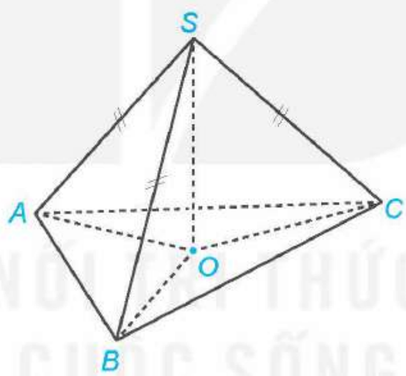
Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) (H.7.36).

a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).



Hình 7.36

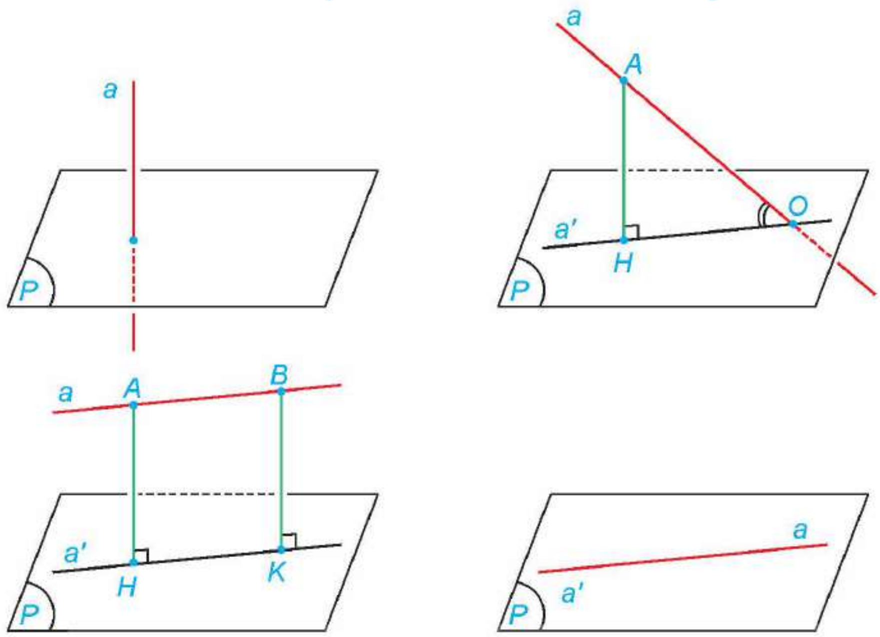
2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

HĐ3. Một máy bay giữ vận tốc không đổi, với độ lớn 240 km/h trong suốt 2 phút đầu kể từ khi cất cánh. Hỏi thông tin trên có đủ để ta xác định độ cao của máy bay so với mặt đất phẳng, tại thời điểm 1 phút kể từ khi máy bay cất cánh không?

Hình 7.37

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°.

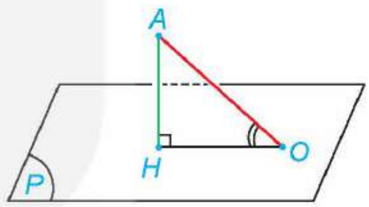
Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Hình 7.38

Chú ý. Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$.

Nhận xét. Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P). Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P), O không trùng H. Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH (H.7.39).



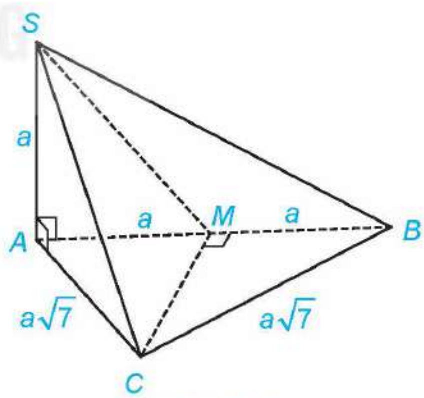
Hình 7.39

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $CA = CB = a\sqrt{7}$, $AB = 2a$.

a) Gọi α là góc giữa SB và (ABC). Tính $\tan\alpha$.

b) Tính góc giữa SC và (SAB).

Giải. (H.7.40)



Hình 7.40

a) Do $SA \perp (ABC)$ nên $\alpha = \widehat{SBA}$. Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\tan\alpha = \tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

b) Gọi M là trung điểm của AB. Tam giác ABC cân tại C nên $CM \perp AB$.

Mặt khác, từ $SA \perp (ABC)$ ta có $CM \perp SA$. Do đó $CM \perp (SAB)$.

Vậy góc giữa SC và (SAB) bằng $\widehat{CSM}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 7a^2} = a\sqrt{8}$.

Ta có $AM = \frac{1}{2}AB = a$. Do đó, tam giác SAM vuông cân tại A và $SM = a\sqrt{2}$.

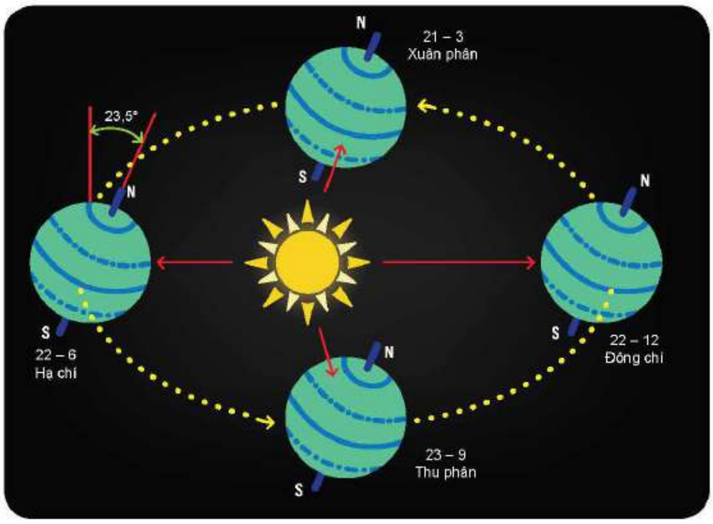
Tam giác CMS vuông tại M và $\cos\widehat{CSM} = \frac{SM}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{CSM} = 60^\circ$ và do đó góc giữa SC và (SAB) bằng 60°.

Vận dụng. Tâm Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Trong quá trình chuyển động, Trái Đất lại quay quanh trục Bắc Nam. Trục này có phương không đổi và luôn tạo với mặt phẳng chứa quỹ đạo một góc khoảng 66,5°. (Theo *nationalgeographic.org*).

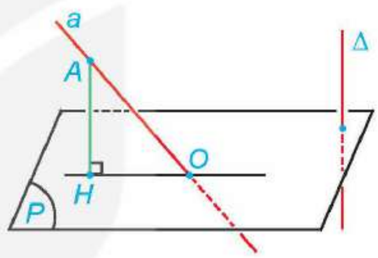
a) Giải thích vì sao hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo (P) cũng có phương không đổi.

b) Giải thích vì sao có hai thời điểm trong năm mà tại đó hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng (P) thuộc đường thẳng nối tâm Mặt Trời và tâm Trái Đất.



Hình 7.41

Khám phá. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó, với một đường thẳng a bất kì, góc giữa a và (P) có mối quan hệ gì với góc giữa a và Δ?



Hình 7.42

Trải nghiệm. Đo góc giữa một sợi dây kéo căng và mặt bàn hoặc sàn lớp học. (Có thể cho một đầu sợi dây thuộc mặt bàn, mặt sàn để thuận tiện hơn cho việc đo.)

BÀI TẬP

7.10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

a) Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC).

b) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC).

c) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB).

7.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAC).

c) Tìm hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC).

7.12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $SA = AB = BC = a$.

a) Xác định hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

7.13. Cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P), có hình chiếu H trên (P). Với mỗi điểm M bất kì (không trùng H) trên mặt phẳng (P), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu trên (P) của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên SM và SM' bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu HM và HM' tương ứng của chúng bằng nhau;

b) Đường xiên SM lớn hơn đường xiên SM' nếu hình chiếu HM lớn hơn hình chiếu HM'.

7.14. Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. *Góc cất cánh* của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là $10°$, $15°$. Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

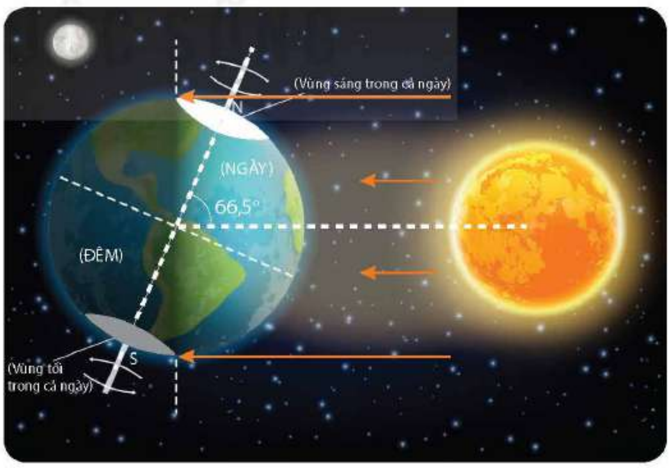
Chú ý. Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

7.15. Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

Chú ý. Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

Em có biết?

Hai thời điểm được đề cập ở phần b trong Vận dụng ở trang 42 thuộc các ngày 22 tháng 6 và 22 tháng 12 trong năm (theo *nationalgeographic.org*), chúng tương ứng với thời điểm cực Bắc của Trái Đất nghiêng về phía Mặt Trời và thời điểm cực Nam của Trái Đất nghiêng về phía Mặt Trời như được mô tả trong Hình 7.43.



Hình 7.43

Trong cả ngày 22 tháng 6 của năm, hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo (P) gần như chính là đường thẳng Δ nối giữa tâm Trái Đất, tâm Mặt Trời và cực Bắc của Trái Đất nghiêng về phía Mặt Trời (H.7.43). Do đó, góc giữa trục Trái Đất và đường nối hai tâm xấp xỉ bằng $66,5°$. Mặt khác, Mặt Trời chiếu sáng nửa Trái Đất được cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Δ. Vì vậy, trong cả ngày 22 tháng 6, mặc dù Trái Đất quay quanh trục và di chuyển trên quỹ đạo, nhưng gần như toàn bộ vùng có vĩ độ Bắc lớn hơn $66,5°$ (phía bắc vòng Bắc Cực) luôn được Mặt Trời chiếu sáng. Điều này giúp em trả lời được câu hỏi trong phần mở đầu bài học này. Ta cũng có điều tương tự đối với vùng có vĩ độ lớn hơn $66,5°$ (phía nam vùng Nam Cực) trong ngày 22 tháng 12.

Bài 25 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

THUẬT NGỮ

- Góc giữa hai mặt phẳng
- Hai mặt phẳng vuông góc
- Góc nhị diện
- Góc phẳng của góc nhị diện
- Hình lăng trụ đứng
- Hình lăng trụ đều
- Hình hộp đứng
- Hình chóp đều
- Hình chóp cụt đều

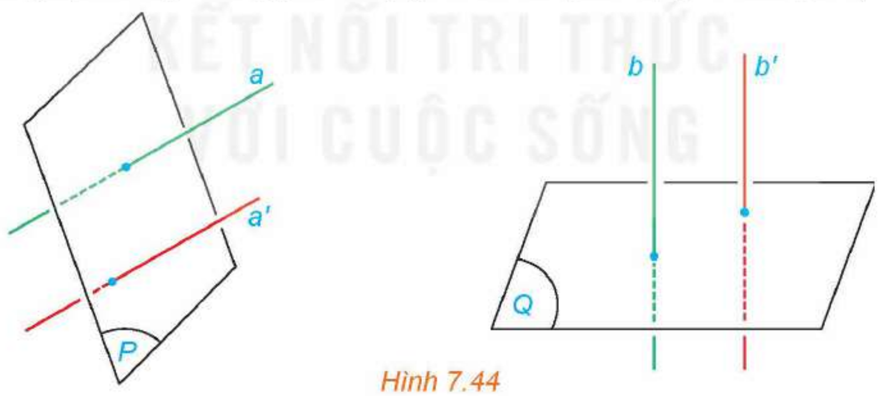
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc.
- Xác định điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.
- Giải thích tính chất cơ bản của hai mặt phẳng vuông góc.
- Nhận biết góc phẳng của góc nhị diện, tính góc phẳng nhị diện trong một số trường hợp đơn giản.
- Giải thích tính chất cơ bản của hình chóp đều, hình lăng trụ đứng (và các trường hợp đặc biệt của nó).
- Vận dụng kiến thức của bài học để mô tả một số hình ảnh thực tế.

Ta có thể gắn cho mỗi vị trí trên Trái Đất một cặp số, được gọi là vĩ độ và kinh độ. Mỗi vị trí trên Trái Đất hoàn toàn xác định khi biết vĩ độ và kinh độ của nó. Sau bài học này, ta có thể hiểu và diễn đạt chính xác các khái niệm đó.

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy hai đường thẳng a, a' cùng vuông góc với (P), hai đường thẳng b, b' cùng vuông góc với (Q). Tìm mối quan hệ giữa các góc (a, b) và (a', b').



Hình 7.44

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với (P), (Q). Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Chú ý. Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

? Góc giữa hai mặt phẳng bằng 0° khi nào, khác 0° khi nào?

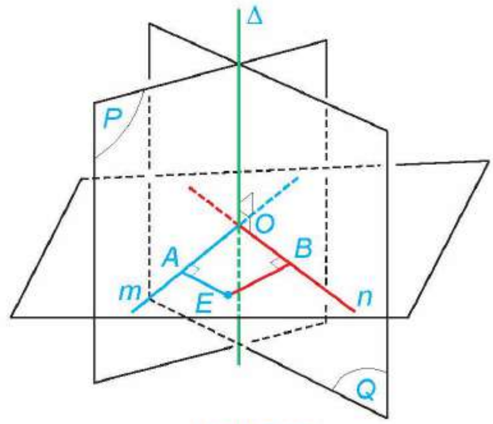
Ví dụ 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy một điểm O bất kì thuộc đường thẳng Δ. Gọi m, n là các đường thẳng đi qua O, tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với Δ. Chứng minh rằng góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n.

Giải. (H.7.45)

Trong mặt phẳng chứa m, n, lấy một điểm E không thuộc các đường thẳng m, n. Gọi A, B tương ứng là hình chiếu của E trên m, n. Khi đó Δ vuông góc với các đường thẳng EA, EB.

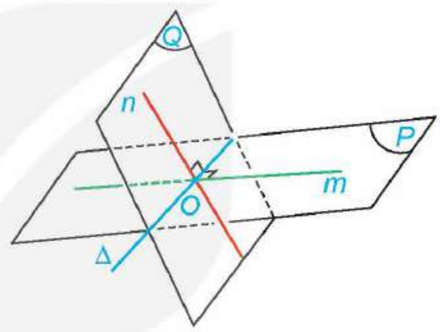
Do $EA \perp m$, $EA \perp \Delta$ nên $EA \perp (P)$. Tương tự, $EB \perp (Q)$. Do đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa EA và EB.

Do $\widehat{OAE} = 90° = \widehat{OBE}$ nên bốn điểm O, A, E, B thuộc một đường tròn. Do đó, $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AEB}$ bằng hoặc bù nhau, tức là $(EA, EB) = (m, n)$. Vậy góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n.



Hình 7.45

Nhận xét. (H.7.46) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai đường thẳng m, n tương ứng thuộc (P), (Q) và cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ, cắt (P), (Q) tương ứng theo các giao tuyến m, n). Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n. Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n.



Hình 7.46

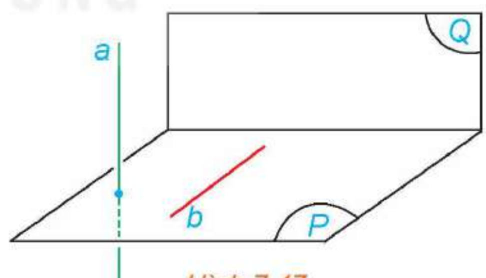
Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình vuông.

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ2. Cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (Q). Lấy một đường thẳng a vuông góc với (P) (H.7.47).

a) Tính góc giữa a và b.

b) Tính góc giữa (P) và (Q).



Hình 7.47

> Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với OB và OC. Chứng minh rằng các mặt phẳng (OAB) và (OAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Giải

Do OA vuông góc với OB và OC nên $OA \perp (OBC)$. Mặt khác, các mặt phẳng (OAB), (OAC) chứa OA. Do đó chúng cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

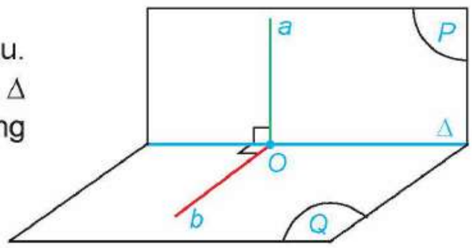
Luyện tập 2. Trong HĐ1 của Bài 23, ta đã nhận ra rằng đường thẳng nối các bản lề của cửa phòng vuông góc với sàn nhà. Hãy giải thích vì sao trong quá trình đóng – mở, cánh cửa luôn vuông góc với sàn nhà.

3. TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Kẻ đường thẳng a thuộc (P) và vuông góc với giao tuyến Δ của (P) và (Q). Gọi O là giao điểm của a và Δ. Trong mặt phẳng (Q), gọi b là đường thẳng vuông góc với Δ tại O.

a) Tính góc giữa a và b.

b) Tìm mối quan hệ giữa a và (Q).



Hình 7.48

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

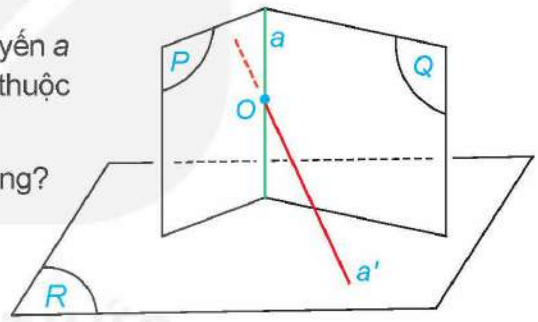
Nhận xét. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P).

HĐ4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến a và cùng vuông góc với mặt phẳng (R). Gọi O là một điểm thuộc a và a' là đường thẳng qua O và vuông góc với (R).

a) Hỏi a' có nằm trong các mặt phẳng (P), (Q) hay không?

b) Tìm mối quan hệ giữa a và a'.

c) Tìm mối quan hệ giữa a và (R).



Hình 7.49

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', C', D' tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SC, SD. Chứng minh rằng:

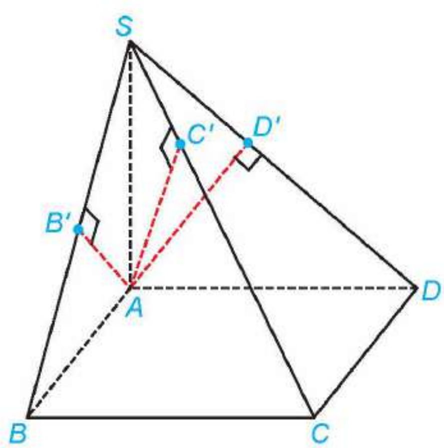
a) $(SBC) \perp (SAB)$, $AB' \perp (SBC)$, $AD' \perp (SCD)$.

b) Các điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải. (H.7.50)

a) Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Do đó, $(SBC) \perp (SAB)$. Đường thẳng AB' thuộc (SAB) và vuông góc với SB nên $AB' \perp (SBC)$. Tương tự $AD' \perp (SCD)$.

b) Từ câu a ta có $AB' \perp SC$, $AD' \perp SC$. Các đường thẳng AB', AC', AD' cùng đi qua A và vuông góc với SC nên cùng thuộc một mặt phẳng. Do đó bốn điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.



Hình 7.50

Luyện tập 3. Với giả thiết như ở Ví dụ 3, chứng minh rằng:

a) Các mặt phẳng $(AB'C'D')$ và $(ABCD)$ cùng vuông góc với (SAC);

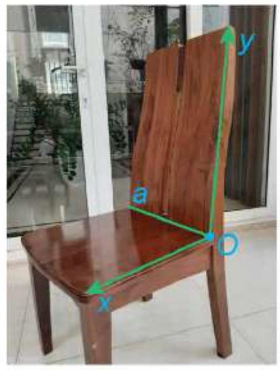
b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C'D')$ và $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và vuông góc với AC.

4. GÓC NHỊ DIỆN

HĐ5. Một tài liệu hướng dẫn rằng đối với ghế bàn ăn, nên thiết kế lưng ghế tạo với mặt ghế một góc có số đo từ 100° đến 105°. Trong Hình 7.51, các tia Ox, Oy được vẽ tương ứng trên mặt ghế, lưng ghế đồng thời vuông góc với giao tuyến a của mặt ghế và lưng ghế.

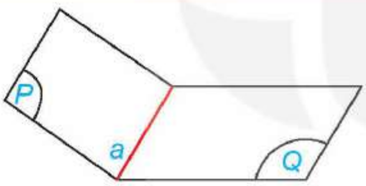
a) Theo tài liệu nói trên, góc nào trong hình nên có số đo từ 100° đến 105°?

b) Nếu thiết kế theo hướng dẫn đó thì góc giữa mặt phẳng chứa mặt ghế và mặt phẳng chứa lưng ghế có thể nhận số đo từ bao nhiêu đến bao nhiêu độ?



Hình 7.51

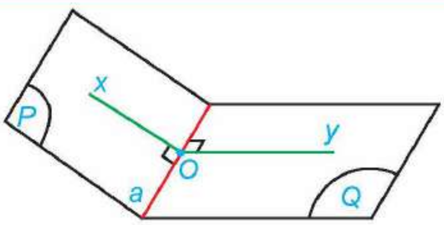
Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một **góc nhị diện**, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.



Hình 7.52

Mỗi đường thẳng a trong một mặt phẳng chia mặt phẳng thành hai phần, mỗi phần cùng với a là một nửa mặt phẳng bờ a.

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một **góc phẳng của góc nhị diện** $[P, a, Q]$ (gọi tắt là **góc phẳng nhị diện**). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



Hình 7.53

Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện xOy của $[P, a, Q]$ vuông góc với cạnh a.

Chú ý

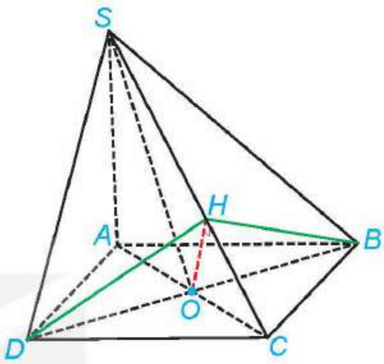
- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a, $AC = a$, $SA = \frac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B, SA, D]$; $[S, BD, A]$; $[S, BD, C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Giải. (H.7.54)



Hình 7.54

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$. Hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $AC = a$ nên các tam giác ABC, ACD đều. Do đó $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 120°.

Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Vậy AC và SO vuông góc với BD. Suy ra $\widehat{AOS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$ và $\widehat{COS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Tam giác SAO vuông tại A và có $SA = \frac{1}{2}a = AO$ nên $\widehat{AOS} = 45^\circ$. Suy ra $\widehat{COS} = 180^\circ - \widehat{AOS} = 135^\circ$.

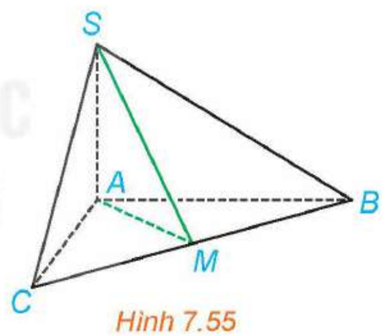
Vậy các góc nhị diện $[S, BD, A]$, $[S, BD, C]$ tương ứng có số đo là 45°, 135°.

b) Theo chứng minh trên, $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Mặt khác, $OH \perp SC$ nên $SC \perp (BHD)$. Do đó, $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Luyện tập 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $SA = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Gọi M là trung điểm của BC.

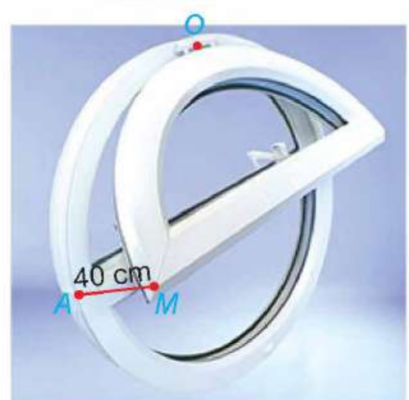
a) Chứng minh rằng $\widehat{SMA}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.



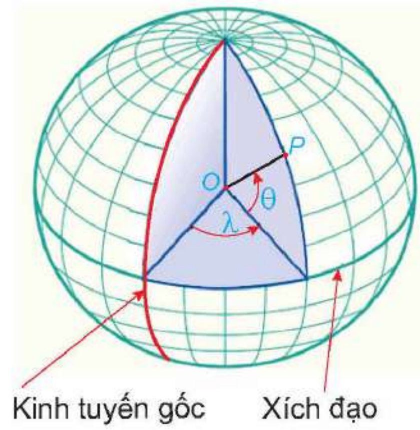
Hình 7.55

Vận dụng 1. Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính 80 cm, bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d = 40$ cm.



Hình 7.56

Trở lại vấn đề được nêu ở đầu bài học. Trên Trái Đất, mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn có đường kính là trục của Trái Đất (đoạn thẳng nối cực Bắc và cực Nam). Kinh tuyến gốc là kinh tuyến đi qua Đài Thiên văn Greenwich ở London. Mặt phẳng chứa kinh tuyến gốc chia Trái Đất làm hai nửa là Đông và Tây, nước ta nằm ở nửa Đông. Kinh độ của một điểm P trên Trái Đất là số đo của góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa kinh tuyến gốc và kinh tuyến đi qua *P* (cạnh của góc nhị diện này là trục Trái Đất). Do đó, các điểm trên cùng kinh tuyến thì có cùng kinh độ. Vĩ độ của điểm *P* là số đo của góc giữa mặt phẳng chứa đường xích đạo và đường thẳng nối *P* với tâm Trái Đất. Mỗi điểm trên Trái Đất sẽ thuộc một trong hai bán cầu Bắc hoặc Nam và thuộc nửa Đông hay nửa Tây. Vì vậy, đi kèm số đo vĩ độ còn có chữ *E* hoặc *W* nếu vị trí đó tương ứng thuộc nửa Đông, nửa Tây, và có chữ *N*, *S* nếu vị trí đó tương ứng ở bán cầu Bắc, bán cầu Nam. Chẳng hạn, Bia Chủ quyền đảo Song Tử Tây thuộc xã Song Tử Tây, huyện Hoàng Sa, tỉnh Khánh Hoà, có vị trí: 11°25'55"*N*, 114°8'00"*E*. (Theo *baokhanhhoa.vn*).



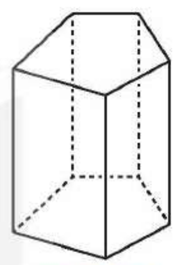
Hình 7.57

5. MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

Trong chương IV, ta đã biết khái niệm hình lăng trụ. Với các kiến thức về quan hệ vuông góc, ta có thể định nghĩa một số hình lăng trụ đặc biệt sau đây.

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.



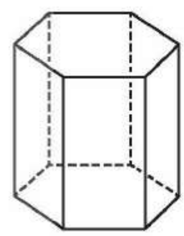
Hình 7.58

HĐ6. Các mặt bên của lăng trụ đứng là các hình gì và các mặt bên đó có vuông góc với mặt đáy không? Vì sao?

Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.



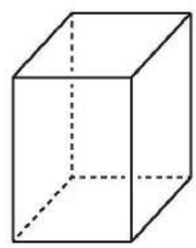
Hình 7.59

HĐ7. Các mặt bên của hình lăng trụ đều có phải là các hình chữ nhật có cùng kích thước hay không? Vì sao?

Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành.



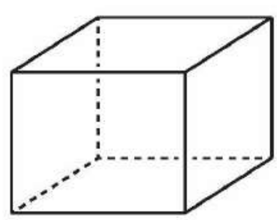
Hình 7.60

HĐ8. Trong 6 mặt của hình hộp đứng, có ít nhất bao nhiêu mặt là hình chữ nhật? Vì sao?

Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.

d) Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



Hình 7.61

HĐ9

a) Hình hộp chữ nhật có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật? Vì sao?

b) Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường hay không? Vì sao?

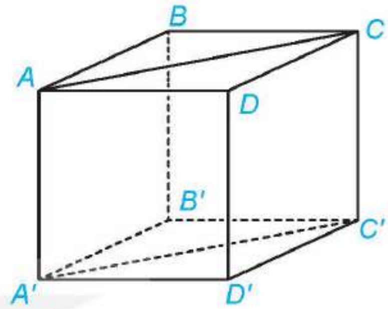
Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $ACC'A'$ là một hình chữ nhật.

Giải. (H.7.62)

Ta có $AA' = CC'$ và $AA' \parallel CC'$ (vì AA', CC' cùng bằng và cùng song song với DD'). Do đó $ACC'A'$ là một hình bình hành.

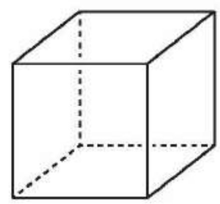
Mặt khác, $AA' \perp (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp A'C'$. Do đó $ACC'A'$ là một hình chữ nhật.



Hình 7.62

e) Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.



Hình 7.63

HĐ10. Các mặt của một hình lập phương là các hình gì? Vì sao?

Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.

Chú ý. Khi đáy của hình lăng trụ đứng (đều) là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... đôi khi ta cũng tương ứng gọi rõ là hình lăng trụ đứng (đều) tam giác, tứ giác, ngũ giác,...

Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'BD$ là tam giác đều.

Giải. (H.7.64)

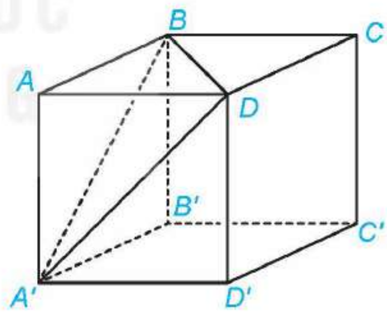
Gọi a là độ dài các cạnh của hình lập phương. Do các mặt của hình lập phương là các hình vuông nên

$$A'D=\sqrt{AA'^2+AD^2}=a\sqrt{2};$$

$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2};$$

$$A'B=\sqrt{AA'+AB^2}=a\sqrt{2}.$$

Tam giác $A'BD$ có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều.



Hình 7.64

Vận dụng 2. Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắn các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.

Hình 7.65

6. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

HĐ11. Tháp lớn tại Bảo tàng Louvre ở Paris (H.7.66) (với kết cấu kính và kim loại) có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh bằng 34 m, các cạnh bên bằng nhau và có độ dài xấp xỉ 32,3 m (theo *Wikipedia.org*).

Giải thích vì sao hình chiếu của đỉnh trên đáy là tâm của đáy tháp.

Hình 7.66

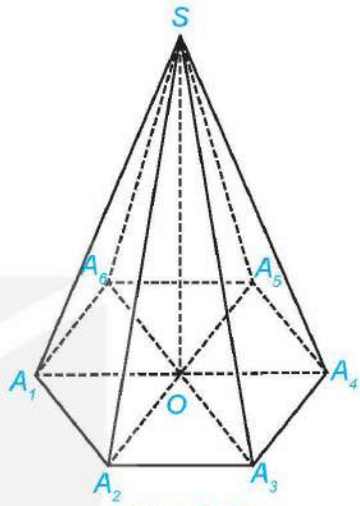
> Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý. Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều,... đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là hình chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều,...

HĐ12. Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ (H.7.67).

a) Trong trường hợp hình chóp đã cho là đều, vị trí của điểm O có gì đặc biệt đối với đa giác đều $A_1A_2...A_n$?

b) Nếu đa giác $A_1A_2...A_n$ là đều và O là tâm của đa giác đó thì hình chóp đã cho có gì đặc biệt?



Hình 7.67

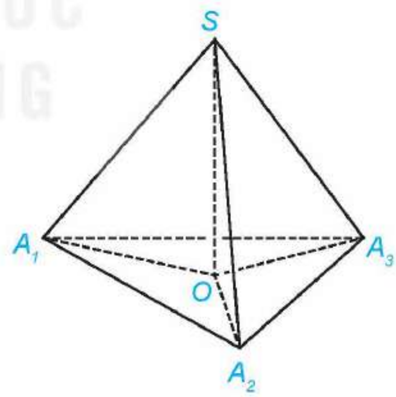
> Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Giải. (H.7.68)

Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy.

Giả sử hình chóp là đều, khi đó O là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Các tam giác SOA_1 $SOA_2,...,SOA_n$ đều vuông tại O, có chung cạnh SO và có các cạnh $OA_1, OA_2,...,OA_n$ bằng nhau, do đó chúng bằng nhau. Vậy $\widehat{SA_1O} = \widehat{SA_2O} = \cdots = \widehat{SA_nO}$, tức là các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.



Hình 7.68

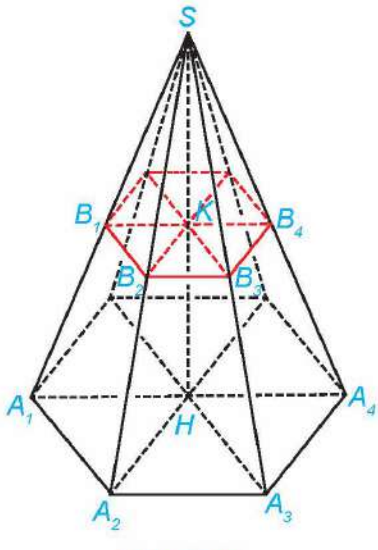
Ngược lại, giả sử hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Khi đó, $\widehat{SA_1O} = \widehat{SA_2O} = \cdots = \widehat{SA_nO}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông SOA_1, $SOA_2,...,SOA_n$ bằng nhau. Do đó, $SA_1 = SA_2 = \cdots = SA_n$. Mặt khác, $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều, do đó $S.A_1A_2...A_n$ là hình chóp đều.

Luyện tập 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{\frac{5}{12}}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

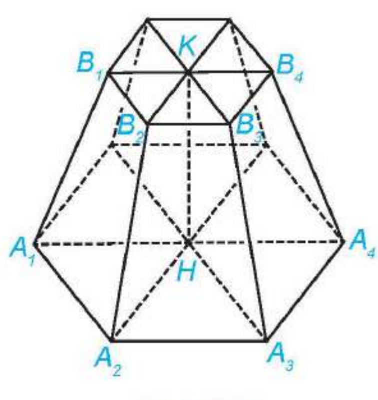
HĐ13. Cho hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng không đi qua S và song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ tương ứng tại $B_1, B_2, ..., B_n$ (H.7.69).

a) Giải thích vì sao $S.B_1B_2...B_n$ là một hình chóp đều.

b) Gọi H là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Chứng minh rằng đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1B_2...B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$, $(B_1B_2...B_n)$.



Hình 7.69



Hình 7.70

- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trong HĐ13 được gọi là một hình chóp cụt đều (nói đơn giản là hình chóp cụt đều được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi hình chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ (H.7.70).
- Các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cụt đều. Các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cụt đều.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cụt đều.

? Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau hay không?

Ví dụ 8. Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều ABC, $A'B'C'$ có cạnh tương ứng là a, a' ($a > a'$). Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt đều.

Giải. (H.7.71)

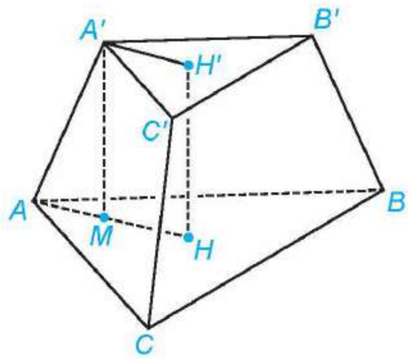
Gọi H, H' tương ứng là tâm của các tam giác ABC, $A'B'C'$.

Khi đó, HH' vuông góc với hai đáy của hình chóp cụt đều.

Trong tam giác đều ABC, ta có $HA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $H'A' = \frac{a'}{\sqrt{3}}$.

Hình thang $AHH'A'$ vuông tại H và H'. Kẻ $A'M \perp HA$ ($M \in HA$).



Hình 7.71

Ta có $AA' = \sqrt{A'M^2 + MA^2} = \sqrt{H'H^2 + (HA - H'A')^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{a'}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-a')^2}{3}}$.

Vậy các cạnh bên của hình chóp cụt đều có độ dài bằng $\sqrt{h^2 + \frac{(a-a')^2}{3}}$.

BÀI TẬP

7.16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

7.17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C']$, $[A, BD, C']$.

7.18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC'.

7.19. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

7.20. Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4{,}8\,\text{m}$; $OA = 2{,}8\,\text{m}$; $OB = 4\,\text{m}$.

a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. *Lưu ý:* Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là 0,5 m. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Hình 7.72

7.21. Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 26 KHOẢNG CÁCH

THUẬT NGỮ

- Khoảng cách
- Chiều cao của hình chóp, hình lăng trụ
- Đường vuông góc chung

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Xác định khoảng cách giữa các đối tượng điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.
- Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau trong các trường hợp đơn giản.
- Vận dụng kiến thức về khoảng cách vào một số tình huống thực tế.

Khoảng cách là khái niệm được dùng trong nhiều lĩnh vực của đời sống. Trong bài học này ta tìm hiểu về khoảng cách giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

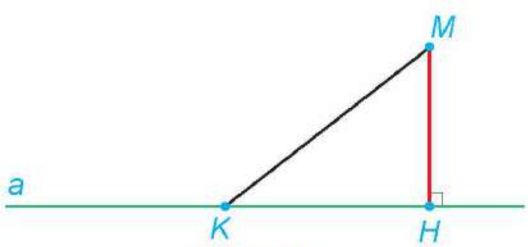
Hình 7.73. Các đầu phun nước chữa cháy sprinkler cần được lắp đặt theo tiêu chuẩn kĩ thuật, trong đó có tiêu chuẩn về khoảng cách tới từng loại trần, tường, nhà.

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

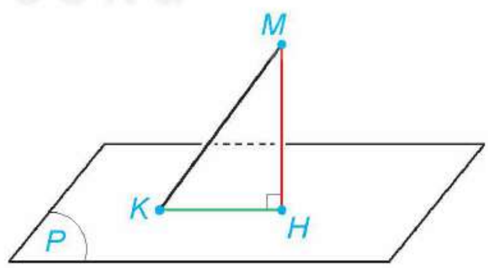
HĐ1

a) Cho điểm M và đường thẳng a. Gọi H là hình chiếu của M trên a. Với mỗi điểm K thuộc a, giải thích vì sao $MK \geq MH$ (H.7.74).

b) Cho điểm M và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của M trên (P). Với mỗi điểm K thuộc (P), giải thích vì sao $MK \geq MH$ (H.7.75).



Hình 7.74



Hình 7.75

- **Khoảng cách** từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a.
- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P), kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P).

Chú ý. $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

Nhận xét. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Chú ý. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

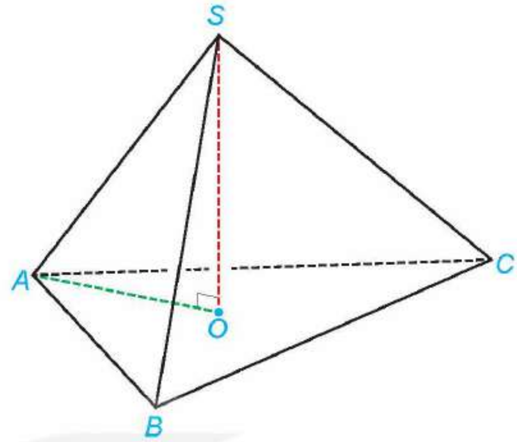
Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a, b ($a < b\sqrt{3}$). Tính chiều cao của hình chóp.

Giải. (H.7.76)

Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC. Trong tam giác đều ABC, ta có $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Trong tam giác vuông SOA, ta có

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Vậy chiều cao của hình chóp là $SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

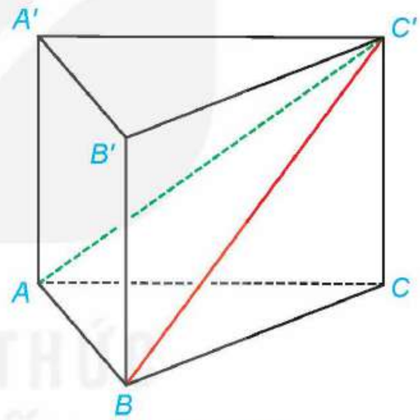


Hình 7.76

Luyện tập 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a, AA' = h$ (H.7.77).

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tam giác ABC' là tam giác gì? Tính khoảng cách từ A đến BC'.

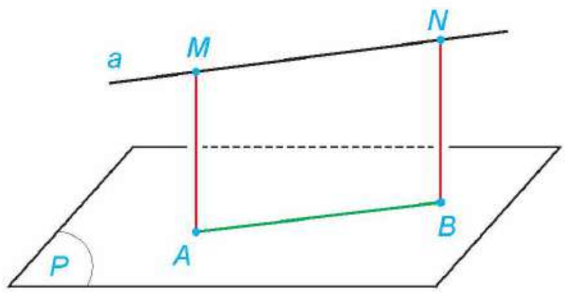


Hình 7.77

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

HĐ2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Lấy hai điểm M, N bất kì thuộc a và gọi A, B tương ứng là các hình chiếu của chúng trên (P) (H.7.78).

Giải thích vì sao $ABNM$ là một hình chữ nhật và M, N có cùng khoảng cách đến (P).

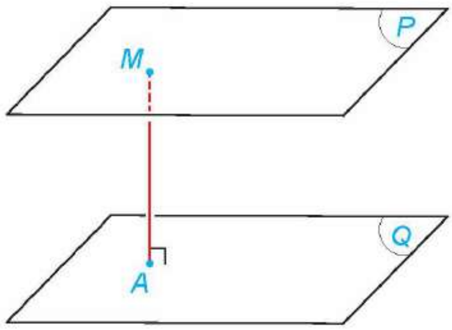


Hình 7.78

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu d(a, (P)), là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).

HĐ3. a) Cho hai đường thẳng m và n song song với nhau. Khi một điểm M thay đổi trên m thì khoảng cách từ nó đến đường thẳng n có thay đổi hay không?

b) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) và một điểm M thay đổi trên (P) (H.7.79). Hỏi khoảng cách từ M đến (Q) thay đổi thế nào khi M thay đổi?



Hình 7.79

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

? Nếu đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với (P) thì giữa $d(a, (Q))$ và $d((P), (Q))$ có mối quan hệ gì?

Chú ý. Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là **chiều cao của hình lăng trụ** đó.

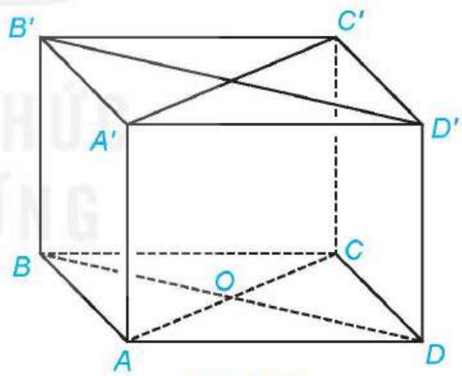
Ví dụ 2. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 120°$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

Giải. (H.7.80)

Đường thẳng $A'C'$ thuộc mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên nó song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $A'A \perp (ABCD)$.

Vậy $d(A'C', (ABCD)) = d(A', (ABCD)) = A'A = h$.

Do AA' song song với BB' nên AA' song song với $(BDD'B')$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Do $AO \perp BD$ và $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$. Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng AO.



Hình 7.80

Tam giác BAD cân tại A và có $\widehat{BAD} = 120°$ nên $\widehat{ABO} = 30°$.

Do đó, trong tam giác vuông AOB, ta có $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

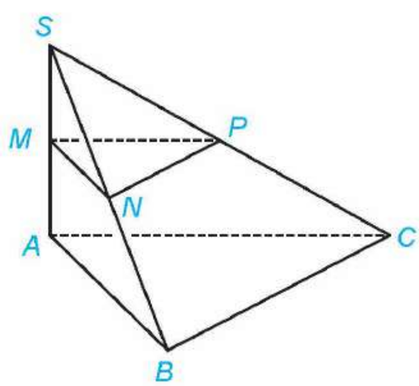
Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng $\frac{a}{2}$.

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = h$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Tính $d((MNP), (ABC))$ và $d(NP, (ABC))$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$.

Tính $d(A, (SBC))$.



Hình 7.81

Vận dụng. Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung khống chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28 m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21 m đi qua hay không?

Hình 7.82. Tại đầu một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung khống chế chiều cao.

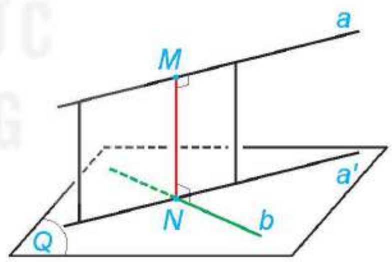
3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

HĐ4. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng b và song song với a. Hình chiếu a' của a trên (Q) cắt b tại N. Gọi M là hình chiếu của N trên a (H.7.83).

a) Mặt phẳng chứa a và a' có vuông góc với (Q) hay không?

b) Đường thẳng MN có vuông góc với cả hai đường thẳng a và b hay không?

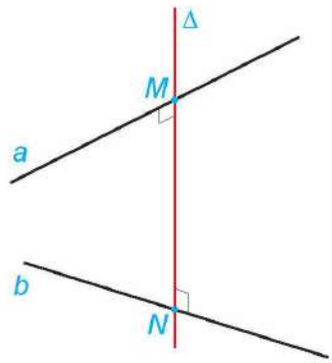
c) Nêu mối quan hệ của khoảng cách giữa a, (Q) và độ dài đoạn thẳng MN.



Hình 7.83

Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b.

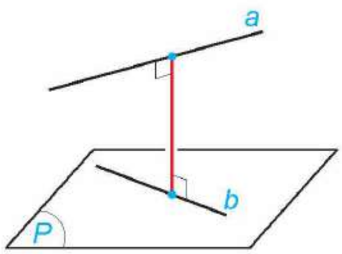
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là **khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau** a, b.



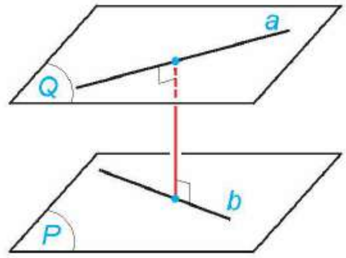
Hình 7.84

Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại (H.7.85).
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



Hình 7.85



Hình 7.86

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

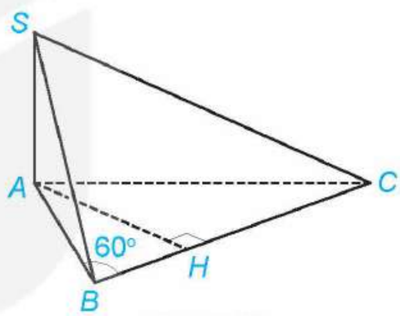
Giải. (H.7.87)

Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tam giác ABH vuông tại H và có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 60^\circ$ nên $BH = \frac{a}{2}$.

Do SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên AH là đường vuông góc chung của SA và BC (H thuộc tia BC và $BH = \frac{a}{2}$).

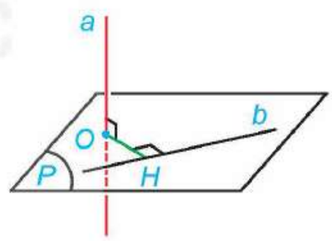
Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là

$$d(SA, BC) = AH = AB \cdot \sin\widehat{ABH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 7.87

Khám phá. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tại O. Cho đường thẳng b thuộc mặt phẳng (P). Hãy tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa a, b và khoảng cách từ O đến b (H.7.88).



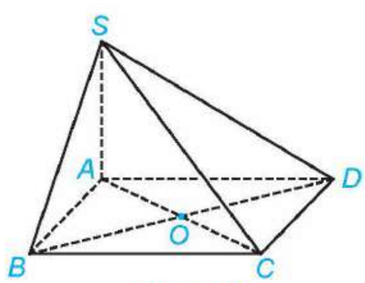
Hình 7.88

Luyện tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.



Hình 7.89

Thảo luận. Khoảng cách giữa hai hình được nêu trong bài học (điểm, đường thẳng, mặt phẳng) là khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm thuộc hình này và một điểm thuộc hình kia. Hãy thảo luận để làm rõ nhận xét này.

BÀI TẬP

7.22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$.

a) Tính chiều cao của hình chóp.

b) Tính khoảng cách giữa BC và (SAD).

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD.

7.23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = b$, $BC = c$.

a) Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'D'D)$.

b) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$.

7.24. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng:

a) MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.

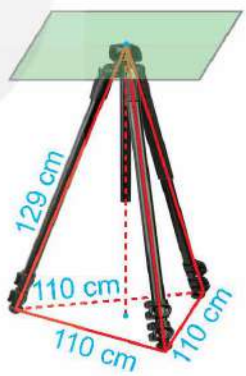
7.25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A')$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.

b) Xác định các giao điểm E, F của DB' với $(D'AC)$, $(BC'A')$. Tính $d((D'AC), (BC'A'))$.

7.26. Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129 cm.

7.27. Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.



Hình 7.90

Em có biết?

Vì sao vùng phía bắc chí tuyến Bắc và vùng phía nam chí tuyến Nam tia sáng mặt trời không bao giờ vuông góc với mặt đất (tức là, không xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại đó)? (Theo *nationalgeographic.com*) (H.7.91a).

Tia sáng mặt trời chỉ vuông góc với mặt đất (tức là có hướng đi qua tâm Trái Đất) tại vị trí P_O trên mặt đất thuộc đoạn thẳng nối tâm O của Trái Đất và tâm I của Mặt Trời (H.7.91b).

Đường thẳng OI thuộc mặt phẳng chứa quỹ đạo của Trái Đất và trục quay SN (Bắc – Nam) của Trái Đất luôn tạo với mặt phẳng đó một góc khoảng $66,5°$. Từ đó ta có thể rút ra $\widehat{NOI} \geq 66,5°$.

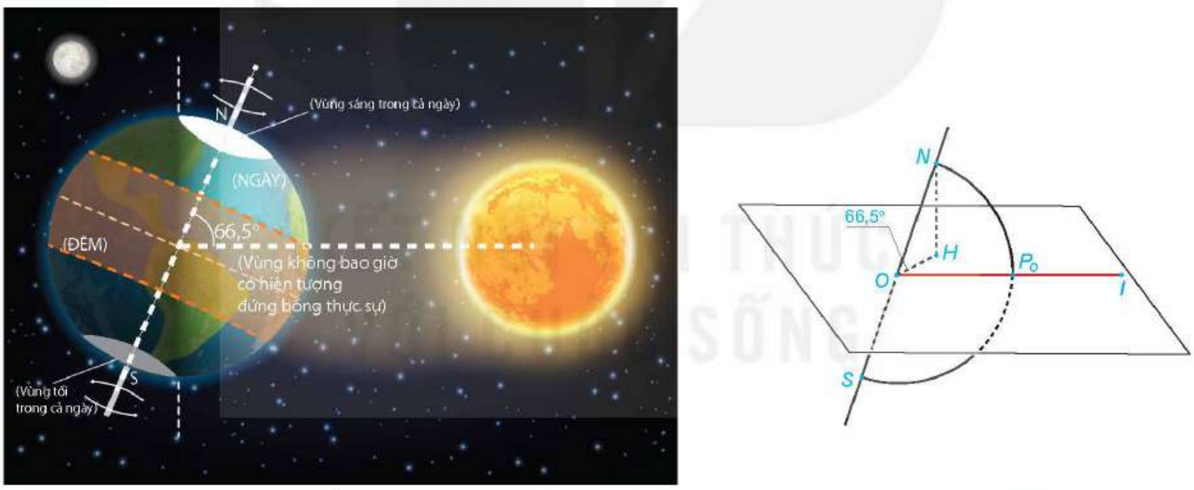
Mỗi vị trí P thuộc vùng phía bắc chí tuyến Bắc đều có vĩ độ bắc $\varphi > 23,5°$, tức là $\widehat{NOP} = 90° - \varphi < 66,5°$. Để ý rằng ON vuông góc với mặt phẳng xích đạo, nên OP tạo với mặt phẳng xích đạo và đường thẳng ON hai góc phụ nhau.

Mặt khác, nếu xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự ở vị trí P thì điểm P thuộc đoạn thẳng OI và do đó $\widehat{NOP} = \widehat{NOI} \geq 66,5°$. Điều này dẫn tới mâu thuẫn. Do đó, không thể xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại P.

Trong mô hình toán học được đề cập ở trên, chúng ta thấy, tại mỗi thời điểm, chỉ có thể xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại một vị trí (đó là tại vị trí P_O trên mặt đất và thuộc đoạn thẳng OI), do đó, nhìn chung ngay cả ở các vị trí thuộc vùng giữa hai đường chí tuyến Bắc, Nam (có vĩ độ nhỏ hơn 66,5°), trong một năm cũng rất hiếm khi xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự.

Tuy vậy, hiện tượng đứng bóng tại một vị trí trên mặt đất được hiểu theo nghĩa rộng hơn; đó là hiện tượng tia sáng mặt trời chiếu trực diện tới Trái Đất tại vị trí đó. Nó xảy ra khi đường kinh tuyến đi qua vị trí đó và tâm I của Mặt Trời cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ NS. Như vậy, tại mỗi vị trí trên mặt đất, mỗi ngày đều xảy ra hiện tượng đứng bóng. Các vị trí thuộc cùng một kinh tuyến thì xảy ra hiện tượng đứng bóng tại cùng một thời điểm, gọi là giữa trưa (trong khoảng 12 giờ trưa cộng, trừ 16 phút).

Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí lúc giữa trưa được gọi là góc Mặt Trời (như đã phân tích ở trên, nhìn chung, góc này nhọn). Góc Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn vào mùa hè, góc Mặt Trời lớn nên nhiệt độ cao.



a) b)

Hình 7.91

Bài 27 THỂ TÍCH

THUẬT NGỮ

- Thể tích khối hộp
- Thể tích khối lăng trụ
- Thể tích khối chóp
- Thể tích khối chóp cụt đều

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp, khối chóp cụt đều.
- Tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp, khối chóp cụt đều trong một số tình huống đơn giản.
- Vận dụng kiến thức, kĩ năng về thể tích vào một số bài toán thực tế.

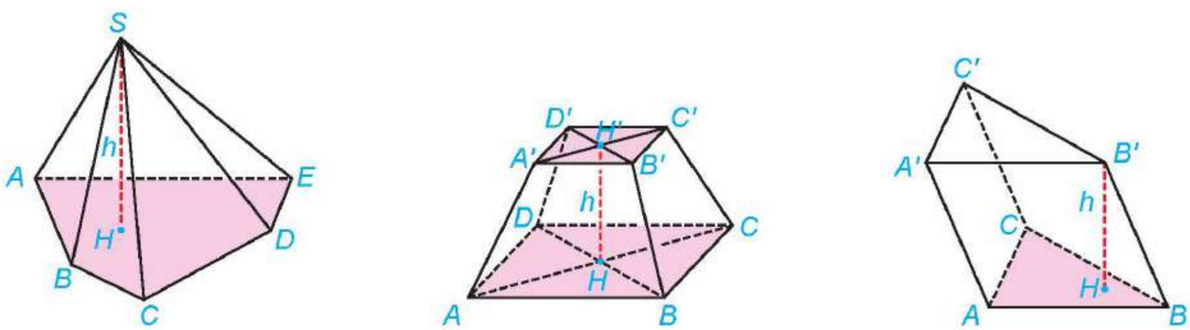
Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.

HĐ1. Khi mua máy điều hoà, bác An được hướng dẫn rằng mỗi mét khối của phòng cần công suất điều hoà khoảng 200 BTU. Căn phòng bác An cần lắp máy có dạng hình hộp chữ nhật, rộng 4 m, dài 5 m và cao 3 m. Hỏi bác An cần mua loại điều hoà có công suất bao nhiêu BTU?

Hình 7.92

Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.
- Thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn S, diện tích đáy bé S' và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot \left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'}\right) \cdot h$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = S \cdot h$.



$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3} \cdot \left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'}\right) \cdot h$ $\qquad$ $V = S \cdot h$

Hình 7.93

Nhận xét

- Thể tích của khối tứ diện bằng một phần ba tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối tứ diện ứng với mặt đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

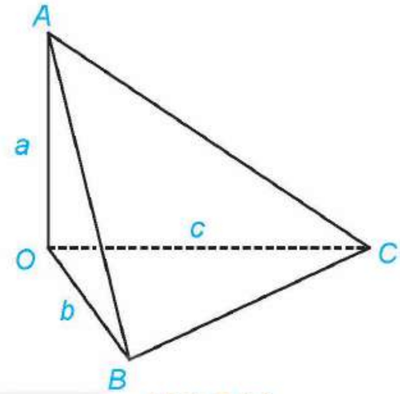
Ví dụ 1. Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Giải. (H.7.94)

Tam giác vuông OBC có diện tích là $S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$.

OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) nên tứ diện $OABC$ có chiều cao ứng với đỉnh A bằng OA.

Vậy thể tích của khối tứ diện là $V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{OBC} \cdot AO = \frac{1}{6}abc$.



Hình 7.94

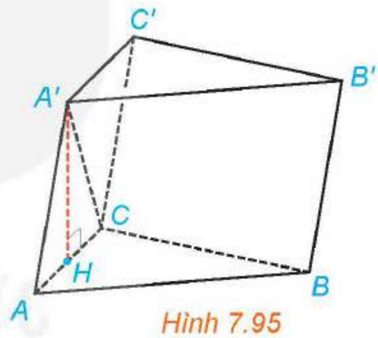
Luyện tập 1. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối chóp.

Ví dụ 2. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a, mặt $(ACC'A')$ vuông góc với hai mặt đáy, tam giác $A'AC$ cân tại A và $AA' = b$ $(a < 2b)$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải. (H.7.95)

Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AC$. Khi đó, H là trung điểm của AC.

Do $(ACC'A') \perp (ABC)$ và $A'H \perp AC$ nên $A'H \perp (ABC)$.



Hình 7.95

Vậy khối lăng trụ có chiều cao là $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

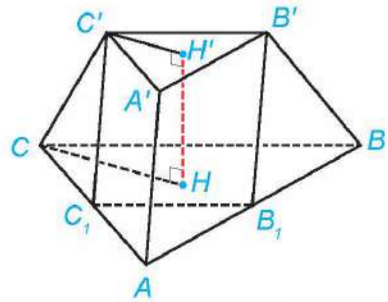
Tam giác đều ABC có diện tích là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy khối lăng trụ có thể tích là $V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}{8}$.

Luyện tập 2. Cho khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $HH' = h$, hai mặt đáy ABC, $A'B'C'$ có cạnh tương ứng bằng $2a$, a.

a) Tính thể tích của khối chóp cụt.

b) Gọi B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng $AB_1C_1.A'B'C'$ là một hình lăng trụ. Tính thể tích khối lăng trụ $AB_1C_1.A'B'C'$.



Hình 7.96

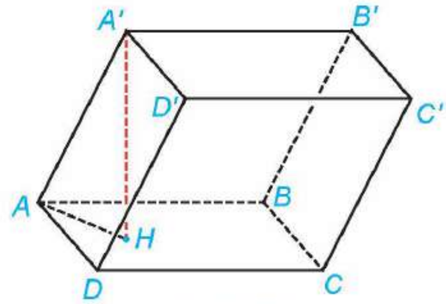
Ví dụ 3. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm, $AA' = 6$ cm, $\widehat{BAD} = 30°$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính thể tích của khối hộp.

Giải. (H.7.97)

Hình bình hành $ABCD$ có diện tích là

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\left(\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\widehat{BAD}\right) = 20\ (\text{cm}^2).$$

Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$. Khi đó, $\widehat{A'AH}$ bằng góc giữa AA' và $(ABCD)$ nên $\widehat{A'AH} = 45°$. Trong tam giác vuông $A'AH$, ta có $A'H = A'A \cdot \sin\widehat{A'AH} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (cm).



Hình 7.97

Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao tương ứng với mặt $ABCD$ bằng $A'H = 3\sqrt{2}$ cm.

Do đó, thể tích của khối hộp là $V = S_{ABCD} \cdot A'H = 60\sqrt{2}$ (cm^3).

Vận dụng. Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng 30 cm, 60 cm, cạnh bên của sọt dài 50 cm. Tính thể tích của sọt.


Hình 7.98

BÀI TẬP

7.28. Cho khối chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a.

7.29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 5$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $\widehat{ABC} = 150°$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

7.30. Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh 6 cm. Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

a) Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng $60°$;

b) Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$.

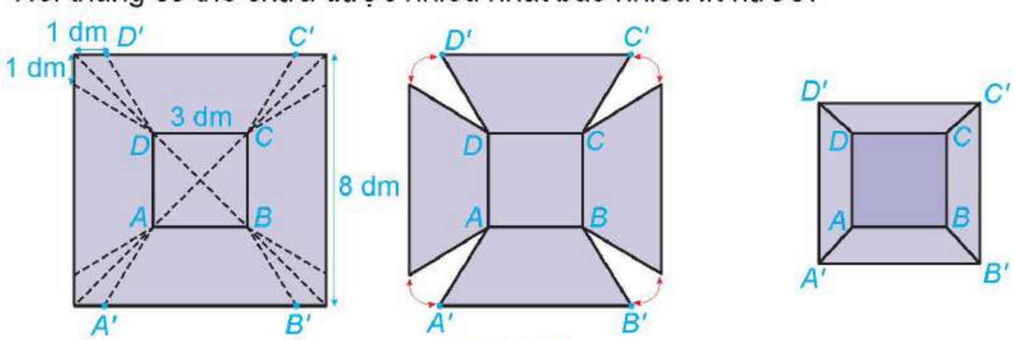
7.31. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a, $A'A = A'B = A'C = b$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

7.32. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8 dm, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên của thùng.

c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Hình 7.99

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A – TRẮC NGHIỆM

7.33. Cho các phát biểu sau:

(1) Hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là đường thẳng a và cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì $a \perp (R)$.

(2) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và có giao tuyến là đường thẳng a, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng a thì $b \perp (Q)$.

(3) Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và a vuông góc với (Q) thì $(P) \perp (Q)$.

(4) Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) thì $a \perp (Q)$.

Số phát biểu đúng trong các phát biểu trên là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

7.34. Cho mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) và a là giao tuyến của (P) và (Q). Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng d nằm trên (Q) thì d vuông góc với (P).

B. Đường thẳng d nằm trên (Q) và d vuông góc với a thì d vuông góc với (P).

C. Đường thẳng d vuông góc với a thì d vuông góc với (P).

D. Đường thẳng d vuông góc với (Q) thì d vuông góc với (P).

7.35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Số đo của góc nhị diện $[S, AB, C]$ bằng $\widehat{SBC}$.

B. Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng 90°.

C. Số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$ bằng 90°.

D. Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng $\widehat{BSD}$.

7.36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB).

B. Đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

C. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD).

D. Đường thẳng AD vuông góc với mặt phẳng (SAB).

7.37. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng S, chiều cao bằng h là:

A. $V = S \cdot h$. B. $V = \frac{1}{2} S \cdot h$. C. $V = \frac{1}{3} S \cdot h$. D. $V = \frac{2}{3} S \cdot h$.

B – TỰ LUẬN

7.38. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = a\sqrt{2}$ và $OC = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC).

7.39. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC cân tại A, tam giác BCD cân tại D. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (AID)$.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác AID. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

c) Kẻ đường cao IJ của tam giác AID. Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

7.40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$ và $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

7.41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Biết tam giác SAD vuông cân tại S và $(SAD) \perp (ABCD)$.

a) Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

7.42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a, $AA' \perp (ABCD)$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

a) Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$.

7.43. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A'.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng a. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và thể tích của khối chóp $A'.BB'C'C$.

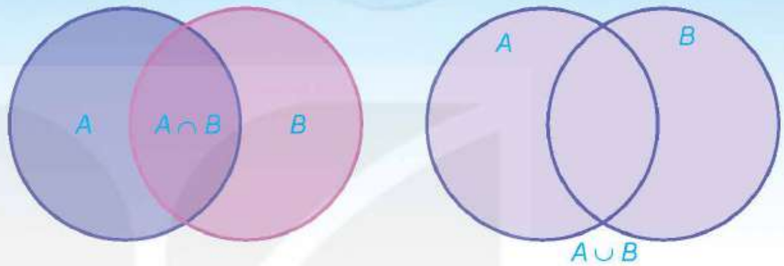
7.44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB \parallel CD$ và $AB = BC = DA = a$, $CD = 2a$. Biết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

7.45. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng 10 m và tạo với mặt đất góc 80°. Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài 12 m vào tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

CHƯƠNG VIII
CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Nếu biết xác suất xảy ra của biến cố A, xác suất xảy ra của biến cố B, làm thế nào để tính xác suất xảy ra biến cố A hoặc biến cố B, xác suất xảy ra biến cố A và biến cố B?

Chương này đưa ra các quy tắc tính xác suất nhằm mục đích giúp ta trả lời các câu hỏi trên.



Bài 28 BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

THUẬT NGỮ

- Biến cố hợp
- Biến cố giao
- Biến cố độc lập

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Nhận biết các khái niệm biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập.

Trong một cuộc khảo sát về mức sống của người Hà Nội, người khảo sát chọn ngẫu nhiên một gia đình ở Hà Nội. Xét các biến cố sau:

M: "Gia đình đó có ti vi";

N: "Gia đình đó có máy vi tính";

E: "Gia đình đó có ti vi hoặc máy vi tính";

F: "Gia đình đó có cả ti vi và máy vi tính";

G: "Gia đình đó chỉ có ti vi hoặc chỉ có máy vi tính mà không đồng thời có cả hai thiết bị nói trên";

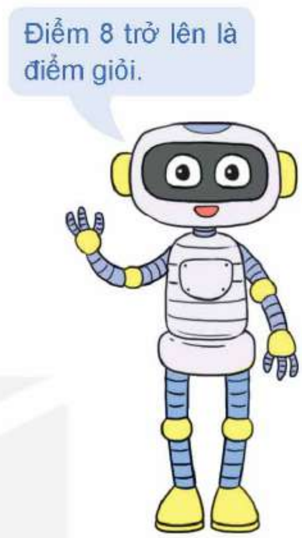
H: "Gia đình đó không có cả ti vi và máy vi tính".

Các biến cố trên rõ ràng có mối liên hệ với nhau. Chúng ta có thể mô tả các mối liên hệ đó một cách cô đọng, súc tích bằng các khái niệm và kí hiệu toán học được không?

1. BIẾN CỐ HỢP

HĐ1. Một tổ trong lớp 11A có 10 học sinh. Điểm kiểm tra học kì I của 10 bạn này ở hai môn Toán và Ngữ văn được cho như sau:

Tên học sinh \ Môn	Toán	Ngữ văn
Bảo	7	6
Dung	5	9
Định	5	6
Lan	8	7
Long	6	8
Hương	9	7
Phúc	8	6
Cường	8	9
Tuấn	4	5
Trang	10	8



Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

A: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Ngữ văn";

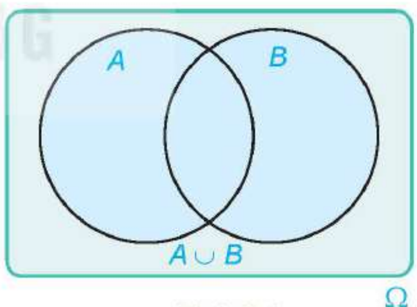
B: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Toán";

C: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Ngữ văn hoặc điểm giỏi môn Toán".

a) Mô tả không gian mẫu và các tập con A, B, C của không gian mẫu.

b) Tìm $A \cup B$.

> Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: "A hoặc B xảy ra" được gọi là **biến cố hợp** của A và B, kí hiệu là $A \cup B$.
>
> Biến cố hợp của A và B là tập con $A \cup B$ của không gian mẫu Ω.



Hình 8.1

Ví dụ 1. Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi E là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số lẻ"; F là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nêu nội dung của biến cố hợp $G = E \cup F$. Hỏi G là tập con nào của không gian mẫu?

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

b) $E \cup F$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số lẻ hoặc số nguyên tố".

Ta có $E = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$; $F = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$.

Vậy $G = E \cup F = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$.

Luyện tập 1. Một tổ trong lớp 11B có 4 học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung, Phương và 5 học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải. Trong giờ học, giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó lên bảng để kiểm tra bài.

Xét các biến cố sau:

H: "Học sinh đó là một bạn nữ";

K: "Học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nêu nội dung của biến cố hợp $M = H \cup K$. Mỗi biến cố *H*, *K*, *M* là tập con nào của không gian mẫu?

2. BIẾN CỐ GIAO

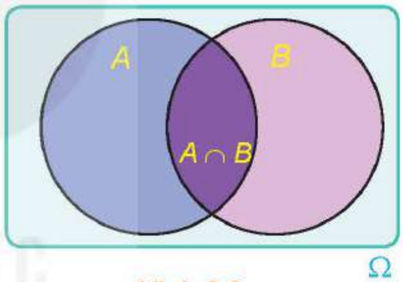
HĐ2. Trở lại tình huống trong HĐ1. Xét biến cố *D*: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Ngữ văn và điểm giỏi môn Toán".

a) Hỏi *D* là tập con nào của không gian mẫu?

b) Tìm $A \cap B$.

Cho *A* và *B* là hai biến cố. Biến cố: "Cả *A* và *B* đều xảy ra" được gọi là **biến cố giao** của *A* và *B*, kí hiệu là *AB*.

Biến cố giao của *A* và *B* là tập con $A \cap B$ của không gian mẫu Ω.



Hình 8.2

Ví dụ 2. Một tổ trong lớp 11C có 9 học sinh. Phỏng vấn 9 bạn này với câu hỏi: "Bạn có biết chơi môn thể thao nào trong hai môn này không?". Nếu biết thì đánh dấu X vào ô ghi tên môn thể thao đó, không biết thì để trống. Kết quả thu được như sau:

Môn thể thao / Tên học sinh	Cầu lông	Bóng bàn
Bảo	X	
Đăng	X	
Giang		X
Hoa		
Long	X	X
Mai		
Phúc	X	X
Tuấn	X	X
Yến	X	

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

U: "Học sinh được chọn biết chơi cầu lông";

V: "Học sinh được chọn biết chơi bóng bàn".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $T = UV$ là gì? Mỗi biến cố U, V, T là tập con nào của không gian mẫu?

Giải

a) Không gian mẫu Ω = {Bảo; Đăng; Giang; Hoa; Long; Mai; Phúc; Tuấn; Yến}.

b) T là biến cố "Học sinh được chọn biết chơi cả cầu lông và bóng bàn".

Ta có: U = {Bảo; Đăng; Long; Phúc; Tuấn; Yến}; V = {Giang; Long; Phúc; Tuấn}.

Vậy $T = U \cap V$ = {Long; Phúc; Tuấn}.

Luyện tập 2. Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4"; Q: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $S = PQ$ là gì? Mỗi biến cố P, Q, S là tập con nào của không gian mẫu?

Vận dụng. Trở lại *tình huống mở đầu*. Sử dụng khái niệm biến cố hợp, biến cố giao, biến cố đối, ta biểu diễn biến cố G, H theo các biến cố M và N như sau:

Biến cố G xảy ra khi và chỉ khi hoặc gia đình đó có ti vi và không có máy vi tính hoặc gia đình đó không có ti vi và có máy vi tính. Vậy $G = M\overline{N} \cup \overline{M}N$.

Biến cố H xảy ra khi và chỉ khi gia đình đó không có cả ti vi và máy vi tính. Vậy $H = \overline{M}\,\overline{N}$.

Hãy biểu diễn mỗi biến cố E, F theo các biến cố M và N.

3. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

HĐ3. Hai bạn Minh và Sơn, mỗi người gieo đồng thời một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét hai biến cố sau:

A: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo là số chẵn";

B: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Sơn gieo là số chia hết cho 3".

Việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A có ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố B không? Việc xảy ra hay không xảy ra biến cố B có ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố A không?

> Cặp biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý. Nếu cặp biến cố A và B độc lập thì các cặp biến cố: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

Ví dụ 3. Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, có cùng kích thước và khối lượng.

a) Bạn Minh lấy ngẫu nhiên một viên bi, ghi lại màu của viên bi được lấy ra rồi trả lại viên bi vào hộp. Tiếp theo, bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

A: "Minh lấy được viên bi màu đỏ";

B: "Hùng lấy được viên bi màu xanh".

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

b) Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi và không trả lại vào hộp. Tiếp theo, bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

C: "Sơn lấy được viên bi màu đỏ";

D: "Tùng lấy được viên bi màu xanh".

Chứng tỏ rằng hai biến cố C và D không độc lập.

Giải

a) Nếu A xảy ra, tức là Minh lấy được viên bi màu đỏ. Vì Minh trả lại viên bi đã lấy vào hộp nên trong hộp có 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Vậy $P(B) = \frac{5}{9}$.

Nếu A không xảy ra, tức là Minh lấy được viên bi màu xanh. Vì Minh trả lại viên bi đã lấy vào hộp nên trong hộp vẫn có 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Vậy $P(B) = \frac{5}{9}$.

Như vậy, xác suất xảy ra của biến cố B không thay đổi bởi việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A.

Vì Hùng lấy sau Minh nên $P(A) = \frac{4}{9}$ dù biến cố B xảy ra hay không xảy ra.

Vậy A và B độc lập.

b) Nếu C xảy ra, tức là Sơn lấy được viên bi màu đỏ. Vì Sơn không trả lại viên bi đó vào hộp nên trong hộp có 8 viên bi với 3 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Vậy $P(D) = \frac{5}{8}$.

Nếu C không xảy ra, tức là Sơn lấy được viên bi màu xanh. Vì Sơn không trả lại viên bi đã lấy vào hộp nên trong hộp có 4 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Vậy $P(D) = \frac{4}{8}$.

Như vậy, xác suất xảy ra của biến cố D đã thay đổi phụ thuộc vào việc biến cố C xảy ra hay không xảy ra. Do đó, hai biến cố C và D không độc lập.

Luyện tập 3. Trở lại tình huống trong HĐ3. Xét hai biến cố sau:

E: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo là số nguyên tố";

B: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Sơn gieo là số chia hết cho 3".

Hai biến cố E và B độc lập hay không độc lập?

BÀI TẬP

8.1. Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ và quan sát số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ nhỏ hơn 7"; B là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Mỗi biến cố $A \cup B$ và AB là tập con nào của không gian mẫu?

8.2. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét các biến cố sau:

E: "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đều là số chẵn";

F: "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc khác tính chẵn lẻ";

K: "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số chẵn".

Chứng minh rằng K là biến cố hợp của E và F.

8.3. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Xét hai biến cố sau:

P: "Học sinh đó bị cận thị";

Q: "Học sinh đó học giỏi môn Toán".

Nêu nội dung của các biến cố $P \cup Q$; PQ và $\overline{P}\,\overline{Q}$.

8.4. Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:

A: "Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I";

B: "Bắt được con thỏ đen từ chuồng II".

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

8.5. Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:

E: "Bắt được con gà trống từ chuồng I";

F: "Bắt được con gà mái từ chuồng II".

Chứng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.

Bài 29 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
• Công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc • Công thức cộng xác suất	• Tính xác suất của biến cố hợp của hai biến cố xung khắc bằng cách sử dụng công thức cộng xác suất. • Tính xác suất của biến cố hợp của hai biến cố bất kì bằng cách sử dụng công thức cộng xác suất và phương pháp tổ hợp.

Tại tỉnh X, thống kê cho thấy trong số những người trên 50 tuổi có 8,2% mắc bệnh tim; 12,5% mắc bệnh huyết áp và 5,7% mắc cả bệnh tim và bệnh huyết áp. Từ đó, ta có thể tính được tỉ lệ dân cư trên 50 tuổi của tỉnh X không mắc cả bệnh tim và bệnh huyết áp hay không?

1. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ XUNG KHẮC

a) Biến cố xung khắc

HĐ1. Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét hai biến cố sau:

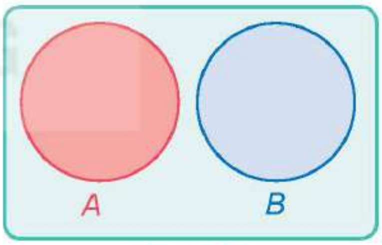
A: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chia hết cho 3";

B: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chia hết cho 4".

Hai biến cố A và B có đồng thời xảy ra hay không? Vì sao?

Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.

Hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \varnothing$.



Hình 8.3

? Biến cố A và biến cố đối $\overline{A}$ có xung khắc hay không? Tại sao?

Ví dụ 1. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét các biến cố sau:

A: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 7";

B: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 4";

C: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số nguyên tố".

Trong các cặp biến cố A và B; A và C; B và C, cặp biến cố nào xung khắc? Tại sao?

Giải

Cặp biến cố A và B là xung khắc vì A và B không đồng thời xảy ra.

Cặp biến cố A và C không xung khắc vì nếu tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 thì cả A và C xảy ra.

Cặp biến cố B và C không xung khắc vì nếu tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 3 thì cả B và C xảy ra.

Luyện tập 1. Một tổ học sinh có 8 bạn, trong đó có 6 bạn thích môn Bóng đá, 4 bạn thích môn Cầu lông và 2 bạn thích cả hai môn Bóng đá và Cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

E: "Học sinh được chọn thích môn Bóng đá";

F: "Học sinh được chọn thích môn Cầu lông".

Hai biến cố E và F có xung khắc không?

b) Công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc

HĐ2. Trở lại tình huống trong HĐ1. Hãy tính $P(A)$, $P(B)$ và $P(A \cup B)$.

Với hai biến cố xung khắc, ta có công thức tính xác suất của biến cố hợp như sau:

> Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ví dụ 2. Một hộp đựng 9 tấm thẻ cùng loại được ghi số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai tấm thẻ từ trong hộp. Xét các biến cố sau:

A: "Cả hai tấm thẻ đều ghi số chẵn";

B: "Chỉ có một tấm thẻ ghi số chẵn";

C: "Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn".

a) Chứng minh rằng $C = A \cup B$.

b) Tính $P(C)$.

Giải

a) Biến cố C xảy ra khi và chỉ khi trong hai tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ ghi số chẵn. Nếu cả hai tấm thẻ ghi số chẵn thì biến cố A xảy ra. Nếu chỉ có một tấm thẻ ghi số chẵn thì biến cố B xảy ra. Vậy C là biến cố hợp của A và B.

b) Hai biến cố A và B là xung khắc. Do đó $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ta cần tính $P(A)$ và $P(B)$.

Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các tập con có hai phần tử của tập {1; 2; ...; 9}.

Do đó $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

- Tính $P(A)$: Biến cố A là tập hợp tất cả các tập con có hai phần tử của tập {2; 4; 6; 8}.

  Do đó $n(A)=C_4^2=6$. Suy ra $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

- Tính $P(B)$: Mỗi phần tử của B được hình thành từ hai công đoạn:

  Công đoạn 1: Chọn một số chẵn từ tập {2; 4; 6; 8}. Có 4 cách chọn.

  Công đoạn 2: Chọn một số lẻ từ tập {1; 3; 5; 7; 9}. Có 5 cách chọn.

  Theo quy tắc nhân, tập B có $4 \cdot 5 = 20$ (phần tử).

  Do đó $n(B) = 20$. Suy ra $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

  Vậy $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{6}{36}+\frac{20}{36}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$.

Luyện tập 2. Một hộp đựng 5 quả cầu màu xanh và 3 quả cầu màu đỏ, có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ngẫu nhiên hai quả cầu trong hộp. Tính xác suất để chọn được hai quả cầu có cùng màu.

2. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

HĐ3. Ở một trường trung học phổ thông X, có 19% học sinh học khá môn Ngữ văn, 32% học sinh học khá môn Toán, 7% học sinh học khá cả hai môn Ngữ văn và Toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X. Xét hai biến cố sau:

A: "Học sinh đó học khá môn Ngữ văn";

B: "Học sinh đó học khá môn Toán".

a) Hoàn thành các mệnh đề sau bằng cách tìm cụm từ thích hợp thay cho dấu "?".

$P(A)$ là tỉ lệ ...(?)...

$P(AB)$ là ...(?)...

$P(B)$ là ...(?)...

$P(A\cup B)$ là ...(?)...

b) Tại sao để tính $P(A\cup B)$ ta không áp dụng được công thức $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$?

Cho hai biến cố A và B. Khi đó, ta có:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Công thức này được gọi là công thức cộng xác suất.

? Tại sao công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc là hệ quả của công thức cộng xác suất?

Ví dụ 3. Trở lại tình huống trong HĐ3. Hãy tính tỉ lệ học sinh học khá môn Ngữ văn hoặc học khá môn Toán của trường X.

Giải

Theo đề bài, ta có:

$$P(A) = 19\% = 0{,}19;\ P(B) = 32\% = 0{,}32 \text{ và } P(AB) = 7\% = 0{,}07.$$

Theo công thức cộng xác suất, ta có:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}19+0{,}32-0{,}07=0{,}44.$$

Do đó, xác suất để chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X học khá môn Ngữ văn hoặc học khá môn Toán là 0,44.

Vậy tỉ lệ học sinh học khá môn Ngữ văn hoặc học khá môn Toán của trường X là 44%.

Luyện tập 3. Phỏng vấn 30 học sinh lớp 11A về môn thể thao yêu thích thu được kết quả có 19 bạn thích môn Bóng đá, 17 bạn thích môn Bóng bàn và 15 bạn thích cả hai môn đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 11A. Tính xác suất để chọn được học sinh thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn.

Vận dụng. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

Gợi ý. Chọn ngẫu nhiên một người dân trên 50 tuổi của tỉnh X. Gọi A là biến cố "Người đó mắc bệnh tim"; B là biến cố "Người đó mắc bệnh huyết áp"; E là biến cố "Người đó không mắc cả bệnh tim và bệnh huyết áp". Khi đó $\overline{E}$ là biến cố "Người đó mắc bệnh tim hoặc mắc bệnh huyết áp". Ta có $\overline{E} = A \cup B$. Áp dụng công thức cộng xác suất và công thức xác suất của biến cố đối để tính $P(E)$.

BÀI TẬP

8.6. Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ, có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp (lấy xong không trả lại vào hộp). Tiếp đó đến lượt bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để bạn Tùng lấy được viên bi màu xanh.

8.7. Lớp 11A của một trường có 40 học sinh, trong đó có 14 bạn thích nhạc cổ điển, 13 bạn thích nhạc trẻ và 5 bạn thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Tính xác suất để:

a) Bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ;

b) Bạn đó không thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ.

8.8. Một khu phố có 50 hộ gia đình nuôi chó hoặc nuôi mèo, trong đó có 18 hộ nuôi chó, 16 hộ nuôi mèo và 7 hộ nuôi cả chó và mèo. Chọn ngẫu nhiên một hộ trong khu phố trên. Tính xác suất để:

a) Hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo;

b) Hộ đó không nuôi cả chó và mèo.

8.9. Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B. Thống kê cho thấy có 50% người mua sách A; 70% người mua sách B; 30% người mua cả sách A và sách B. Chọn ngẫu nhiên một người mua sách. Tính xác suất để:

a) Người đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B;

b) Người đó không mua cả sách A và sách B.

8.10. Tại các trường trung học phổ thông của một tỉnh, thống kê cho thấy có 63% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa A, 56% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa B và 28,5% giáo viên môn Toán tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B. Tính tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B.

Bài 30 CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

THUẬT NGỮ

- Hai biến cố độc lập
- Công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Tính xác suất của biến cố giao của hai biến cố độc lập bằng cách sử dụng công thức nhân xác suất và sơ đồ hình cây.

Tại vòng chung kết của một đại hội thể thao, vận động viên An thi đấu môn Bắn súng, vận động viên Bình thi đấu môn Bơi lội.

Biết rằng xác suất giành huy chương của vận động viên An và vận động viên Bình tương ứng là 0,8 và 0,9. Hỏi xác suất để cả hai vận động viên đạt huy chương là bao nhiêu?

Bài học này sẽ giúp em trả lời câu hỏi trên thông qua việc tìm hiểu công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập.

1. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

HĐ1. Có hai hộp đựng các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Hộp I có 6 quả màu trắng và 4 quả màu đen. Hộp II có 1 quả màu trắng và 7 quả màu đen. Bạn Long lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I, bạn Hải lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Xét các biến cố sau:

A: "Bạn Long lấy được quả bóng màu trắng";

B: "Bạn Hải lấy được quả bóng màu đen".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$ và $P(AB)$.

b) So sánh $P(AB)$ và $P(A) \cdot P(B)$.

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Công thức này gọi là công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập.

? Hai biến cố A và B trong HĐ1 độc lập hay không độc lập? Tại sao?

Chú ý. Với hai biến cố A và B, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì A và B không độc lập.

Ví dụ 1. Trở lại *tình huống mở đầu*. Gọi A là biến cố "Vận động viên An đạt huy chương"; B là biến cố "Vận động viên Bình đạt huy chương".

a) Giải thích tại sao hai biến cố A và B là độc lập.

b) Tính xác suất để cả hai vận động viên đạt huy chương.

c) Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất để:

- Cả hai vận động viên không đạt huy chương;
- Vận động viên An đạt huy chương, vận động viên Bình không đạt huy chương;
- Vận động viên An không đạt huy chương, vận động viên Bình đạt huy chương.

Giải

a) Vì hai vận động viên An và Bình thi đấu hai môn thể thao khác nhau nên hai biến cố A và B là độc lập.

b) Ta phải tính $P(AB)$. Theo công thức nhân xác suất, ta có:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

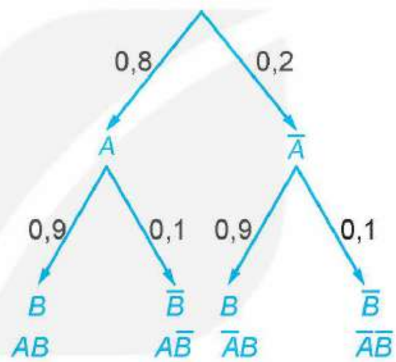
c) Ta phải tính $P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right), P\left(A\overline{B}\right)$ và $P\left(\overline{A}B\right)$. Ta dùng sơ đồ hình cây để mô tả như sau:

Theo sơ đồ hình cây, ta có:

$$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02;$$

$$P\left(A\overline{B}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08;$$

$$P\left(\overline{A}B\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18.$$



Luyện tập 1. Các học sinh lớp 11D làm thí nghiệm gieo hai loại hạt giống A và B. Xác suất để hai loại hạt giống A và B nảy mầm tương ứng là 0,92 và 0,88. Giả sử việc nảy mầm của hạt A và hạt B là độc lập với nhau. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để:

a) Hạt giống A nảy mầm còn hạt giống B không nảy mầm;

b) Hạt giống A không nảy mầm còn hạt giống B nảy mầm;

c) Ít nhất có một trong hai loại hạt giống nảy mầm.

2. VẬN DỤNG

Ví dụ 2. Số liệu thống kê tại một vùng cho thấy trong các vụ tai nạn ô tô có 0,37% người tử vong; 29% người không thắt dây an toàn và 0,28% người không thắt dây an toàn và tử vong. Chứng tỏ rằng việc không thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong khi gặp tai nạn có liên quan với nhau.

Giải

Chọn ngẫu nhiên một người đã bị tai nạn ô tô.

Gọi A là biến cố "Người đó đã tử vong"; B là biến cố "Người đó đã không thắt dây an toàn".

Khi đó, AB là biến cố "Người đó không thắt dây an toàn và đã tử vong".

Ta có $P(A) = 0{,}37\% = 0{,}0037$; $P(B) = 29\% = 0{,}29$; suy ra $P(A)P(B) = 0{,}0037 \cdot 0{,}29 = 0{,}001073$.

Mặt khác $P(AB) = 0{,}28\% = 0{,}0028$.

Vì $P(AB) \neq P(A)P(B)$ nên hai biến cố A và B không độc lập.

Vậy việc không thắt dây an toàn khi lái xe có liên quan tới nguy cơ tử vong khi gặp tai nạn.

Luyện tập 2. Để nghiên cứu mối liên quan giữa thói quen hút thuốc lá với bệnh viêm phổi, nhà nghiên cứu chọn một nhóm 5 000 người đàn ông. Với mỗi người trong nhóm, nhà nghiên cứu kiểm tra xem họ có nghiện thuốc lá và có bị viêm phổi hay không. Kết quả được thống kê trong bảng sau:

	Viêm phổi	Không viêm phổi
Nghiện thuốc lá	752 người	1 236 người
Không nghiện thuốc lá	575 người	2 437 người

Từ bảng thống kê trên, hãy chứng tỏ rằng việc nghiện thuốc lá và mắc bệnh viêm phổi có liên quan với nhau.

BÀI TẬP

8.11. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc với $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B không độc lập.

8.12. Một thùng đựng 60 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 60. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong thùng. Xét hai biến cố sau:

A: "Số ghi trên tấm thẻ là ước của 60" và B: "Số ghi trên tấm thẻ là ước của 48".

Chứng tỏ rằng A và B là hai biến cố không độc lập.

8.13. Có hai túi đựng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Túi I có 3 viên bi màu xanh và 7 viên bi màu đỏ. Túi II có 10 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Tính xác suất để:

a) Hai viên bi được lấy có cùng màu xanh;

b) Hai viên bi được lấy có cùng màu đỏ;

c) Hai viên bi được lấy có cùng màu;

d) Hai viên bi được lấy không cùng màu.

8.14. Có hai túi mỗi túi đựng 10 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để trong hai quả cầu được lấy ra không có quả cầu nào ghi số 1 hoặc ghi số 5.

8.15. Trong đợt kiểm tra cuối học kì II lớp 11 của các trường trung học phổ thông, thống kê cho thấy có 93% học sinh tỉnh X đạt yêu cầu; 87% học sinh tỉnh Y đạt yêu cầu. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X và một học sinh của tỉnh Y. Giả thiết rằng chất lượng học tập của hai tỉnh là độc lập. Tính xác suất để:

a) Cả hai học sinh được chọn đều đạt yêu cầu;

b) Cả hai học sinh được chọn đều không đạt yêu cầu;

c) Chỉ có đúng một học sinh được chọn đạt yêu cầu;

d) Có ít nhất một trong hai học sinh được chọn đạt yêu cầu.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A – TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi trong các Bài 8.16, 8.17.

Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiêu một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9"; B là biến cố "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15".

8.16. Số phần tử của $A \cup B$ là

A. 11. B. 10. C. 12. D. 13.

8.17. Số phần tử của AB là

A. 5. B. 6. C. 3. D. 4.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi trong các Bài 8.18, 8.19.

Tại một hội thảo quốc tế có 50 nhà khoa học, trong đó có 31 người thành thạo tiếng Anh, 21 người thành thạo tiếng Pháp và 5 người thành thạo cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một người trong hội thảo.

8.18. Xác suất để người được chọn thành thạo ít nhất một trong hai thứ tiếng Anh hoặc Pháp là

A. $\frac{47}{50}$. B. $\frac{37}{50}$. C. $\frac{39}{50}$. D. $\frac{41}{50}$.

8.19. Xác suất để người được chọn không thành thạo cả hai thứ tiếng Anh hay Pháp là

A. $\frac{7}{50}$. B. $\frac{3}{50}$. C. $\frac{9}{50}$. D. $\frac{11}{50}$.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi trong các Bài 8.20, 8.21.

Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 23 học sinh thích bóng chuyền,18 học sinh thích bóng rổ, 26 học sinh thích bóng chuyền hoặc bóng rổ hoặc cả hai. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp.

8.20. Xác suất để chọn được học sinh không thích cả bóng chuyền và bóng rổ là

A. $\frac{9}{20}$. B. $\frac{7}{20}$. C. $\frac{19}{40}$. D. $\frac{21}{40}$.

8.21. Xác suất để chọn được học sinh thích bóng chuyền và không thích bóng rổ là

A. $\frac{7}{40}$. B. $\frac{9}{40}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{11}{40}$.

B – TỰ LUẬN

8.22. Hai vận động viên bắn súng A và B mỗi người bắn một viên đạn vào tấm bia một cách độc lập. Xét các biến cố sau:

M: "Vận động viên A bắn trúng vòng 10";

N: "Vận động viên B bắn trúng vòng 10".

Hãy biểu diễn các biến cố sau theo biến cố *M* và *N*:

- *C*: "Có ít nhất một vận động viên bắn trúng vòng 10";
- *D*: "Cả hai vận động viên bắn trúng vòng 10";
- *E*: "Cả hai vận động viên đều không bắn trúng vòng 10";
- *F*: "Vận động viên A bắn trúng và vận động viên B không bắn trúng vòng 10";
- *G*: "Chỉ có duy nhất một vận động viên bắn trúng vòng 10".

8.23. Một đoàn khách du lịch gồm 31 người, trong đó có 7 người đến từ Hà Nội, 5 người đến từ Hải Phòng. Chọn ngẫu nhiên một người trong đoàn. Tính xác suất để người đó đến từ Hà Nội hoặc đến từ Hải Phòng.

8.24. Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau:

A: "Ở lần gieo thứ nhất, số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1";

B: "Ở lần gieo thứ hai, số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 2";

C: "Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo là 8";

D: "Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo là 7".

Chứng tỏ rằng các cặp biến cố *A* và *C*; *B* và *C*; *C* và *D* không độc lập.

8.25. Hai chuyến bay của hai hãng hàng không X và Y hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để chuyến bay của hãng X và hãng Y khởi hành đúng giờ tương ứng là 0,92 và 0,98. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để:

a) Cả hai chuyến bay khởi hành đúng giờ;

b) Chỉ có một chuyến bay khởi hành đúng giờ;

c) Có ít nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ.

CHƯƠNG IX
ĐẠO HÀM

Chương này trình bày khái niệm và các quy tắc tính đạo hàm, công thức tính đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản, cũng như ý nghĩa hình học và ý nghĩa cơ học của đạo hàm.

Bài 31 ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

THUẬT NGỮ

- Đạo hàm tại một điểm
- Đạo hàm trên một khoảng
- Hệ số góc của tiếp tuyến
- Vận tốc tức thời
- Tốc độ biến đổi tức thời

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm.
- Nhận biết định nghĩa đạo hàm. Tính đạo hàm của một số hàm đơn giản bằng định nghĩa.
- Nhận biết ý nghĩa hình học của đạo hàm. Thiết lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị.
- Vận dụng định nghĩa đạo hàm vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Nếu một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao 461,3 m xuống mặt đất. Có tính được vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất hay không? (Bỏ qua sức cản không khí).

Hình 9.1. Toà nhà Landmark 81

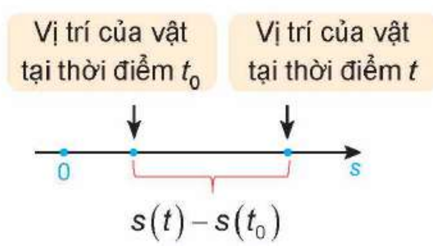
1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

HĐ1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng (H.9.2). Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t, $s = s(t)$ (được gọi là *phương trình của chuyển động*).

a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?



Hình 9.2

b) Cường độ tức thời

HĐ2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, có dạng $Q = Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Nhận xét. Nhiều bài toán trong Vật lí, Hoá học, Sinh học,... đưa đến việc tìm giới hạn dạng

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ở đó $y = f(x)$ là một hàm số đã cho.

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x) - f(x_0)$.
2. Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b)$, $x \neq x_0$.
3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Ta có: $f(x) - f(1) = x^2 + 2x - 3 = x^2 - 1 + 2x - 2 = (x-1)(x+3)$.

Với $x \neq 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x + 3$.

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+3) = 4$.

Vậy $f'(1) = 4$.

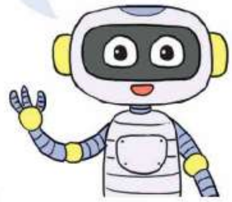
Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+2x\right)-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=4.$$

Chú ý. Đặt $h=x-x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=1$ có thể tính như sau:

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left[(1+h)^2+2(1+h)\right]-\left(1^2+2\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\left(h^2+4h+3\right)-3}{h}=\lim_{h\to0}(h+4)=4.$$

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$



Luyện tập 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=-x^2+2x+1$ tại điểm $x_0=-1$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

HĐ3. Tính đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0 bất kì trong các trường hợp sau:

a) $f(x)=c$ (c là hằng số); b) $f(x)=x$.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y'=f'(x)$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y=cx^2$, với c là hằng số.

$(c)'=0$; $(x)'=1$;
$\left(cx^2\right)'=2cx.$

Giải

Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{cx^2-cx_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}c(x+x_0)=c(x_0+x_0)=2cx_0.$$

Vậy hàm số $y=cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y'=2cx$.

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

Ví dụ 3. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu* (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do, lấy $g = 9{,}8$ m/s^2). Do vậy, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = f'(t) = gt = 9{,}8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà nhà là 461,3 m nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1, với $f(t_1) = 461{,}3$. Từ đó, ta có:

$$4{,}9t_1^2 = 461{,}3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461{,}3}{4{,}9}} \text{ (giây)}.$$

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8 \cdot \sqrt{\frac{461{,}3}{4{,}9}} \approx 95{,}1 \text{ (m/s)}.$$

Luyện tập 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 1$; b) $y = kx + c$ (với k, c là các hằng số).

4. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

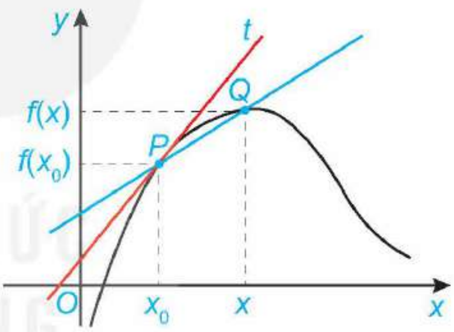
HĐ4. Nhận biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $P(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Xét điểm $Q(x; f(x))$ thay đổi trên (C) với $x \neq x_0$.

a) Đường thẳng đi qua hai điểm P, Q được gọi là một *cát tuyến* của đồ thị (C) (H.9.3). Tìm hệ số góc k_{PQ} của cát tuyến PQ.

b) Khi $x \to x_0$ thì vị trí của điểm $Q(x; f(x))$ trên đồ thị (C) thay đổi như thế nào?

c) Nếu điểm Q di chuyển trên (C) tới điểm P mà k_{PQ} có giới hạn hữu hạn k thì có nhận xét gì về vị trí giới hạn của cát tuyến QP?



Hình 9.3

Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$, với $x_1 \neq x_2$, là
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

Ví dụ 4. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên $y'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$. Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = -2$.

Luyện tập 3. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

b) Phương trình tiếp tuyến

HĐ5. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là đường parabol (P).

a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta rút ra kết luận sau:

> Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P): $y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

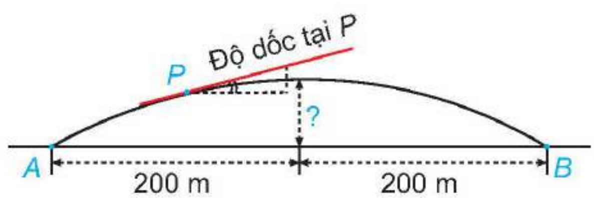
Giải

Từ Ví dụ 2, ta có $y' = 6x$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(1) = 6$. Ngoài ra, ta có $f(1) = 3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 3 = 6(x - 1)$ hay $y = 6x - 3$.

Luyện tập 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P): $y = -2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Vận dụng. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội (Ảnh: cand.com.vn)



Hình 9.5

Hướng dẫn. Chọn hệ trục toạ độ sao cho đỉnh cầu là gốc toạ độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y=-ax^2$ (với a là hằng số dương). Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là $k=y'=-2ax$, $-200 \le x \le 200$.

Do đó, $|k|=2a|x| \le 400a$. Vì độ dốc của mặt cầu không quá 10° nên ta có: $400a \le \tan 10^\circ$.

Từ đó tính được chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường.

BÀI TẬP

9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^2-x$ tại $x_0=1$; b) $y=-x^3$ tại $x_0=-1$.

9.2. Sử dụng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=kx^2+c$ (với k, c là các hằng số); b) $y=x^3$.

9.3. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y=-x^2+4x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0=1$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0=0$.

9.4. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 19,6 m/s thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h=19{,}6t-4{,}9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

9.5. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là 0,5 và −0,75. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc toạ độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y=ax^2+bx+c$, trong đó x tính bằng mét.

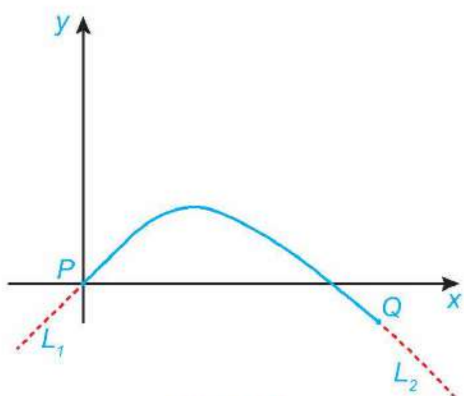
Hình 9.6a

a) Tìm c.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b.

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m. Tìm a.

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.



Hình 9.6b

Em có biết?

Giả sử y là một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng thay đổi x khác. Khi đó, y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2 thì sự thay đổi của x (còn gọi là *số gia* của x) là $\Delta x = x_2 - x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $[x_1; x_2]$. Giới hạn của tỉ số này khi $x_2 \to x_1$ (hay khi $\Delta x \to 0$) gọi là *tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x* tại $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại $x = a$.

Nói riêng ở trong kinh tế, nếu $C(x)$ là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó và $R(x)$ là số tiền thu được khi bán x đơn vị hàng hoá đó thì $P(x) = R(x) - C(x)$ là phần lợi nhuận ứng với x đơn vị hàng hoá. Các nhà kinh tế gọi tốc độ thay đổi tức thời của chi phí theo số lượng sản phẩm được sản xuất là *chi phí biên*:

$$mc(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = C'(x).$$

Lấy $\Delta x = 1$ và với số nguyên dương n đủ lớn (để Δx tương đối nhỏ so với n), ta có:

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n).$$

Vì vậy, chi phí biên để sản xuất n đơn vị sản phẩm là chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm tiếp theo (đơn vị sản phẩm thứ $n+1$). Tương tự, *lợi nhuận biên* khi sản xuất n đơn vị sản phẩm là phần lợi nhuận thu được khi sản xuất đơn vị sản phẩm tiếp theo. Để tối đa hoá lợi nhuận, công ty sẽ tiếp tục sản xuất khi x chưa đạt đến điểm x_0 mà ở đó lợi nhuận biên bằng 0. Khi $x < x_0$, lợi nhuận biên dương và do đó lợi nhuận có thể tăng khi tiếp tục sản xuất. Khi $x > x_0$, lợi nhuận biên âm và lợi nhuận có thể được giữ ở mức cao hơn nếu sản xuất ít đi.

(Theo *Stewart*, *Calculus*, *Nhà xuất bản Cengage Learning*)

Bài 32 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

THUẬT NGỮ

- Đạo hàm của tổng, hiệu
- Đạo hàm của tích, thương
- Đạo hàm của hàm số hợp
- Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

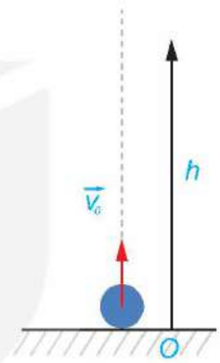
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Tính đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản.
- Sử dụng các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số và đạo hàm của hàm số hợp.
- Vận dụng các quy tắc đạo hàm để giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi phóng được cho bởi công thức sau:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9{,}8$ m/s^2 là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.



Hình 9.7

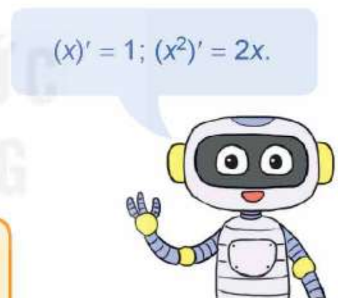
1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

HĐ1. **Nhận biết đạo hàm của hàm số $y = x^n$**

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ tại điểm x bất kì.

b) Dự đoán công thức đạo hàm của hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.



> Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

HĐ2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x > 0$.

> Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Giải

Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Do đó $y'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ và $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$.

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

HĐ3. Nhận biết quy tắc đạo hàm của tổng

a) Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + x^2$ tại điểm x bất kì.

b) So sánh: $(x^3 + x^2)'$ và $(x^3)' + (x^2)'$.

> Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó
>
> $(u+v)' = u' + v'$; $\quad (u-v)' = u' - v'$;
>
> $(uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

Chú ý

- Quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$; $\qquad$ b) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Giải

a) Ta có: $y' = \dfrac{1}{3}(x^3)' - (x^2)' + 2(x)' + 1'$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 2$

$= x^2 - 2x + 2$.

b) Với mọi $x \neq 1$, ta có:

$$y' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Ví dụ 3. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Phương trình chuyển động của vật là $h = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi $v(t) = h' = v_0 - gt$.

Vật đạt độ cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0$.

Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có:

$$v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0 \text{ (loại)}; \ t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

Khi chạm đất, vận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - gt_2 = -v_0 = -20$ (m/s).

Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với vận tốc 20 m/s (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn).

Luyện tập 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

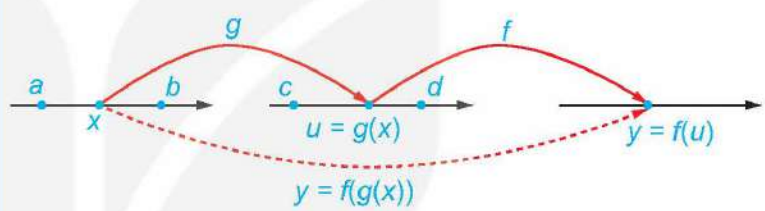
a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; b) $y = (\sqrt{x}+1)(x^2+2)$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

a) Khái niệm hàm số hợp

Diện tích của một chiếc đĩa kim loại hình tròn bán kính r được cho bởi $S = \pi r^2$. Bán kính r thay đổi theo nhiệt độ t của chiếc đĩa, tức là $r = r(t)$. Khi đó, diện tích của chiếc đĩa phụ thuộc nhiệt độ $S = S(t) = \pi(r(t))^2$. Ta nói $S(t)$ là *hàm số hợp* của hàm $S = \pi r^2$ với $r = r(t)$.

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là **hàm số hợp** của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Hình 9.8

Ví dụ 4. Biểu diễn hàm số $y = (2x+1)^{10}$ dưới dạng hàm số hợp.

Giải

Hàm số $y = (2x+1)^{10}$ là hàm số hợp của hàm số $y = u^{10}$ với $u = 2x+1$.

b) Đạo hàm của hàm số hợp

HĐ4. Nhận biết quy tắc đạo hàm của hàm số hợp

Cho các hàm số $y = u^2$ và $u = x^2 + 1$.

a) Viết công thức của hàm số hợp $y = (u(x))^2$ theo biến x.

b) Tính và so sánh: $y'(x)$ và $y'(u) \cdot u'(x)$.

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$.

Giải

Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = \sqrt{u}$ và $y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'_x = 2x$.

Theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có: $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Vậy đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Luyện tập 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x-3)^{10}$; b) $y = \sqrt{1-x^2}$.

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

a) Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

HĐ5. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

a) Với $h \neq 0$, biến đổi hiệu $\sin(x+h) - \sin x$ thành tích.

b) Sử dụng đẳng thức giới hạn $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ và kết quả của câu a, tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x bằng định nghĩa.

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = \left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right)' \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

Luyện tập 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right)$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

HĐ6. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Bằng cách viết $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$.

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = -\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)' \cdot \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -4\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Luyện tập 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

c) Đạo hàm của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

HĐ7. Xây dựng công thức tính đạo hàm của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

a) Bằng cách viết $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$.

b) Sử dụng đẳng thức $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ với $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, tính đạo hàm của hàm số $y = \cot x$.

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};\ (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$ (giả thiết $\tan u$ và $\cot u$ có nghĩa).

Ví dụ 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = \dfrac{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{2}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Luyện tập 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\tan^2 x + 3\cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Vận dụng 1. Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$ (m), với t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc của vật khi $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

a) Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

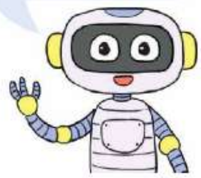
HĐ8. Giới hạn cơ bản của hàm số mũ và hàm số lôgarit

a) Sử dụng phép đổi biến $t = \frac{1}{x}$, tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

b) Với $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, tính $\ln y$ và tìm giới hạn của $\lim\limits_{x \to 0} \ln y$.

c) Đặt $t = e^x - 1$. Tính x theo t và tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

- $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$.
- $\lim\limits_{t \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$.



Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{x \to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

b) Đạo hàm của hàm số mũ

HĐ9. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số mũ

a) Sử dụng giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ và đẳng thức $e^{x+h}-e^x=e^x\left(e^h-1\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y=e^x$ tại x bằng định nghĩa.

b) Sử dụng đẳng thức $a^x=e^{x\ln a}$ $(0<a\neq 1)$, hãy tính đạo hàm của hàm số $y=a^x$.

- Hàm số $y=e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(e^x\right)'=e^x$.
  Đối với hàm số hợp $y=e^u$, với $u=u(x)$, ta có: $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$.
- Hàm số $y=a^x(0<a\neq 1)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$.
  Đối với hàm số hợp $y=a^u$, với $u=u(x)$, ta có: $\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a$.

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{x^2-x}$.

Giải

Ta có: $y'=2^{x^2-x}\cdot\left(x^2-x\right)'\cdot\ln 2=2^{x^2-x}(2x-1)\ln 2$.

Luyện tập 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=e^{x^2-x}$; b) $y=3^{\sin x}$.

c) Đạo hàm của hàm số lôgarit

HĐ10. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số lôgarit

a) Sử dụng giới hạn $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ và đẳng thức $\ln(x+h)-\ln x=\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y=\ln x$ tại điểm $x>0$ bằng định nghĩa.

b) Sử dụng đẳng thức $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ $(0<a\neq 1)$, hãy tính đạo hàm của hàm số $y=\log_a x$.

- Hàm số $y=\ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
  Đối với hàm số hợp $y=\ln u$, với $u=u(x)$, ta có: $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.
- Hàm số $y=\log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.
  Đối với hàm số hợp $y=\log_a u$, với $u=u(x)$, ta có: $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$.

Chú ý. Với $x<0$, ta có: $\ln|x|=\ln(-x)$ và $\left[\ln(-x)\right]'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{1}{x}$. Từ đó ta có:

$$\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x},\ \forall x\neq 0.$$

Ví dụ 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)$.

Giải

Vì $x^2+1>0$ với mọi x nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Luyện tập 7. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x-1)$.

Vận dụng 2. Ta đã biết, độ pH của một dung dịch được xác định bởi $\text{pH}=-\log[\text{H}^+]$, ở đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ (mol/lít) của ion hydrogen. Tính tốc độ thay đổi của pH đối với nồng độ $[\text{H}^+]$.

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(e^x)'=e^x$ $(a^x)'=a^x\ln a$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sin u)'=u'\cdot\cos u$ $(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$ $(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$ $(a^u)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a$ $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

BÀI TẬP

9.6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+2x+1$; b) $y=x^2-4\sqrt{x}+3$.

9.7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$; b) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

9.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x\sin^2 x$; b) $y=\cos^2 x+\sin 2x$;

c) $y=\sin 3x-3\sin x$; d) $y=\tan x+\cot x$.

9.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2^{3x-x^2}$; b) $y=\log_3(4x+1)$.

9.10. Cho hàm số $f(x)=2\sin^2\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\le 6$ với mọi x.

9.11. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t)=100-4{,}9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t=5$ giây; b) Khi vật chạm đất.

9.12. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t)=12+0{,}5\sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Bài 33 ĐẠO HÀM CẤP HAI

THUẬT NGỮ

- Đạo hàm cấp hai
- Gia tốc tức thời

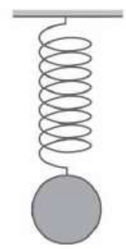
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm đạo hàm cấp hai của một hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của một số hàm số đơn giản.
- Vận dụng đạo hàm cấp hai để giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau:

$$x(t) = 4\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right),$$

ở đó x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 9.9

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM CẤP HAI

HĐ1. Nhận biết đạo hàm cấp hai của một hàm số

a) Gọi $g(x)$ là đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Tìm $g(x)$.

b) Tính đạo hàm của hàm số $y = g(x)$.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 + e^{2x-1}$. Từ đó tính $y''(0)$.

Giải

Ta có: $y' = 2x + (2x-1)' \cdot e^{2x-1} = 2x + 2e^{2x-1}$;

$$y'' = 2 + 2(2x-1)' \cdot e^{2x-1} = 2 + 4e^{2x-1}.$$

Vậy đạo hàm cấp hai của hàm số đã cho là $y'' = 2 + 4e^{2x-1}$.

Khi đó ta có: $y''(0) = 2 + 4e^{-1}$.

Luyện tập 1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = xe^{2x}$; b) $y = \ln(2x+3)$.

2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét một chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$. Cho số gia Δt tại t và $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$. Tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ gọi là *gia tốc trung bình* trong khoảng thời gian Δt. Giới hạn của gia tốc trung bình (nếu có) khi Δt dần tới 0 được gọi là *gia tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t, kí hiệu là $a(t)$. Như vậy

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

HĐ2. Nhận biết ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét một chuyển động có phương trình $s = 4\cos 2\pi t$.

a) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

b) Tính gia tốc tức thời tại thời điểm t.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có:

$$a(t) = f''(t).$$

Ví dụ 2. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là

$$v(t) = x'(t) = -\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot 4\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -8\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t là

$$a(t) = v'(t) = -8\pi\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tại thời điểm $t = 5$ giây, gia tốc của vật là

$$a(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\frac{\pi}{3} \approx -79 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Vận dụng. Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s = 2t^2 + \frac{1}{2}t^4$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

BÀI TẬP

9.13. Cho hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính $f''(0)$.

9.14. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau: a) $y = \ln(x+1)$; b) $y = \tan 2x$.

9.15. Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là hằng số). Tìm a, b biết $P'(1) = 0$ và $P''(1) = -2$.

9.16. Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f''(x)| \le 4$ với mọi x.

9.17. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0{,}5\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A – TRẮC NGHIỆM

9.18. Với u, v là các hàm số hợp theo biến x, quy tắc tính đạo hàm nào sau đây là đúng?

A. $(u+v)' = u' - v'$.

B. $(uv)' = u'v + uv'$.

C. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$.

D. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

9.19. Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin^3 x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. π. B. 2π. C. $\pi + 3$. D. $\pi - 3$.

9.20. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ là

A. $[1; 3]$. B. $[-1; 3]$. C. $[-3; 1]$. D. $[-3; -1]$.

9.21. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{4 + 3u(x)}$ với $u(1) = 7$, $u'(1) = 10$. Khi đó $f'(1)$ bằng

A. 1. B. 6. C. 3. D. -3.

9.22. Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-2x}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $\{0; 1\}$. B. $\{-1; 0\}$. C. $\{0\}$. D. $\{1\}$.

9.23. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = \sin\left(0{,}8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 4,5 cm/s^2. B. 5,5 cm/s^2. C. 6,3 cm/s^2. D. 7,1 cm/s^2.

9.24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ có đồ thị là (C). Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) là

A. 1. B. 2. C. -1. D. 3.

B – TỰ LUẬN

9.25. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^5$;

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$;

c) $y = e^x \sin^2 x$;

d) $y = \log\left(x + \sqrt{x}\right)$.

9.26. Xét hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ với α là số thực.

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Bằng cách viết $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, tính đạo hàm của hàm số đã cho.

9.27. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Đặt $g(x) = f(1) + 4(x^2 - 1)f'(1)$. Tính $g(2)$.

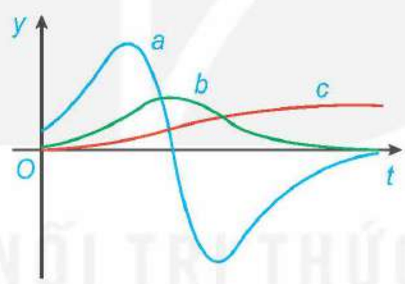
9.28. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Tính $f''(0)$.

9.29. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(1) = 2$ và $f'(x) = x^2 f(x)$ với mọi x. Tính $f''(1)$.

9.30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

9.31. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{a}{x}$ (a là hằng số dương) là một đường hypebol. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm bất kì của đường hypebol đó tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

9.32. Hình 9.10 biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc ô tô, hàm số thứ hai biểu thị vận tốc và hàm số thứ ba biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích.



Hình 9.10

9.33. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.

b) Tại những thời điểm nào vật đứng yên?

c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

d) Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.

e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

Phần này đưa em tới những hoạt động trải nghiệm đối với hàm số mũ, hàm số lôgarit và nhiều khái niệm, tính chất và kết quả của hình học không gian.

MỘT VÀI MÔ HÌNH TOÁN HỌC SỬ DỤNG HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

1. MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG HOẶC SUY THOÁI CẤP MŨ

Người ta thấy rằng nhiều hiện tượng tự nhiên tuân theo quy luật một đại lượng A biến thiên theo thời gian t theo hàm số mũ sau:

$$A(t) = A_0e^{kt}.$$

Ở đây A_0 là lượng ban đầu (ứng với $t = 0$) và $k \neq 0$ là một hằng số. Khi đó đại lượng A được gọi là tuân theo *luật hàm số mũ* (tăng trưởng nếu $k > 0$, suy thoái nếu $k < 0$).

Vận dụng 1. **(Ước tính dân số)**

Năm 2020, dân số thế giới khoảng 7 795 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 1,05% mỗi năm (theo *danso.org*). Nếu tỉ lệ tăng dân số này giữ nguyên, hãy ước tính dân số thế giới vào năm 2050 (làm tròn kết quả đến hàng triệu).

Các chất phóng xạ đều có chu kì bán rã riêng, là thời gian cần thiết để một nửa số chất phóng xạ bị phân rã. Trong phương pháp xác định niên đại bằng carbon, người ta sử dụng thực tế là tất cả các sinh vật sống đều chứa hai loại carbon: carbon-12 (một loại carbon ổn định) và carbon-14 (một loại carbon phóng xạ với chu kì bán rã 5 730 năm). Khi một sinh vật đang sống, tỉ lệ giữa carbon-12 và carbon-14 là không đổi. Nhưng khi một sinh vật chết đi, lượng carbon-12 ban đầu không thay đổi nhưng lượng carbon-14 bắt đầu giảm. Sự thay đổi lượng carbon-14 này so với lượng carbon-12 hiện tại giúp chúng ta có thể tính được thời điểm sinh vật chết.

Vận dụng 2. **(Ước tính thời đại của các công cụ cổ đại)**

Dấu vết của gỗ bị đốt cháy cùng với các công cụ đá cổ đại trong một cuộc khai quật khảo cổ học được phát hiện có chứa khoảng 1,67% lượng carbon-14 ban đầu. Biết chu kì bán rã của carbon-14 là 5 730 năm (theo *britannica.com*), hãy ước tính khoảng thời gian cây bị chặt và đốt.

2. THANG ĐO LÔGARIT

Khi một đại lượng vật lí thay đổi trong một phạm vi rất lớn, để thuận tiện người ta thường lấy lôgarit thập phân của nó để có một bộ số dễ quản lí hơn. Chúng ta sẽ xét ba tình huống như vậy: *thang đo pH* đo độ acid; *thang độ Richter* đo cường độ của các trận động đất và *thang đo deciben* đo độ lớn của âm thanh.

a) Thang đo pH

Trước đây các nhà hoá học thường đo tính acid của một dung dịch bằng cách đo nồng độ ion hydrogen của nó. Vào năm 1909, nhà hoá học người Đan Mạch Soren Peter Lauritz Sorensen đề xuất một phương pháp thuận tiện hơn, ông định nghĩa

$$pH = -\log[H^+],$$

trong đó $[H^+]$ là nồng độ của các ion hydrogen được đo bằng mol/lít (M). Ông làm điều này để tránh những số rất nhỏ và số mũ âm. Ví dụ, nếu $[H^+] = 10^{-4}$M thì $pH = -\log[10^{-4}] = 4$.

Dung dịch có độ pH = 7 được xác định là *trung tính*, dung dịch có độ pH < 7 có tính *acid* và dung dịch có độ pH > 7 là dung dịch *base*. Nhận thấy rằng khi pH tăng 1 đơn vị thì $[H^+]$ giảm đi 10 lần.

Độ pH của một số chất phổ biến

Chất	Độ pH
Sữa magie	10,5
Nước biển	8,0 – 8,4
Máu người	7,3 – 7,5
Bánh quy giòn	7,0 – 8,5
Sữa bò	6,4 – 6,8
Cà chua	4,1 – 4,4
Cam	3,0 – 4,0
Táo	2,9 – 3,3
Pin acid	1,0

(Theo *britannica.com*)

Vận dụng 3. (Tính độ pH)

Nồng độ ion hydrogen của nước chanh là $[H^+] = 5,0 \cdot 10^{-3}$M. Hãy tính độ pH của nước chanh và cho biết nó có tính acid hay base.

b) Thang độ Richter

Vào năm 1935, nhà địa chất học người Mỹ Charles Richter đã định nghĩa cường độ *M* của một trận động đất là

$$M = \log\frac{I}{S},$$

trong đó *I* là biên độ của trận động đất (được đo bằng biên độ của kết quả đo địa chấn lấy 100 km từ tâm động của trận động đất) và *S* là biên độ của một trận động đất "tiêu chuẩn" (có biên độ là 1 micrômét = 10^{-6} mét). Cường độ của một trận động đất "tiêu chuẩn" là

$$M = \log\frac{S}{S} = \log 1 = 0.$$

Thang độ Richter cung cấp các con số dễ quản lí hơn để làm việc. Chẳng hạn, một trận động đất có cường độ 6 độ Richter mạnh hơn gấp 10 lần so với một trận động đất có cường độ 5 độ Richter.

Những trận động đất lớn nhất (Từ năm 1900 trở lại đây)

Địa điểm	Năm	Độ Richter
Chile	1960	9,5
Alaska	1964	9,2
Sumatra	2004	9,1
Alaska	1957	9,1
Kamchatka	1952	9,0
Chile	2010	8,8
Ecuador	1906	8,8
Alaska	1965	8,7
Sumatra	2005	8,7
Tibet	1950	8,6

(Theo *britannica.com*)

Ở 3 độ Richter, động đất chỉ có ảnh hưởng trong một vùng có diện tích nhỏ; ở 4 đến 5 độ Richter, động đất gây ra một số thiệt hại nhỏ; ở 6 đến 8 độ Richter, động đất gây ra thiệt hại lớn; ở 9 độ Richter, thiệt hại là cực kì lớn.

Vận dụng 4. **(Tính cường độ của một trận động đất)**

Trận động đất năm 1906 ở San Francisco có cường độ ước tính là 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất mạnh đã xảy ra ở biên giới Colombia-Ecuador với cường độ mạnh gấp 4 lần. Hỏi trận động đất ở biên giới Colombia-Ecuador có cường độ là bao nhiêu độ Richter?

(Theo *britannica.com*)

c) Thang đo deciben

Tai người nhạy cảm với nhiều cường độ âm thanh khác nhau. Chúng ta lấy cường độ tham chiếu $I_0 = 10^{-12}$ W/m² (oát trên mét vuông) ở tần số 1 000 hertz, nó đo âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*). Cảm giác tâm lí về âm lượng thay đổi theo lôgarit của cường độ (định luật Weber-Fechner), do đó mức cường độ âm L, đo bằng deciben (dB), được định nghĩa là $L = 10\log\frac{I}{I_0}$.

Mức cường độ âm đặc trưng cho độ to nhỏ của âm. Công thức trên cho thấy: Khi cường độ của âm tăng lên 10^2, 10^3,... lần thì cảm giác về độ to nhỏ của âm tăng lên gấp 2, 3,... lần.

Mức cường độ âm của một số âm thanh thường nghe (ngưỡng làm đau tai là khoảng 120 dB)	
Nguồn âm thanh	**L (dB)**
Máy bay phản lực cất cánh	140
Buổi hoà nhạc rock	120
Tàu điện ngầm	100
Nhiều xe cộ lưu thông	80
Giao thông bình thường	70
Cuộc trò chuyện bình thường	50
Thì thầm	30
Tiếng lá xào xạc	10 – 20
Ngưỡng nghe	0

(Theo *britannica.com*)

Vận dụng 5. **(Tính mức cường độ âm)**

Cường độ của âm thanh giao thông tại một ngã tư đông đúc đo được là $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ W/m². Tìm mức cường độ âm tính bằng deciben.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM HÌNH HỌC

Phụ thuộc vào từng tình huống thực tế cụ thể, ta có thể thực hiện các hoạt động phù hợp để có trải nghiệm Hình học. Sau đây là một số tình huống gợi ý.

1. GẤP GIẤY TẠO DỰNG HÌNH KHÔNG GIAN

Từ một tấm bìa hình vuông (quy ước), em hãy cắt, gấp, dán các mép bìa để được các hình sau mà các đường ghép, dán chỉ ở các cạnh của hình:

a) Thùng không nắp hình hộp chữ nhật (đáy liền; không ghép, dán).

b) Thùng không nắp hình lập phương (đáy liền; không ghép, dán).

c) Hình lăng trụ đều không có hai đáy (chỉ dán 1 cạnh bên, các cạnh còn lại là liền).

d) Thùng không nắp hình lăng trụ lục giác đều (đáy liền; không ghép, dán).

e) Hình chóp tứ giác đều (đáy liền; không ghép, dán).

f) Thùng không nắp hình chóp cụt tứ giác đều.

g) Hình tứ diện đều (chỉ dán 3 cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh nào đó).

- **Dụng cụ cần chuẩn bị:**
  - Một số tấm bìa hình vuông (vừa có độ cứng nhất định, vừa có thể gấp được).
  - Thước thẳng có chia vạch đo độ dài, ê ke, compa, bút.
  - Băng dính, kéo.
- **Gợi ý thực hiện:** Xem lại các bài tập về cách tạo thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật, hình chóp cụt tứ giác đều, từ đó tìm cách làm đối với các hình còn lại.

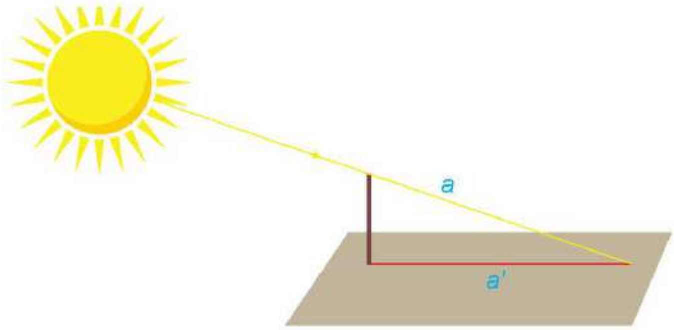
2. ĐO ĐẠC VÀ TÍNH TOÁN

Hãy thực hiện đo và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, số đo góc nhị diện, khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, thể tích của một khối hình, trong một số tình huống bắt gặp hoặc trong một số tình huống tạo dựng. Sau đây là một số gợi ý:

a) Đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt đất phẳng

- **Dụng cụ cần chuẩn bị:**
  - Cọc nhỏ thẳng cao 1 m, thước dây đo độ dài, hình hộp chữ nhật.
  - Máy tính cầm tay, giấy, bút.

- **Gợi ý thực hiện (H.T.1):**
  - Dưới ánh sáng mặt trời, dựng cọc thẳng vuông góc với mặt đất (có thể đặt hình hộp chữ nhật trên mặt đất để tạo phương vuông góc với mặt đất).
  - Đánh dấu bóng trên mặt đất của đầu cọc.
  - Đường thẳng *a* nối đầu cọc và bóng của nó chính là đường thẳng chứa tia sáng mặt trời.



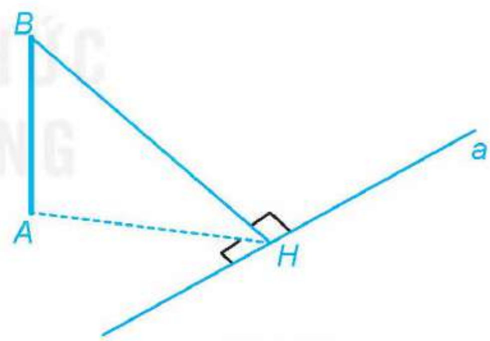
Hình T.1

  - Vì cọc được dựng vuông góc với mặt đất nên đường thẳng *a'* chứa bóng trên mặt đất của nó chính là hình chiếu vuông góc của đường thẳng *a* trên mặt phẳng chứa mặt đất.
  - Góc giữa *a* và *a'* là góc cần đo và có tang bằng tỉ số giữa độ dài của cọc và độ dài bóng của nó trên mặt đất.

Chú ý. Trong trường hợp mặt đất là mặt phẳng nằm ngang thì có thể dùng dây dọi để tạo phương vuông góc với mặt đất.

b) Trên mặt đất phẳng kẻ một vạch thẳng *a* và dựng một cọc thẳng, vuông góc với mặt đất sao cho chân cọc không thuộc đường thẳng *a*. Hãy đo và tính góc nhị diện có đỉnh là đường thẳng *a* và có hai cạnh tương ứng chứa chân cọc (ở mặt đất) và ngọn cọc.

- **Dụng cụ cần chuẩn bị:**
  - Máy tính cầm tay, giấy, bút, phấn, một hình hộp chữ nhật.
  - Cọc nhỏ, thẳng cao 1 m, thước dây đo khoảng cách, một đoạn dây dài 5 m.
- **Gợi ý thực hiện (H.T.2):**
  - Dùng dây kéo căng và kẻ vạch thẳng *a*.
  - Dựng cọc vuông góc với mặt đất, chân cọc không thuộc đường thẳng *a* (đặt hình hộp chữ nhật trên mặt đất để xác định phương vuông góc với mặt đất).
  - Gọi vị trí chân cọc là *A* (trên mặt đất), ngọn cọc là *B*, hình chiếu vuông góc của chân cọc trên đường thẳng *a* là *H*. Khi đó $\widehat{BHA}$ là góc phẳng của góc nhị diện cần đo.



Hình T.2

  - Vì $\tan\widehat{BHA} = \dfrac{AB}{AH}$ nên để tìm số đo của góc $\widehat{BHA}$, ta cần đo *AH* và *AB*.
  - Đo trực tiếp *AB*.
  - Có thể xác định và đo trực tiếp *AH* hoặc đo gián tiếp thông qua diện tích. (Lấy hai điểm *M*, *N* trên vạch *a*, đo các cạnh và dùng công thức Heron để tính diện tích tam giác *AMN*, sau đó tính chiều cao kẻ từ *A* của tam giác *AMN*.)

c) Đo và tính thể tích hình được tạo dựng ở Mục 1

- **Dụng cụ cần chuẩn bị:** Như ở Mục 1 (có thể dùng hình chóp đều, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ đều đã được tạo sẵn để bỏ qua bước tạo hình).

- **Gợi ý thực hiện:** Đối với mỗi hình này ta có thể dùng thước để đo độ dài các cạnh. Từ đó, dựa vào kiến thức về các hình này để suy ra chiều cao và diện tích của mặt cần thiết, từ đó tính thể tích.

3. VẼ HÌNH VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

Em có thể vẽ hình trên máy tính với phần mềm GeoGebra, chẳng hạn để vẽ một hình lăng trụ, em có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ một đáy của hình lăng trụ.

Chọn công cụ 

và vẽ một đa giác với số cạnh tuỳ ý.

Bước 2. Vẽ đáy thứ hai của hình lăng trụ.

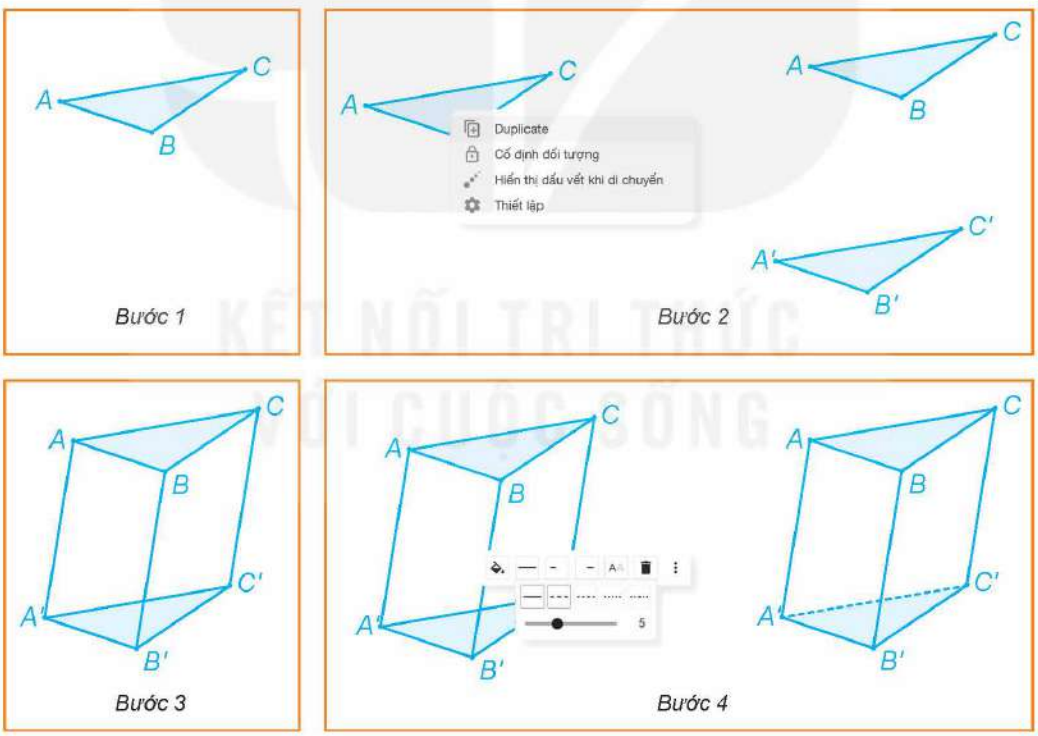
Chọn đa giác vừa vẽ và thực hiện lệnh "Duplicate" để nhận được một bản sao của đa giác đó. Kéo và thả bản sao đến vị trí mới.

Bước 3. Vẽ các cạnh của hình lăng trụ.

Nối các đỉnh của đa giác ban đầu với các đỉnh tương ứng thuộc bản sao của nó.

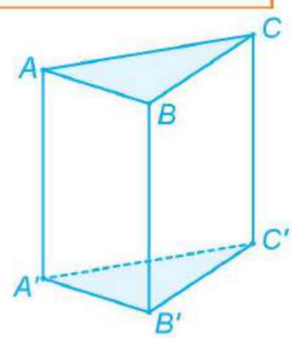
Bước 4. Hoàn thành hình lăng trụ.

Chọn các đường khuất và thay nét liền thành nét đứt.
Hình T.3 minh hoạ các bước vẽ hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.



Hình T.3

Chú ý. Để vẽ hình lăng trụ đứng, em chỉ cần di chuyển bản sao của đáy sao cho đường nối các đỉnh tương ứng là các đường thẳng đứng (H.T.4).



Hình T.4

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A – TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

B. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

C. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

D. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kì π.

B. Hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

C. Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

D. Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

3. Cho dãy số (u_n) với $u_n=5^n$. Số hạng u_{2n} bằng

A. $2\cdot 5^n$. B. 25^n. C. 10^n. D. 5^{n^2}.

4. Dãy số (u_n) cho bởi công thức số hạng tổng quát nào dưới đây là dãy số tăng?

A. $u_n=\dfrac{1}{n^2+1}$. B. $u_n=2^{-n}$. C. $u_n=\log_{\frac{1}{2}} n$. D. $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

5. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\ge 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

C. Nếu $|q|\le 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

D. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n+1}=0$.

6. Hàm số nào dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\tan x$. B. $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2+1}$. C. $y=\sin x$. D. $y=|x|$.

7. Cho $0<a\ne 1$. Giá trị của biểu thức $\log_a\left(a^3\cdot\sqrt[4]{a}\right)+\left(\sqrt[3]{a}\right)^{\log_a 8}$ bằng

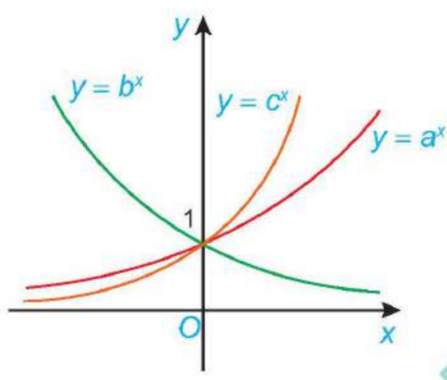
A. $\dfrac{19}{4}$. B. 9. C. $\dfrac{21}{4}$. D. $\dfrac{47}{12}$.

8. Cho đồ thị ba hàm số mũ $y=a^x$, $y=b^x$ và $y=c^x$ như trong hình vẽ dưới đây.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>c>b$. B. $b>a>c$.

C. $c>a>b$. D. $c>b>a$.



9. Nếu $f(x) = \sin^2 x + xe^{2x}$ thì $f''(0)$ bằng

A. 4. B. 5. C. 6. D. 0.

10. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ tại điểm $M(3; -5)$ thuộc đồ thị là

A. $y = 18x + 49$. B. $y = 18x - 49$. C. $y = -18x - 49$. D. $y = -18x + 49$.

11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{6a}{11}$. B. $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{11}$. D. $\dfrac{a\sqrt{11}}{11}$.

12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AC = AA' = 2a$. Giá trị lớn nhất của thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $8a^3$. B. $6a^3$. C. $4a^3$. D. a^3.

13. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và cạnh AD. Thể tích khối chóp $B.CMND$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

14. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AA' = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = \sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi 16, 17.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thu nhập của các công nhân tại một doanh nghiệp lớn:

Mức thu nhập (triệu đồng/tháng)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Số công nhân	7	18	35	57	28

16. Nhóm chứa trung vị là

A. [5; 10). B. [10; 15). C. [15; 20). D. [20; 25).

17. Nhóm chứa mốt là

A. [5; 10). B. [10; 15). C. [15; 20). D. [20; 25).

18. Vận động viên Tùng thi bắn súng. Biết rằng xác suất để Tùng bắn trúng vòng 10 là 0,2. Mỗi vận động viên được bắn hai lần và hai lần bắn là độc lập. Vận động viên đạt huy chương vàng nếu cả hai lần bắn trúng vòng 10. Xác suất để vận động viên Tùng đạt huy chương vàng là

A. 0,04. B. 0,035. C. 0,05. D. 0,045.

19. Hai bạn Sơn và Tùng, mỗi người gieo một con xúc xắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên cả hai con xúc xắc của Sơn và Tùng lớn hơn 1 là

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{25}{36}$. C. $\frac{26}{35}$. D. $\frac{28}{37}$.

20. Hai bạn An và Bình tham gia một trò chơi độc lập với nhau. Xác suất để An và Bình giành giải thưởng tương ứng là 0,8 và 0,6. Xác suất để có ít nhất một bạn giành giải thưởng là

A. 0,94. B. 0,924. C. 0,92. D. 0,93.

B – TỰ LUẬN

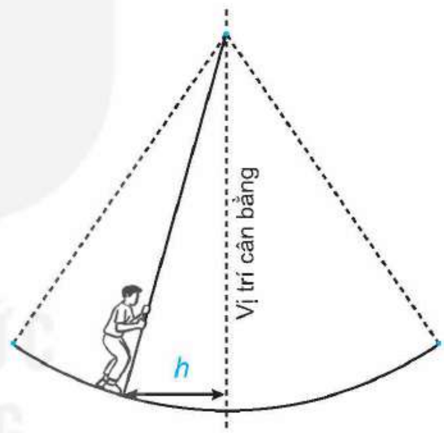
21. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} - \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$;

b) $B = \dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x} \cdot \dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x} - \cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$;

c) $C = 2\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)\sin 2x$.

22. Mùa xuân ở hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún cây đu sẽ đưa người chơi dao động qua lại quanh vị trí cân bằng. Giả sử khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được tính theo thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại.



a) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

b) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 m (tính chính xác đến 0,01 giây).

23. Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng ba số u_1, u_4 và u_7 lần lượt là các số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ mười của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Hãy tìm công bội q của cấp số nhân đó.

24. Một công ty đề xuất kí hợp đồng với một người lao động theo một trong hai loại hợp đồng sau:

Hợp đồng A: Lương 200 triệu đồng cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 10 triệu đồng.

Hợp đồng B: Lương 180 triệu đồng cho năm đầu tiên và sau mỗi năm tăng thêm 5%.

Kí hiệu u_n, v_n tương ứng là lương nhận được (triệu đồng) của năm thứ n ứng với các hợp đồng A và B.

a) Tính u_2, u_3 và u_n theo n. Nếu người lao động đó làm việc cho công ty trong thời gian 5 năm theo hợp đồng A thì tổng số tiền lương người đó nhận được là bao nhiêu?

b) Tính v_2, v_3 và v_n theo n. Nếu người lao động đó làm việc cho công ty trong thời gian 5 năm theo hợp đồng B thì tổng số tiền lương người đó nhận được là bao nhiêu?

c) Sau bao nhiêu năm thì lương hằng năm theo hợp đồng B vượt lương hằng năm theo hợp đồng A?

25. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+2n+3}$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\cdots+\dfrac{2^n}{3^n}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)$.

26. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & \text{khi } x\neq -1 \\ m^2 & \text{khi } x=-1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$;

b) Hàm số $g(x)=\begin{cases} 2x+m & \text{khi } x\leq 1 \\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

27. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $3^{\frac{1}{x}}=4$; b) $2^{x^2-3x}=4$; c) $\log_4(x+1)+\log_4(x-3)=3$;

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-2x}\geq \dfrac{1}{125}$; e) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x \leq \left(2+\sqrt{3}\right)^{x+2}$; f) $\log(3x^2+1)>\log(4x)$.

28. Để xác định tính acid và tính base của các dung dịch, người ta sử dụng khái niệm độ pH. Độ pH của một dung dịch được cho bởi công thức $\mathrm{pH}=-\log[\mathrm{H}^+]$, trong đó $[\mathrm{H}^+]$ là nồng độ của ion hydrogen (tính bằng mol/lít).

a) Tính độ pH của một dung dịch có nồng độ ion hydrogen là 0,1 mol/lít.

b) Độ pH sẽ biến đổi như thế nào nếu nồng độ ion hydrogen giảm?

c) Xác định nồng độ ion hydrogen trong bia biết độ pH của bia là khoảng 4,5.

29. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=3x^2-2\sqrt{x}$; b) $y=\sqrt{1+2x-x^2}$;

c) $y=\tan\dfrac{x}{2}-\cot\dfrac{x}{2}$; d) $y=e^{2x}+\ln x^2$.

30. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3-3t^2-9t+2$, ở đó thời gian $t>0$ tính bằng giây và quãng đường s tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2$ giây.

b) Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3$ giây.

c) Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 0.

d) Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0.

31. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$ và $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng $(OBC) \perp (ABC)$.

b) Tính theo a khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) và thể tích khối tứ diện $OABC$.

32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng SC, cắt các cạnh SC, SB, SD lần lượt tại M, E, F.

a) Chứng minh rằng $AE \perp (SBC)$.

b) Tính theo a thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.AEMF$.

33. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB' và CC'. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt đường thẳng AB, AC tương ứng tại H và K.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel HK$.

b) Tính theo a thể tích khối chóp $A'.AHK$.

34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$.

a) Chứng minh rằng $BD \perp SC$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = a, AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD.

a) Chứng minh rằng $BD \perp (SAM)$.

b) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABMD$.

36 Trong đại dịch Covid-19, một doanh nghiệp muốn hỗ trợ các gia đình thuộc nhóm 25% hộ gia đình có thu nhập thấp nhất ở một địa phương. Một mẫu số liệu ghép nhóm về thu nhập của các hộ gia đình ở địa phương này được cho trong bảng sau:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	[2; 5)	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)
Số hộ gia đình	8	17	35	56	27	15

Dựa trên mẫu số liệu trên, hãy xác định hộ gia đình có thu nhập dưới bao nhiêu sẽ nhận được hỗ trợ của doanh nghiệp đó?

37. Hai bạn Dũng và Cường tham gia một kì thi học sinh giỏi môn Toán. Xác suất để Dũng và Cường đạt giải tương ứng là 0,85 và 0,9. Tính xác suất để:

a) Có ít nhất một trong hai bạn đạt giải;

b) Có đúng một bạn đạt giải.

38. Một máy bay có 4 động cơ trong đó 2 động cơ ở cánh phải và 2 động cơ ở cánh trái. Chuyến bay hạ cánh an toàn khi trên mỗi cánh của nó có ít nhất một động cơ không bị lỗi. Giả sử mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị lỗi là 0,01 và mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất bị lỗi là 0,015. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Tính xác suất để chuyến bay hạ cánh an toàn.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH
Bất phương trình lôgarit	Bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit
Bất phương trình mũ	Bất phương trình có chứa ẩn số trong số mũ của luỹ thừa
Đạo hàm	Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn
Góc giữa hai mặt phẳng	Góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
Góc nhị diện	Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện
Góc phẳng nhị diện	Góc xOy, trong đó O là điểm bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$; Ox, Oy tương ứng là hai tia thuộc (P), (Q) và vuông góc với a
Hai biến cố độc lập	Hai biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia
Hai biến cố xung khắc	Hai biến cố mà nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra
Hai mặt phẳng vuông góc	Hai mặt phẳng mà góc giữa chúng bằng 90°
Hàm số sơ cấp	Hàm số tạo thành từ các hàm số sơ cấp cơ bản bằng một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, phép lấy căn và phép lấy hàm hợp
Hàm số sơ cấp cơ bản	Hàm số đa thức, hàm số lượng giác, hàm số mũ và hàm số lôgarit
Hình chóp đều	Hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau
Hình hộp đứng	Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành
Hình lăng trụ đều	Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều
Hình lăng trụ đứng	Hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy
Phép chiếu vuông góc	Phép chiếu song song lên một mặt phẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng đó
Phương pháp đưa về cùng cơ số	Phương pháp giải một số phương trình mũ (hoặc phương trình lôgarit) bằng cách đưa các luỹ thừa (hoặc các lôgarit) trong phương trình về luỹ thừa (hoặc lôgarit) với cùng một cơ số
Phương pháp lôgarit hoá	Phương pháp giải một số phương trình mũ (có cả hai vế đều dương) bằng cách lấy lôgarit cả hai vế theo cùng một cơ số thích hợp nào đó
Phương trình lôgarit	Phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit
Phương trình mũ	Phương trình có chứa ẩn số trong số mũ của luỹ thừa
Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa	Quy tắc chỉ ra các bước tính đạo hàm của hàm số tại một điểm theo định nghĩa

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập lần đầu: HOÀNG THỊ THANH – LƯU THẾ SƠN
Biên tập tái bản: VŨ THỊ VÂN
Biên tập mĩ thuật: NGUYỄN BÍCH LA
Thiết kế sách: NGUYỄN ĐÌNH HƯƠNG
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: BÙI VIỆT DUY
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH – PHẠM THỊ TÌNH
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN MĨ THUẬT VÀ TRUYỀN THÔNG

TOÁN 11 - TẬP HAI

Mã số: G1HHYT002h24
In .... bản, (QĐ ......) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ....
Cơ sở in: ....
Số ĐKXB: 04-2024/CXBIPH/359-2317/GD.
Số QĐXB: ....../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ...năm 2024
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 2024
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-39744-7
Tập hai: 978-604-0-39745-4

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 11, tập một
2. Ngữ văn 11, tập hai
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
4. Toán 11, tập một
5. Toán 11, tập hai
6. Chuyên đề học tập Toán 11
7. Lịch sử 11
8. Chuyên đề học tập Lịch sử 11
9. Địa lí 11
10. Chuyên đề học tập Địa lí 11
11. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
12. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
13. Vật lí 11
14. Chuyên đề học tập Vật lí 11
15. Hoá học 11
16. Chuyên đề học tập Hoá học 11
17. Sinh học 11
18. Chuyên đề học tập Sinh học 11
19. Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí
20. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí
21. Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi
22. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi
23. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
25. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
26. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
27. Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện
28. Mĩ thuật 11 – Thiết kế đồ hoạ
29. Mĩ thuật 11 – Thiết kế thời trang
30. Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh
31. Mĩ thuật 11 – Lí luận và lịch sử mĩ thuật
32. Mĩ thuật 11 – Điêu khắc
33. Mĩ thuật 11 – Kiến trúc
34. Mĩ thuật 11 – Hội hoạ
35. Mĩ thuật 11 – Đồ hoạ (tranh in)
36. Mĩ thuật 11 – Thiết kế công nghiệp
37. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 11
38. Âm nhạc 11
39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11
40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
41. Giáo dục thể chất 11 – Bóng chuyền
42. Giáo dục thể chất 11 – Bóng đá
43. Giáo dục thể chất 11 – Cầu lông
44. Giáo dục thể chất 11 – Bóng rổ
45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
46. Tiếng Anh 11 – Global Success – Sách học sinh

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

ISBN 978-604-0-39745-4

9 786040 397454

Giá : 16.000 đ