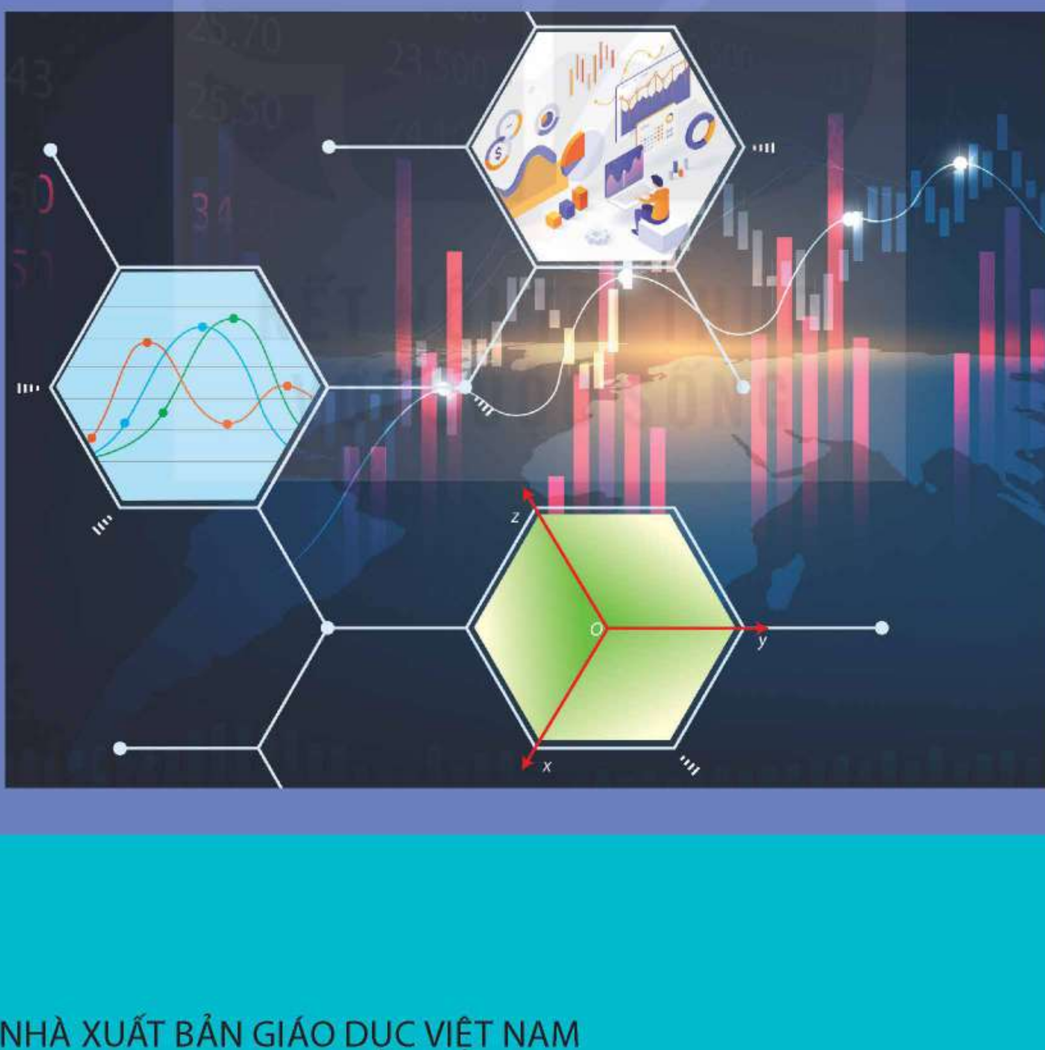
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN 12

SÁCH GIÁO VIÊN



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN 12

SÁCH GIÁO VIÊN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

QUY ƯỚC VIẾT TẮT DÙNG TRONG SÁCH

CT GDPT	Chương trình Giáo dục phổ thông
HĐ	Hoạt động
HS	Học sinh
GV	Giáo viên
SBT	Sách bài tập
SGK	Sách giáo khoa
SGV	Sách giáo viên
THCS	Trung học cơ sở
THPT	Trung học phổ thông

LỜI NÓI ĐẦU

Sách giáo viên Toán 12 là tài liệu giúp giáo viên hiểu rõ các vấn đề về nội dung, mức độ yêu cầu, phương pháp giảng dạy SGK *Toán 12* thuộc bộ sách "Kết nối tri thức với cuộc sống". Cũng có thể hiểu *Sách giáo viên Toán 12* là tài liệu hướng dẫn sử dụng SGK *Toán 12* trong công tác dạy học.

Với mong muốn tạo điều kiện cho giáo viên chủ động, sáng tạo trong giảng dạy, *Sách giáo viên Toán 12* chủ yếu làm rõ các vấn đề sau:

1. Chương trình môn Toán cấp Trung học phổ thông, bao gồm cả vấn đề phương pháp dạy học được cụ thể hoá trong TOÁN 12 như thế nào.
2. Ý tưởng của tác giả ẩn sau cấu trúc sách, cấu trúc bài học và từng nội dung cụ thể mà GV cần hiểu rõ để truyền tải cho HS.
3. Một số gợi ý trong việc tổ chức cho HS học tập trên lớp, như tổ chức thực hiện các nội dung được thiết kế trong sách.
4. Cung cấp đáp án cho các hoạt động, câu hỏi, bài luyện tập trên lớp, bài vận dụng và bài tập trong SGK.
5. Gợi ý tổ chức thực hiện các hoạt động trải nghiệm ngoài giờ lên lớp.

Với tinh thần đó, *Sách giáo viên Toán 12* gồm hai phần:

- *Phần một*. Hướng dẫn chung

  Phần này trình bày các vấn đề như: Chương trình (mục tiêu và những điểm cần lưu ý); Giới thiệu chung về SGK *Toán 12* (quan điểm biên soạn, cấu trúc nội dung, cấu trúc các bài học, phương pháp tiếp cận); Phương pháp dạy học, đánh giá kết quả giáo dục.

- *Phần hai*. Hướng dẫn cụ thể

  Phần này sẽ đi vào từng chương, bài với nội dung, thời lượng và mục tiêu cần đạt; một số gợi ý về cách tổ chức giảng dạy hay thực hiện các phần quan trọng của mỗi bài học; Đáp số/hướng dẫn/lời giải cho các câu hỏi, bài luyện tập tại lớp, bài vận dụng và bài tập trong SGK.

Hi vọng, *Sách giáo viên Toán 12* sẽ là tài liệu hữu ích cho GV khi giảng dạy TOÁN 12.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

PHẦN MỘT HƯỚNG DẪN CHUNG

A MỤC TIÊU MÔN HỌC

I Mục tiêu chung của môn Toán

Chương trình môn Toán giúp HS đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

1. Hình thành và phát triển năng lực toán học bao gồm các thành tố cốt lõi sau: năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hoá toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
2. Góp phần hình thành và phát triển ở HS các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung theo các mức độ phù hợp với môn học, cấp học được quy định tại Chương trình tổng thể.
3. Có kiến thức, kĩ năng toán học phổ thông, cơ bản, thiết yếu; phát triển khả năng giải quyết vấn đề có tính tích hợp liên môn giữa môn Toán và các môn học khác như Vật lí, Hoá học, Sinh học, Địa lí, Tin học, Công nghệ, Lịch sử, Nghệ thuật,...; tạo cơ hội để HS được trải nghiệm, áp dụng toán học vào thực tiễn.
4. Có hiểu biết tương đối tổng quát về sự hữu ích của toán học đối với từng ngành nghề liên quan để làm cơ sở định hướng nghề nghiệp, cũng như có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong suốt cuộc đời.

II Mục tiêu của môn Toán cấp Trung học phổ thông

Môn Toán cấp THPT nhằm giúp HS đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

1. Góp phần hình thành và phát triển năng lực toán học với yêu cầu cần đạt: nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để hiểu được những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; thiết lập được mô hình toán học để mô tả tình huống, từ đó đưa ra cách giải quyết vấn đề toán học đặt ra trong mô hình được thiết lập; thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề và đánh giá được giải pháp đã thực hiện, phản ánh được giá trị

của giải pháp, khái quát hoá được cho vấn đề tương tự; sử dụng được công cụ, phương tiện học toán trong học tập, khám phá và giải quyết vấn đề toán học.

2. Có những kiến thức và kĩ năng toán học cơ bản, thiết yếu về:

- Đại số và Giải tích: Tính toán và sử dụng công cụ tính toán; sử dụng ngôn ngữ và kí hiệu đại số; biến đổi biểu thức đại số và siêu việt (lượng giác, mũ, lôgarit), phương trình, hệ phương trình, bất phương trình; nhận biết các hàm số sơ cấp cơ bản (luỹ thừa, lượng giác, mũ, lôgarit); khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số bằng công cụ đạo hàm; sử dụng ngôn ngữ hàm số, đồ thị hàm số để mô tả và phân tích một số quá trình và hiện tượng trong thế giới thực; sử dụng tích phân để tính toán diện tích hình phẳng và thể tích vật thể trong không gian.
- Hình học và Đo lường: Cung cấp những kiến thức và kĩ năng (ở mức độ suy luận lôgic) về các quan hệ hình học và một số hình phẳng, hình khối quen thuộc; phương pháp đại số (vectơ, toạ độ) trong hình học; phát triển trí tưởng tượng không gian; giải quyết một số vấn đề thực tiễn đơn giản gắn với Hình học và Đo lường.
- Thống kê và Xác suất: Hoàn thiện khả năng thu thập, phân loại, biểu diễn, phân tích và xử lí dữ liệu thống kê; sử dụng các công cụ phân tích dữ liệu thống kê thông qua các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm và ghép nhóm; sử dụng các quy luật thống kê trong thực tiễn; nhận biết các mô hình ngẫu nhiên, các khái niệm cơ bản của xác suất và ý nghĩa của xác suất trong thực tiễn.

3. Góp phần giúp HS có những hiểu biết tương đối tổng quát về các ngành nghề gắn với môn Toán và giá trị của nó; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau THPT; có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong cuộc sống.

III Mục tiêu môn Toán lớp 12

Cụ thể hoá mục tiêu môn học, Toán 12 nhằm giúp HS đạt được các kiến thức và kĩ năng sau:

1. *Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số*

- Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu của đạo hàm cấp một của nó.
- Thể hiện được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.
- Nhận biết được tính đơn điệu, điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

- Nhận biết được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.
- Xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- Mô tả được sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị).
- Khảo sát được tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right);\ y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(c \neq 0, ad - bc \neq 0\right);$

  $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu).
- Nhận biết được tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.
- Vận dụng được đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn.

2. *Nguyên hàm. Tích phân*

- Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số.
- Giải thích được tính chất cơ bản của nguyên hàm.
- Xác định được nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp như:

$$y = x^\alpha\ \left(\alpha \neq -1\right);\ y = \frac{1}{x};\ y = \sin x;\ y = \cos x;$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x};\ y = \frac{1}{\sin^2 x};\ y = a^x;\ y = e^x.$$

- Tính được nguyên hàm trong những trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được định nghĩa và các tính chất của tích phân.
- Tính được tích phân trong những trường hợp đơn giản.
- Sử dụng được tích phân để tính diện tích của một số hình phẳng, thể tích của một số hình khối.
- Vận dụng được tích phân để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

3. *Phương pháp toạ độ trong không gian*

– Nhận biết được vectơ và các phép toán vectơ trong không gian (tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ).
– Nhận biết được toạ độ của một vectơ đối với hệ trục toạ độ.
– Xác định được độ dài của một vectơ khi biết toạ độ hai đầu mút của nó và biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.
– Xác định được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.
– Vận dụng được toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.
– Nhận biết được phương trình tổng quát của mặt phẳng.
– Thiết lập được phương trình tổng quát của mặt phẳng trong hệ trục toạ độ *Oxyz* theo một trong ba cách cơ bản: qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến; qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương (suy ra vectơ pháp tuyến nhờ vào việc tìm vectơ vuông góc với cặp vectơ chỉ phương); qua ba điểm không thẳng hàng.
– Thiết lập được điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc với nhau.
– Tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.
– Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt phẳng để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.
– Nhận biết được phương trình chính tắc, phương trình tham số, vectơ chỉ phương của đường thẳng trong không gian.
– Thiết lập được phương trình của đường thẳng trong hệ trục toạ độ theo một trong hai cách cơ bản: qua một điểm và biết một vectơ chỉ phương, qua hai điểm.
– Xác định được điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.
– Thiết lập được công thức tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.
– Vận dụng được kiến thức về phương trình đường thẳng trong không gian để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.
– Nhận biết được phương trình mặt cầu.
– Xác định được tâm, bán kính của mặt cầu khi biết phương trình của nó.
– Thiết lập được phương trình của mặt cầu khi biết tâm và bán kính.
– Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt cầu để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

4. *Phân tích và xử lí dữ liệu*

- Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn.
- Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
- Chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.

5. *Khái niệm về xác suất có điều kiện*

- Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện.
- Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.

6. *Các quy tắc tính xác suất*

- Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ hình cây.
- Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn.
- Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

B GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 12

I Quan điểm biên soạn sách giáo khoa Toán 12

1. *SGK Toán 12 được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu chung đối với SGK mới:*

- Tuân thủ định hướng đổi mới giáo dục phổ thông với trọng tâm là chuyển nền giáo dục từ chú trọng truyền thụ kiến thức sang giúp HS hình thành, phát triển toàn diện phẩm chất và năng lực.
- Bám sát các tiêu chuẩn SGK mới theo Thông tư số 33/2017 của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 22 tháng 12 năm 2017.

2. *Tư tưởng chủ đạo trong SGK được thể hiện rõ từ cấu trúc của sách đến cách tiếp cận các nội dung giáo dục:*

- Đổi mới SGK theo mô hình phát triển phẩm chất và năng lực của HS nhưng không xem nhẹ vai trò của kiến thức. Kiến thức và kĩ năng là hai nhân tố quan trọng để phát triển phẩm chất và năng lực của HS; đồng thời chúng có quan hệ mật thiết với nhau: có kiến thức thì mới hình thành và phát triển được kĩ năng; ngược lại, có rèn luyện và nâng cao kĩ năng thì kiến thức mới được củng cố và phát triển sâu sắc.
- Kiến thức toán không chỉ phát triển từ chính Toán học mà quan trọng hơn, còn bắt nguồn từ cuộc sống và phục vụ cho cuộc sống.
- Nội dung và phương pháp giáo dục phải phù hợp với đặc điểm tâm lí và trải nghiệm của HS lớp 12.
- Các năng lực chung và năng lực toán học có quan hệ liên kết, gắn bó, hỗ trợ lẫn nhau, cùng nhau phát triển. Do đó, bên cạnh các năng lực vốn đã được coi trọng như năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học, không thể xem nhẹ các năng lực như: năng lực giao tiếp toán học (đọc, nghe, viết, diễn đạt các nội dung toán học), năng lực tự học, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Nội dung Toán 12 phải bảo đảm tính tích hợp nội môn và liên môn, tính phân hoá trong giáo dục và hỗ trợ tốt cho GV trong việc đổi mới phương pháp dạy học.

II Cấu trúc nội dung

SGK *Toán 12* được chia làm hai tập, tương ứng với hai học kì, mỗi tập gồm các chương đan xen ba mạch kiến thức Giải tích, Hình học và Đo lường, Thống kê và Xác suất. Với cấu trúc này, trong mỗi giai đoạn học tập, HS được tập trung vào một chủ đề, tạo thuận lợi trong việc tiếp thu, rèn luyện, khắc sâu kiến thức và kĩ năng; mặt khác, sau mỗi giai đoạn, HS được chuyển sang một chủ đề mới, với cảm hứng học tập mới.

TẬP MỘT	TẬP HAI
Chương I. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số	Chương IV. Nguyên hàm và tích phân
Chương II. Vectơ và hệ trục toạ độ trong không gian	Chương V. Phương pháp toạ độ trong không gian
Chương III. Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm	Chương VI. Xác suất có điều kiện
Hoạt động thực hành trải nghiệm	Hoạt động thực hành trải nghiệm
	Bài tập ôn tập cuối năm

III Cấu trúc bài học

1. *Thiết kế bài học được xác định là yếu tố quan trọng nhất trong việc hỗ trợ GV đổi mới phương pháp giảng dạy và giúp HS phát triển năng lực và phẩm chất.*

   - Bên cạnh các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực được thể hiện xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập, các phẩm chất khác như yêu nước, nhân ái,... cũng được chú ý trong việc lựa chọn mô hình, chất liệu, cách thể hiện nội dung.
   - Bên cạnh các năng lực tư duy và lập luận toán học, giao tiếp toán học, sử dụng công cụ và phương tiện học toán, các năng lực giải quyết vấn đề toán học, mô hình hoá toán học được chú ý thoả đáng. Đây là một trong những điểm khác biệt lớn so với SGK trước đây.
   - Cấu trúc của các bài học trong SGK Toán 12 tạo điều kiện cho GV vận dụng sáng tạo các phương pháp và hình thức tổ chức dạy học, lấy hoạt động của HS làm trung tâm; tạo cơ hội và khuyến khích HS tích cực, chủ động, sáng tạo trong học tập.
   - Các bài học được xây dựng theo hướng cho HS đi từ các vấn đề của cuộc sống đến các khái niệm, định lí toán học, sau đó, từ những hiểu biết toán học quay lại giải quyết các vấn đề của cuộc sống, thể hiện rõ thông điệp "Kết nối tri thức với cuộc sống" của bộ sách.

2. *Mỗi bài học trong SGK Toán 12 gồm có bốn thành phần cơ bản là Mở đầu, Hình thành kiến thức mới, Luyện tập, Vận dụng. Tuy vậy, trong khi phần mở đầu dành chung cho toàn bài học, các phần còn lại đi theo các mục trong bài học.*

   - Phần đầu mỗi bài học là *Tên bài học* và *Phần định hướng*, gồm hai ô là ô Thuật ngữ và ô Kiến thức, kĩ năng. Phần định hướng này giúp HS xác định một cách nhanh chóng những khái niệm cơ bản, những kiến thức, kĩ năng cơ bản cần đạt được sau mỗi bài học.
   - *Mở đầu* bài học đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập, nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập để mở ra một chân trời tri thức.
   - Sau mở đầu, bài học được chia thành các mục, mỗi mục gồm một hoặc một vài đơn vị kiến thức. Trong mỗi mục, vòng lặp "Hoạt động hình thành kiến thức, Khung kiến thức, Ví dụ, Luyện tập" được chạy theo từng đơn vị kiến thức. Hoạt động vận dụng (vào các vấn đề mang tính thực tế) được đưa ra khi HS đã đạt được một lượng kiến thức, kĩ năng cần thiết, và thường được đưa ra ở cuối mục.

- *Hoạt động hình thành kiến thức* giúp HS quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để có ý niệm sơ bộ về khái niệm, cơ sở trải nghiệm và cơ sở lí luận cho kết luận, từ đó đi đến khung kiến thức. Các tác giả đã thiết kế các hoạt động hình thành kiến thức với các cách thức khác nhau, để HS đến với tri thức một cách chủ động nhất, tự nhiên nhất, vững chắc nhất. Các hoạt động được chia thành từng bước để vừa sức với HS trong khoảng thời gian cho phép.
- *Khung kiến thức* (xuất hiện chủ yếu sau các hoạt động, và đôi khi sau ví dụ) trình bày các kiến thức mang tính lí thuyết của bài học; HS sau đó được sử dụng (trừ khi có yêu cầu rõ chứng minh trong phần bài tập).
- HS có thể học ở các *Ví dụ* về phương pháp và cách trình bày, từ đó, thực hành các *Luyện tập* để củng cố kiến thức và kĩ năng.
- Trong các vòng lặp nói trên, trong SGK *Toán 12*, còn có thể xuất hiện các *Câu hỏi* (thường ở ngay sau khung kiến thức), *Chú ý*, *Nhận xét*, *Trải nghiệm* (nhỏ, nhanh, gọn), *Khám phá* (nhỏ), *Thảo luận* (nhanh). Các thành phần này không thuộc vào cấu trúc cứng, chúng chỉ xuất hiện khi cần thiết. Cấu trúc "động" này giúp các bài học trở nên đa dạng hơn và không cứng nhắc. Không chỉ làm cho bài học thêm sinh động, giúp HS có thêm cơ hội củng cố kiến thức, kĩ năng; các cấu phần động này còn góp phần giúp HS sáng tạo trong học tập, phát triển về nhận thức khoa học, khả năng lập luận, diễn giải, thuyết phục, kĩ năng làm việc theo nhóm,...
- Các *Vận dụng* (mang tính thực tế) được đưa ra để HS giải quyết (bao gồm cả tình huống được nêu ra ở đầu bài học) sau khi đã được trau dồi kiến thức và kĩ năng. Hoạt động này giúp HS phát triển năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học: xác định mô hình toán học trong bài toán thực tế; giải quyết bài toán toán học; thể hiện, đánh giá ngược trở lại từ kết quả toán học sang kết quả thực tế.
- Cuối mỗi bài học là phần *Bài tập* (được chọn lọc để có số lượng vừa phải) để HS tiếp tục củng cố, rèn luyện kiến thức và kĩ năng ở nhà.
- Mục "*Em có biết?*" cung cấp ngắn gọn cho HS những câu chuyện, thông tin bổ ích và thú vị liên quan tới nội dung học.

3. *SGK Toán 12 được thiết kế theo hướng GV là người chỉ đạo, tổ chức, giám sát, kiểm tra, gợi ý, giảng giải, chốt kiến thức, kĩ năng; HS tích cực tham gia vào các hoạt động để hình thành, củng cố và phát triển kiến thức, kĩ năng, học đến đâu vững tới đó.*

Tuỳ từng hoạt động, tuỳ vào hoàn cảnh thực tế lớp học, GV chủ động, linh hoạt trong hoạt động dạy và học trên lớp. Chẳng hạn, GV chủ động lựa chọn hình thức (thực hiện theo nhóm hay cá nhân, gọi lên bảng hay trả lời trực tiếp, kiểm tra chéo hay báo cáo kết quả trực tiếp với GV), chủ động chọn thời điểm, mức độ tương tác với HS (khi nào đưa ra các gợi ý, hỗ trợ, mức độ hỗ trợ tới đâu,...).

Về cơ bản, chức năng của các cấu phần chính trong mỗi bài học là như sau:

Chức năng	Cấu phần	Đặc điểm
Khởi động	Tình huống mở đầu bài học	Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập, thường là một bài toán thực tế đại diện hay đôi khi là một đoạn dẫn nhập.
Hình thành kiến thức, kĩ năng	Hoạt động hình thành kiến thức	Giúp HS khám phá kiến thức thông qua các hoạt động được chia thành từng bước vừa sức, để đi đến khung kiến thức.
	Khung kiến thức	Trình bày các kiến thức mang tính lí thuyết của bài học mà HS sau đó được phép sử dụng.
	Ví dụ	HS có thể học ở các ví dụ về phương pháp và cách trình bày để hình thành và rèn luyện kĩ năng tương ứng.
Củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng	Luyện tập	Rèn luyện kĩ năng cơ bản gắn với đơn vị kiến thức đang học; tình huống tương tự ví dụ trước đó, để HS tự luyện tập trên lớp.
	Thực hành (Góc công nghệ, Trải nghiệm,...)	Rèn luyện kĩ năng sử dụng các công cụ, phương tiện học toán.
Phát triển kiến thức, nâng cao kĩ năng, phát triển năng lực	Vận dụng	Vận dụng mang tính thực tế được đưa ra để HS giải quyết sau khi đã trau dồi kiến thức và kĩ năng. Giúp HS phát triển năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Củng cố, phát triển kĩ năng, năng lực	Bài tập cuối bài	Được chọn lọc để có số lượng vừa phải, bảo đảm tính phân hoá; chú trọng các bài tập liên quan đến ứng dụng của toán học trong thực tế và trong các môn học liên quan như Vật lí, Hoá học, Sinh học.

IV Phân bổ thời lượng trong sách giáo khoa Toán 12

CT GDPT môn Toán năm 2018 (sau đây gọi tắt là Chương trình) quy định thời lượng Toán 12 gồm 105 tiết, phân bổ: 44% cho mạch Giải tích, 35% cho mạch Hình học và Đo lường, 14% cho mạch Thống kê và Xác suất, 7% cho Hoạt động thực hành và trải nghiệm. Ngoài ra, Chương trình có thêm 35 tiết cho các chuyên đề học tập tự chọn.

Tuỳ thực tế, nhà trường linh hoạt trong việc phân bổ thời lượng cho từng bài học để đạt hiệu quả giáo dục. SGK *Toán 12*, đưa ra gợi ý sau đây về phân bổ thời lượng cho các bài học để nhà trường và GV tham khảo.

Tên chương	Tên bài	Số tiết
TẬP MỘT		
Chương I. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số	6
	Bài 2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	3
	Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	4
	Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số	5
	Bài 5. Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn	4
	Bài tập cuối chương I	2
	Ôn tập và kiểm tra giữa kì I	3
Chương II. Vectơ và hệ trục toạ độ trong không gian	Bài 6. Vectơ trong không gian	6
	Bài 7. Hệ trục toạ độ trong không gian	3
	Bài 8. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ	3
	Bài tập cuối chương II	2
Chương III. Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm	Bài 9. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị	1
	Bài 10. Phương sai và độ lệch chuẩn	2
	Bài tập cuối chương III	1

Hoạt động thực hành trải nghiệm	Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với phần mềm GeoGebra	2
	Vẽ vectơ tổng của ba vectơ trong không gian bằng phần mềm GeoGebra	1
	Độ dài gang tay (gang tay của bạn dài bao nhiêu?)	2
	Ôn tập và kiểm tra cuối kì I	4
TẬP HAI		
Chương IV. Nguyên hàm và tích phân	Bài 11. Nguyên hàm	5
	Bài 12. Tích phân	4
	Bài 13. Ứng dụng hình học của tích phân	4
	Bài tập cuối chương IV	2
	Ôn tập và kiểm tra giữa kì II	3
Chương V. Phương pháp toạ độ trong không gian	Bài 14. Phương trình mặt phẳng	6
	Bài 15. Phương trình đường thẳng trong không gian	5
	Bài 16. Công thức tính góc trong không gian	2
	Bài 17. Phương trình mặt cầu	3
	Bài tập cuối chương V	2
Chương VI. Xác suất có điều kiện	Bài 18. Xác suất có điều kiện	4
	Bài 19. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes	4
	Bài tập cuối chương VI	1
Hoạt động thực hành trải nghiệm	Tính nguyên hàm và tích phân với phần mềm GeoGebra. Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang	1
	Vẽ đồ hoạ 3D với phần mềm GeoGebra	1
	Ôn tập và kiểm tra cuối năm	4

V Những điểm cần chú ý về nội dung Chương trình và SGK Toán 12

CT GDPT môn Toán năm 2018 gồm ba mạch kiến thức: Giải tích, Hình học và Đo lường, Thống kê và Xác suất.

Đáng chú ý là các tác giả Chương trình đã nêu rõ quan điểm xây dựng Chương trình là: "CT GDPT môn Toán chỉ quy định những nguyên tắc, định hướng chung về yêu cầu cần đạt về phẩm chất và năng lực của HS, nội dung giáo dục, phương pháp giáo dục và việc đánh giá kết quả giáo dục, không quy định quá chi tiết, để tạo điều kiện cho các tác giả SGK và GV phát huy tính chủ động, sáng tạo trong thực hiện Chương trình".

Với quan điểm như vậy, khi thực hiện "một Chương trình – nhiều bộ SGK", thì khó tránh khỏi sự thiếu thống nhất về mặt chi tiết giữa các bộ SGK khác nhau. Do đó khi sử dụng bộ sách này, các GV cần nghiên cứu kĩ nội dung của từng chương, từng bài học sẽ được trình bày trong SGV Toán 12.

So với Chương trình trước đây, nội dung CT GDPT môn Toán lớp 12 năm 2018 và SGK *Toán 12* có một số điểm đáng chú ý như sau:

1. *Mạch Giải tích*

Về mặt nội dung, phần Giải tích ở SGK *Toán 12* mới có nhiều khác biệt so với trước đây. Cụ thể, nó vẫn gồm những nội dung truyền thống ở lớp 12 như *Ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số, Nguyên hàm và Tích phân*. Nội dung *Hàm số mũ và hàm số lôgarit* đã được đưa xuống lớp 11 và nội dung *Số phức* không có CT GDPT môn Toán năm 2018, do đó không có trong SGK *Toán 12* mới.

- Nội dung *Ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số*: Theo tinh thần chung của Chương trình là tinh giản (giảm tính hàn lâm), thiết thực (tăng tính thực tiễn) nên cách trình bày có nhiều khác biệt. Cụ thể, không trình bày quy tắc sử dụng đạo hàm cấp hai để tìm cực trị của hàm số, không trình bày bài toán về sự tương giao của đồ thị và các bài toán về tiếp tuyến của đồ thị; mức độ của các bài tập thuần tuý toán được giảm nhẹ; nói riêng, hầu như không có các bài tập chứa tham số (là dạng toán rất phổ biến trước đây). Ngược lại, những ứng dụng thực tiễn của đạo hàm và khảo sát hàm số lại được nhấn mạnh. Cụ thể, SGK *Toán 12* mới dành hẳn một bài học (Bài 5) để trình bày một cách hệ thống nội dung này.

– Nội dung *Nguyên hàm và Tích phân*: Do quan điểm chung của Chương trình là "tinh giản, thiết thực" nên việc trình bày được tiến hành theo tinh thần giảm nhẹ những yếu tố hàn lâm và nhấn mạnh đến ứng dụng. Cụ thể, do quy định của Chương trình, SGK *Toán 12* không trình bày các phương pháp tính nguyên hàm và tích phân (phương pháp đổi biến số, phương pháp lấy nguyên hàm/tích phân từng phần), mà chỉ yêu cầu HS tính được các nguyên hàm và tích phân đơn giản bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản và các tính chất của nguyên hàm, tích phân. Nói riêng, mức độ của các bài tập thuần tuý toán được giảm nhẹ rất nhiều so với trước đây. Ngược lại, những bài tập ứng dụng thực tiễn liên quan đến nguyên hàm, tích phân lại được chú trọng. Nói riêng, SGK *Toán 12* rất chú trọng đến việc ứng dụng tích phân để xây dựng lại các công thức tính thể tích đã biết trong hình học không gian (mà HS trước đây thường phải thừa nhận, vì việc xây dựng các công thức này bằng phương pháp hình học là quá phức tạp đối với HS đại trà). Điều này thể hiện rõ tính tích hợp (ở đây là tích hợp nội môn, giữa các phân môn của Toán học với nhau) theo yêu cầu của Chương trình.

2. *Mạch Hình học và Đo lường*

Trong CT GDPT môn Toán năm 2018, nội dung Hình học không gian được trình bày trọn vẹn ở lớp 11, khác với trước đây là được trình bày một phần ở lớp 11 và một phần ở lớp 12. Do tinh thần chung của Chương trình là "tinh giản, thiết thực" nên những nội dung hàn lâm, thuần tuý toán được giảm nhẹ và nhấn mạnh đến những ứng dụng thực tiễn. Cụ thể:

– Các nội dung khối đa diện tổng quát và mặt tròn xoay (như mặt cầu, mặt trụ, mặt nón), được trình bày trong SGK Hình học lớp 12 trước đây (viết theo CT GDPT môn Toán năm 2016), không được đề cập đến trong CT GDPT môn Toán năm 2018. Do đó các nội dung này không có trong các SGK Toán THPT mới, viết theo CT GDPT môn Toán năm 2018.

– Nội dung Hình học lớp 12 là trình bày vectơ trong không gian và phương pháp toạ độ trong không gian. Phần vectơ trong không gian trình bày một cách ngắn gọn, nhưng khá đầy đủ và hệ thống các khái niệm, các phép toán về vectơ trong không gian và biểu thức toạ độ của chúng. Phần phương pháp toạ độ trong không gian dành cho việc trình bày phương pháp toạ độ để nghiên cứu mặt phẳng, đường thẳng và mặt cầu. Tuy nhiên, so với các SGK trước đây, cách trình bày giảm nhẹ tính hàn lâm: Không đề cập đến phương trình tham số của mặt phẳng, phương trình tổng quát của đường thẳng, công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau; Không xét vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.

– Một điểm khác biệt nữa trong *SGK Toán 12* mới là tăng cường cho HS quan sát, trải nghiệm trước khi đi đến một số kết luận hình học. Giảm bớt các chứng minh thuần tuý toán học. Giảm bớt mức độ của các bài tập thuần tuý toán, bổ sung những bài tập vận dụng thực tiễn.

GV cần lưu ý những đặc điểm trên khi giảng dạy để không bị vượt quá nội dung và yêu cầu cần đạt quy định trong Chương trình.

3. *Mạch Thống kê và Xác suất*

Trong CT GDPT môn Toán năm 2018 và SGK Toán THPT mới, các nội dung Thống kê và Xác suất ở lớp 12 có thể coi là những nội dung tiếp nối của các nội dung tương ứng ở Toán 10 và Toán 11. Cụ thể:

– Về Thống kê: Ở lớp 10 đã trình bày các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán của mẫu số liệu không ghép nhóm. Ở lớp 11 trình bày các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm; còn các số đặc trưng đo mức độ phân tán của loại mẫu số liệu này được trình bày ở lớp 12. Như vậy có thể coi Thống kê lớp 11 và lớp 12 là sự phát triển tiếp nội dung của Thống kê lớp 10. Những nội dung Thống kê ở lớp 11 và lớp 12 này là những nội dung hoàn toàn mới so với CT GDPT môn Toán năm 2006.

– Về Xác suất: Ở lớp 10 đã trình bày định nghĩa xác suất cổ điển và cách tính xác suất cổ điển bằng phương pháp sơ đồ hình cây và phương pháp đếm của đại số tổ hợp. Ở lớp 11 trình bày các công thức tính xác suất, bao gồm công thức cộng xác suất và công thức nhân xác suất. Ở lớp 12 trình bày xác suất có điều kiện, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes. Đây là những nội dung hoàn toàn mới so với CT GDPT môn Toán năm 2006 và nhìn chung là tương đối khó đối với HS.

4. *Nội dung Hoạt động thực hành và Trải nghiệm*

Đây là nội dung hoàn toàn mới so với CT GDPT năm 2006 và SGK *Toán 12* trước đây. Phần này có thời lượng 7 tiết, chiếm 7% thời lượng của Chương trình môn Toán lớp 12.

Mục đích của các hoạt động thực hành và trải nghiệm môn Toán này là tạo cơ hội để HS được trải nghiệm, vận dụng toán học vào thực tiễn; tạo lập sự kết nối giữa các ý tưởng toán học, giữa toán học với thực tiễn, giữa toán học với các môn học và hoạt động giáo dục khác, đặc biệt là để thực hiện giáo dục STEM. Qua đó, góp phần hình thành và phát triển ở HS năng lực toán học, các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung theo các mức độ phù hợp theo quy định của Chương trình tổng thể.

Để thuận lợi cho việc giảng dạy và học tập, SGK *Toán 12* đã thiết kế sẵn một số chủ đề thực hành trải nghiệm gợi ý ở cuối mỗi tập sách. Tuỳ điều kiện và hoàn cảnh, GV lựa chọn các hoạt động phù hợp trong chuỗi các hoạt động được nêu ra trong SGK. Có một số lưu ý khi tổ chức các hoạt động thực hành và trải nghiệm môn Toán:

- Các chủ đề thiết kế trong SGK chỉ là gợi ý, GV có thể lựa chọn chủ đề khác phù hợp hơn với đặc điểm lớp học và cũng không nhất thiết thực hiện tất cả các hoạt động đưa ra trong SGK.
- Có thể tổ chức các hoạt động thực hành và trải nghiệm vào tiết học bình thường trên lớp, trong buổi hoạt động ngoại khoá hoặc các buổi sinh hoạt chuyên đề của tổ chuyên môn.
- Khuyến khích phát triển các chủ đề thực hành và trải nghiệm gợi ý trong SGK thành các chủ đề giáo dục STEM phù hợp.

C PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC VÀ ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ GIÁO DỤC

I Phương pháp dạy học

1. *Phương pháp dạy học trong Chương trình môn Toán đáp ứng các yêu cầu cơ bản sau:*

a) Phù hợp với tiến trình nhận thức của HS (đi từ cụ thể đến trừu tượng, từ dễ đến khó); không chỉ coi trọng tính lôgic của khoa học toán học mà cần chú ý cách tiếp cận dựa trên vốn kinh nghiệm và sự trải nghiệm của HS.

b) Quán triệt tinh thần "lấy người học làm trung tâm", phát huy tính tích cực, tự giác, chú ý nhu cầu, năng lực nhận thức, cách thức học tập khác nhau của từng cá nhân HS; tổ chức quá trình dạy học theo hướng kiến tạo, trong đó HS được tham gia tìm tòi, phát hiện, suy luận giải quyết vấn đề.

c) Linh hoạt trong việc vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học tích cực; kết hợp nhuần nhuyễn, sáng tạo với việc vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học truyền thống;

kết hợp các hoạt động dạy học trong lớp học với hoạt động thực hành và trải nghiệm, vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn. Cấu trúc bài học bảo đảm tỉ lệ cân đối, hài hoà giữa kiến thức cốt lõi, kiến thức vận dụng và các thành phần khác.

d) Sử dụng đủ và hiệu quả các phương tiện, thiết bị dạy học tối thiểu theo quy định đối với môn Toán; có thể sử dụng các đồ dùng dạy học tự làm phù hợp với nội dung học và các đối tượng HS; tăng cường sử dụng công nghệ thông tin và các phương tiện, thiết bị dạy học hiện đại một cách phù hợp và hiệu quả.

2. *Định hướng phương pháp hình thành và phát triển các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung*

a) Phương pháp hình thành, phát triển các phẩm chất chủ yếu

Thông qua việc tổ chức các hoạt động học tập, môn Toán góp phần cùng các môn học và hoạt động giáo dục khác giúp HS rèn luyện tính trung thực, tình yêu lao động, tinh thần trách nhiệm, ý thức hoàn thành nhiệm vụ học tập; bồi dưỡng sự tự tin, hứng thú học tập, thói quen đọc sách và ý thức tìm tòi, khám phá khoa học.

b) Phương pháp hình thành, phát triển các năng lực chung

- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực tự chủ và tự học thông qua việc rèn luyện cho người học biết cách lựa chọn mục tiêu, lập được kế hoạch học tập, hình thành cách tự học, rút kinh nghiệm và điều chỉnh để có thể vận dụng vào các tình huống khác trong quá trình học các khái niệm, kiến thức và kĩ năng toán học cũng như khi thực hành, luyện tập hoặc tự lực giải toán, giải quyết các vấn đề có ý nghĩa toán học.
- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực giao tiếp và hợp tác thông qua việc nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép, diễn tả được các thông tin toán học cần thiết trong văn bản toán học; thông qua sử dụng hiệu quả ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để trao đổi, trình bày được các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác, đồng thời thể hiện sự tự tin, tôn trọng người đối thoại khi mô tả, giải thích các nội dung, ý tưởng toán học.
- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo thông qua việc giúp HS nhận biết được tình huống có vấn đề; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác; biết đề xuất, lựa chọn được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề và biết trình bày giải pháp cho vấn đề; biết đánh giá giải pháp đã thực hiện và khái quát hoá cho vấn đề tương tự.

3. *Phương pháp dạy học môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực tính toán, năng lực ngôn ngữ và các năng lực đặc thù khác. Cụ thể:*

a) Môn Toán với ưu thế nổi trội, có nhiều cơ hội để phát triển năng lực tính toán thể hiện ở chỗ vừa cung cấp kiến thức toán học, rèn luyện kĩ năng tính toán, ước lượng, vừa giúp hình thành và phát triển các thành tố của năng lực toán học (năng lực tư duy và lập luận, năng lực mô hình hoá, năng lực giải quyết vấn đề; năng lực giao tiếp và năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán).

b) Môn Toán góp phần phát triển năng lực ngôn ngữ thông qua rèn luyện kĩ năng đọc hiểu, diễn giải, phân tích, đánh giá tình huống có ý nghĩa toán học, thông qua việc sử dụng hiệu quả ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để trình bày, diễn tả các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học.

c) Môn Toán góp phần phát triển năng lực tin học thông qua việc sử dụng các phương tiện, công cụ công nghệ thông tin và truyền thông như công cụ hỗ trợ trong học tập và tự học; tạo dựng môi trường học tập trải nghiệm.

d) Môn Toán góp phần phát triển năng lực thẩm mĩ thông qua việc giúp HS làm quen với lịch sử toán học, với tiểu sử của các nhà toán học và thông qua việc nhận biết vẻ đẹp của Toán học trong thế giới tự nhiên.

II Đánh giá kết quả giáo dục

Mục tiêu đánh giá kết quả giáo dục môn Toán là cung cấp thông tin chính xác, kịp thời, có giá trị về sự phát triển năng lực và sự tiến bộ của HS trên cơ sở yêu cầu cần đạt ở mỗi lớp học, cấp học; điều chỉnh các hoạt động dạy học, bảo đảm sự tiến bộ của từng HS và nâng cao chất lượng giáo dục môn Toán nói riêng và chất lượng giáo dục nói chung.

Vận dụng kết hợp nhiều hình thức đánh giá (đánh giá quá trình, đánh giá định kì), nhiều phương pháp đánh giá (quan sát, ghi lại quá trình thực hiện, vấn đáp, trắc nghiệm khách quan, tự luận, kiểm tra viết, bài tập thực hành, các dự án/sản phẩm học tập, thực hiện nhiệm vụ thực tiễn,...) vào những thời điểm thích hợp.

Đánh giá quá trình (hay đánh giá thường xuyên) do GV phụ trách môn học tổ chức, kết hợp với đánh giá của GV các môn học khác, của bản thân HS được đánh giá và của các HS khác trong tổ, trong lớp hoặc đánh giá của cha mẹ HS. Đánh giá quá trình đi liền với tiến trình hoạt động học tập của HS, tránh tình trạng tách rời giữa quá trình dạy học và quá trình đánh giá, bảo đảm mục tiêu đánh giá vì sự tiến bộ trong học tập của HS.

Đánh giá định kì (hay đánh giá tổng kết) có mục đích chính là đánh giá việc thực hiện các mục tiêu học tập. Kết quả đánh giá định kì và đánh giá tổng kết được sử dụng để chứng nhận cấp độ học tập, công nhận thành tích của HS. Đánh giá định kì do cơ sở giáo dục tổ chức hoặc thông qua các kì kiểm tra, đánh giá quốc gia. Đánh giá định kì còn được sử dụng để phục vụ quản lí các hoạt động dạy học, bảo đảm chất lượng ở cơ sở giáo dục và phục vụ phát triển chương trình môn Toán.

Đánh giá năng lực HS thông qua các bằng chứng biểu hiện kết quả đạt được trong quá trình thực hiện các hành động của HS. Tiến trình đánh giá gồm các bước cơ bản như: xác định mục đích đánh giá; xác định bằng chứng cần thiết; lựa chọn các phương pháp, công cụ đánh giá thích hợp; thu thập bằng chứng; giải thích bằng chứng và đưa ra nhận xét.

Chú trọng việc lựa chọn phương pháp, công cụ đánh giá các thành tố của năng lực toán học. Cụ thể:

- Đánh giá năng lực tư duy và lập luận toán học: có thể sử dụng một số phương pháp, công cụ đánh giá như các câu hỏi (nói, viết), bài tập,... mà đòi hỏi HS phải trình bày, so sánh, phân tích, tổng hợp, hệ thống hoá kiến thức; phải vận dụng kiến thức toán học để giải thích, lập luận.
- Đánh giá năng lực mô hình hoá toán học: lựa chọn những tình huống trong thực tiễn làm xuất hiện bài toán toán học. Từ đó, đòi hỏi HS phải xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị,...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn; giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập; thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tiễn và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.
- Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề toán học: có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nhận dạng tình huống, phát hiện và trình bày vấn đề cần giải quyết; mô tả, giải thích các thông tin ban đầu, mục tiêu, mong muốn của tình huống vấn đề đang xem xét; thu thập, lựa chọn, sắp xếp thông tin và kết nối với kiến thức đã có; sử dụng các câu hỏi (có thể yêu cầu trả lời nói hoặc viết) đòi hỏi người học vận dụng kiến thức vào giải quyết vấn đề, đặc biệt các vấn đề thực tiễn; sử dụng phương pháp quan sát (như bảng kiểm theo các tiêu chí đã xác định), quan sát người học trong quá trình giải quyết vấn đề; đánh giá qua các sản phẩm thực hành của người học (chẳng hạn sản phẩm của các dự án học tập); quan tâm hợp lí đến các nhiệm vụ đánh giá mang tính tích hợp.

- Đánh giá năng lực giao tiếp toán học: có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép (tóm tắt), phân tích, lựa chọn, trích xuất được các thông tin toán học cơ bản, trọng tâm trong văn bản nói hoặc viết; sử dụng được ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường trong việc trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, thảo luận, tranh luận các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác.
- Đánh giá năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán: có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nhận biết được tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng, cách thức bảo quản, ưu điểm, hạn chế của các công cụ, phương tiện học toán; trình bày được cách sử dụng (hợp lí) công cụ, phương tiện học toán để thực hiện nhiệm vụ học tập hoặc để diễn tả những lập luận, chứng minh toán học.

Khi GV lên kế hoạch bài học, cần thiết lập các tiêu chí và cách thức đánh giá để bảo đảm ở cuối mỗi bài học, HS đạt được các yêu cầu cơ bản dựa trên các tiêu chí đã nêu, trước khi thực hiện các hoạt động học tập tiếp theo.

PHẦN HAI HƯỚNG DẪN CỤ THỂ

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

– Mục đích của chương này là trình bày các ứng dụng của đạo hàm trong việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Cụ thể, trình bày các ứng dụng của đạo hàm trong việc xét chiều biến thiên, tìm cực trị và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số đơn giản. Bên cạnh đó, chương này cũng giới thiệu: khái niệm và cách tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số; sơ đồ tổng quát để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số; áp dụng sơ đồ tổng quát vào khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của những hàm số đơn giản, bao gồm hàm số đa thức bậc ba và một số hàm số phân thức đơn giản (hàm số bậc nhất/bậc nhất và hàm số bậc hai/bậc nhất).

– Bên cạnh đó, chương này cũng dành riêng một bài học (Bài 5) trình bày một cách hệ thống việc ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số bài toán trong thực tiễn như: tìm tốc độ thay đổi tức thời của một đại lượng (chính là ý nghĩa thực tế của đạo hàm tại một điểm) và sử dụng phương pháp đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu hoá đơn giản (tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận,...; tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí,...).

2 Cấu tạo chương

– Tổng thời lượng: 24 tiết

– Nội dung:

Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số	6 tiết
Bài 2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	3 tiết
Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	4 tiết

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số	5 tiết
Bài 5. Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn	4 tiết
Bài tập cuối chương I	2 tiết

3 Một số lưu ý

– Theo tinh thần chung của Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 là "tinh giản, thiết thực", một số nội dung lí thuyết mang tính hàn lâm, những bài tập nội dung thuần tuý toán về ứng dụng của đạo hàm được giảm nhẹ. Nói riêng, theo quy định của Chương trình môn Toán năm 2018, SGK Toán 12 mới không đề cập đến các nội dung sau:

+ Quy tắc sử dụng đạo hàm cấp hai để tìm cực trị của hàm số;

+ Cách khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương;

+ Vấn đề tương giao của các đồ thị hàm số;

+ Các bài toán về tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Bên cạnh việc giảm tính hàn lâm và giảm mức độ của các bài tập thuần tuý toán, một điểm mới trong SGK Toán 12 mới này là những ứng dụng thực tế của đạo hàm được nhấn mạnh. Điều này thể hiện rất rõ trong những bài toán ở Tình huống mở đầu, Vận dụng và những bài tập có nội dung thực tiễn được trình bày trong SGK. Nói riêng, SGK Toán 12 dành riêng một bài học (Bài 5) trình bày một cách hệ thống về ứng dụng của đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn. Đây có thể coi là một điểm mới nổi bật so với các SGK Toán 12 trước đây.

– Để đơn giản và tránh sự nặng nề (không thật cần thiết) cho HS, trong định nghĩa các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ trình bày trong SGK Toán 12, chúng tôi không đưa ra điều kiện tường minh tương ứng về tập xác định của hàm số $y=f(x)$, mà các điều kiện này được ngầm chứa trong điều kiện về sự tồn tại các giới hạn tương ứng trong định nghĩa đường tiệm cận. Hơn nữa, vì trong Chương trình và SGK chỉ xét việc tìm tiệm cận (đứng, ngang, xiên) của đồ thị những hàm số đơn giản và quen thuộc, nên trong SGK Toán 12 cũng không trình bày việc tìm tập xác định của hàm số như là một bước bắt buộc để tìm các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị hàm số.

– Trong Bài 4 ở SGK Toán 12, sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (và các ví dụ minh hoạ trong sách) được trình bày theo yêu cầu trong Chương trình môn Toán năm 2018 (xem trang 106 của Chương trình): tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị. Cụ thể, ở đây bảng biến thiên được xem như là bảng tổng hợp ghi kết quả của các bước đã làm trước đó như xét dấu đạo hàm để xét chiều biến thiên (tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến), tìm cực trị (nếu có) của hàm số, tìm các giới hạn đặc biệt của hàm số,... Cách trình bày này giống như trong SGK Toán 12 cũ, bộ Cơ bản.

Tuy nhiên trong thực hành, để thuận lợi hơn cho HS, GV có thể hướng dẫn HS trước đó chỉ cần tìm đạo hàm và tìm các điểm đạo hàm y' bằng 0 hoặc không tồn tại, tìm các giới hạn đặc biệt của hàm số và kết luận về tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có); sau đó lập bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên thì mới nêu các kết luận tương ứng về chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

– Theo yêu cầu quy định trong Chương trình, HS cần nhận biết được tính đối xứng (tâm đối xứng, trục đối xứng) của đồ thị các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right)$; $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c \neq 0, ad - bc \neq 0\right)$ và $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu). Tuy nhiên, yêu cầu ở đây chỉ dừng ở mức nhận biết: nhìn vào đồ thị hàm số và rút ra nhận xét về tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có) của đồ thị, không yêu cầu chứng minh.

Thực chất, về mặt toán học, việc chứng minh chặt chẽ các nhận xét này là khá phức tạp (đặc biệt là về các trục đối xứng của đồ thị hai hàm phân thức ở trên). Sẽ cần đến các phép biến đổi hệ trục toạ độ (phép tịnh tiến, phép quay) với lưu ý rằng đồ thị của các hàm phân thức ở trên chính là các đường hyperbol trong Hình học (và sẽ có phương trình chính tắc trong hệ trục mà hai trục toạ độ chính là hai đường phân giác của các góc tạo bởi các đường tiệm cận của đồ thị).

– Theo yêu cầu của Chương trình mới, HS nên được tham gia tích cực vào các hoạt động trong bài học, từ các hoạt động hình thành kiến thức mới đến các hoạt động luyện tập, vận dụng. SGK đã cố gắng thiết kế các hoạt động tương ứng. GV chỉ nên gợi ý, hướng dẫn cho HS (nếu cần) trong các hoạt động này, hạn chế việc làm thay (hoàn toàn) cho HS.

– Về hình thức dạy học:

+ Nếu có điều kiện thì GV nên chuẩn bị sẵn slide phần đề bài của các hoạt động. Đến hoạt động nào thì trình chiếu yêu cầu của hoạt động đó lên cho HS theo dõi và thực hiện. Việc này vừa tiết kiệm thời gian viết bảng, vừa sinh động hơn và làm HS tập trung hơn vào yêu cầu của GV.

+ Với mỗi hoạt động, có thể cho HS làm việc cá nhân hoặc hoạt động nhóm (tuỳ tính chất của hoạt động). Sau đó, yêu cầu HS trình bày câu trả lời (bằng miệng, giơ bảng trả lời, viết bảng). GV nhận xét và tổng kết, đặc biệt lưu ý phương pháp giải và các sai lầm thường mắc.

+ Với các ví dụ đơn giản trong bài học, GV có thể để HS tự làm và chỉ gợi ý khi cần. Tuy nhiên, với các ví dụ phức tạp hơn, thì có thể xử lí tuỳ theo trình độ chung của HS trong lớp. Nếu ở lớp HS khá, GV chỉ cần phân tích để bài, gợi ý để HS có thể tự làm sau đó sẽ nhận xét và tổng kết phương pháp giải. Còn ở lớp với trình độ chung của HS không tốt, GV có thể chữa mẫu và phân tích kĩ cách giải (theo lược đồ 4 bước của Polya). Sau đó yêu cầu HS làm các bài tập tương tự trong phần Luyện tập, Vận dụng, GV quan sát và trợ giúp HS khi cần.

– Trong mỗi bài học, các gợi ý dạy học và dự kiến thời gian tương ứng cho từng cấu phần của bài học chỉ là một phương án đề xuất. GV có thể dựa trên kinh nghiệm giảng dạy của mình và trình độ chung của HS trong lớp để có thể có phương án hợp lí hơn, miễn là đảm bảo mục tiêu của bài học và HS được tham gia tích cực vào các hoạt động.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (6 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó.

– Thể hiện được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.

– Nhận biết được tính đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

– Nhận biết được điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc mô hình hoá những vấn đề thực tiễn liên quan đến tính đơn điệu và cực trị của hàm số.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào dấu của đạo hàm cấp một, dựa vào bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.
- Chuẩn bị:

  + GV chuẩn bị một số tình huống trong thực tế cần vận dụng xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số để giải quyết.

  + HS chuẩn bị máy tính cầm tay.

III. GỢI Ý DẠY BÀI HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 6 tiết. Cụ thể như sau:

+ Tiết 1, 2: Mục 1. Tính đơn điệu của hàm số;

+ Tiết 3, 4: Mục 2. Cực trị của hàm số;

+ Tiết 5, 6: Chữa bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

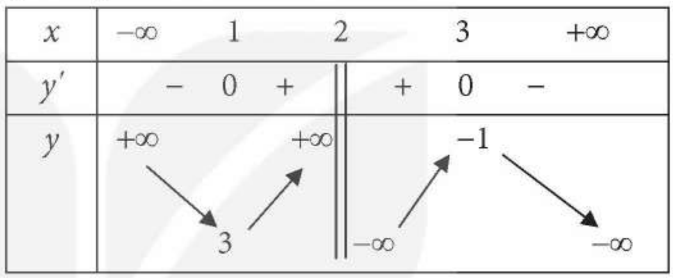
HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu bài toán thực tế để kích thích nhu cầu học tập của HS.

1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ		
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số		
HĐ1. Nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của hàm số	Cho HS nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. GV lưu ý HS nội dung phần Chú ý.
Ví dụ 1	Rèn luyện kĩ năng xác định các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *HD.* Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
HĐ2. Nhận biết mối quan hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm	Cho HS nhận biết được mối liên hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm cấp một.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. GV lưu ý HS nội dung phần Chú ý.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng xác định các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số thông qua dấu của đạo hàm cấp một.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi và tổng kết lại.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng xác định các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải.

	hàm số thông qua dấu của đạo hàm cấp một.	*HD*. Ta có: $y' = -2x + 2$. Nhận xét: $y' > 0$ với mọi $x \in (-\infty; 1)$; $y' < 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

<table>
<tr><th>HOẠT ĐỘNG</th><th>MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU</th><th>GỢI Ý THỰC HIỆN</th></tr>
<tr><td colspan="3">b) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số</td></tr>
<tr><td>HĐ3. Xét tính đơn điệu của hàm số bằng bảng biến thiên</td><td>Cho HS làm quen với các bước xét tính đơn điệu của hàm số.</td><td>HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ3. GV giúp đỡ HS khi cần.
GV ghi bảng hoặc trình chiếu các bước xét tính đơn điệu của hàm số.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 3,
Ví dụ 4</td><td>Rèn luyện kĩ năng xét tính đơn điệu của hàm số.</td><td>HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.</td></tr>
<tr><td>Luyện tập 3</td><td>Củng cố kĩ năng xét tính đơn điệu của hàm số.</td><td>HS tự làm tại lớp.
HD. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
Ta có: $y' = x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -5$.
Lập bảng biến thiên của hàm số:
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -5 & & -1 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & \frac{31}{3} & \searrow & -\frac{1}{3} & \nearrow & +\infty \end{array}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Từ bảng biến thiên, ta có:
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-1;+\infty)$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;-1)$.
b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Ta có:
$y'=\dfrac{(-2x+5)(x-2)-(-x^2+5x-7)}{(x-2)^2}=\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}$
$y'=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.
Lập bảng biến thiên của hàm số:

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng (1; 2) và (2; 3). Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;\,1)$ và $(3;+\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Vận dụng 1</td>
<td>Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.</td>
<td>HS tự làm tại lớp.
HD. a) Ta có
$v(t)=s'(t)=3t^2-18t+15;\ v(t)=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=5$.
b) Ta có $v(t)>0$ khi $t\in(0;1)\cup(5;+\infty)$, $v(t)<0$ khi $t\in(1;5)$.
Vậy chất điểm chuyển động sang phải trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây hoặc trong khoảng thời gian lớn hơn 5 giây; chất điểm chuyển động sang trái trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 5 giây.</td>
</tr>
<tr>
<td>Tổng kết</td>
<td>Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.</td>
<td>GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.</td>
</tr>
</table>

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ		
a) Khái niệm cực trị của hàm số		
HĐ4. Nhận biết khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số	Cho HS nhận biết khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ4. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. GV giải thích các khái niệm: điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số, giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số, cực trị của hàm số trong Chú ý.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng xác định cực trị của hàm số từ đồ thị.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi, tổng kết lại kiến thức và nêu nhận xét.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng xác định cực trị của hàm số từ đồ thị.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết kiến thức. *HD.* Từ đồ thị hàm số, ta có: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=1$. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CĐ}=y(-1)=5$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4

<table>
<tr><th>HOẠT ĐỘNG</th><th>MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU</th><th>GỢI Ý THỰC HIỆN</th></tr>
<tr><td colspan="3">b) Cách tìm cực trị của hàm số</td></tr>
<tr><td>HĐ5. Nhận biết cách tìm cực trị của hàm số</td><td>Cho HS làm quen với các bước xét cực trị của hàm số.</td><td>HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ5. GV giúp đỡ HS khi cần.
GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.</td></tr>
<tr><td></td><td>Giúp HS củng cố khái niệm điểm cực trị của hàm số.</td><td>HD. $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0, ta có bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>a</td><td>x_0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3">↗</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>a</td><td>x_0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3">↘</td></tr>
</table>
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.
GV lưu ý các bước tìm cực trị của hàm số trong phần Chú ý.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 6, Ví dụ 7, Ví dụ 8</td><td>Rèn luyện kĩ năng tìm cực trị của hàm số.</td><td>HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.</td></tr>
<tr><td>Luyện tập 5</td><td>Củng cố kĩ năng tìm cực trị của hàm số.</td><td>HS tự làm tại lớp.
HD. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
Ta có: $y' = 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ hoặc $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.</td></tr>
</table>

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-5}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{-5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ và $y_{CT} = y\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{-5}{4}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

và $y_{CT} = y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{-5}{4}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có:

$$y' = \frac{(-2x+2)(x+2)-(-x^2+2x-1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -5.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ và $y_{CT} = y(-5) = 12$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CĐ} = y(1) = 0$.

Vận dụng 2	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết tình huống thực tế.	*HD.* Ta có $h'(t)=24{,}5-9{,}8t$; $h'(t)=0 \Leftrightarrow t=2{,}5$ (giây). Do $h'(t)>0$ khi $0\le t<2{,}5$, $h'(t)<0$ khi $t>2{,}5$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=2{,}5$ và $\max h(t)=h(2{,}5)=32{,}625$ (m). Cũng có thể nhận xét $h(t)$ là hàm số bậc hai theo t và có hệ số của t^2 là $a=-4{,}9<0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=-\dfrac{b}{2a}=2{,}5$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 5, 6. Chữa bài tập

GV lựa chọn một số bài tập ở cuối bài học tuỳ theo dụng ý sư phạm và cho HS chữa.

3. Phân loại bài tập

- Nhận biết tính đơn điệu của hàm số thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số: Bài tập 1.1.
- Xét tính đơn điệu của hàm số: Bài tập 1.2, 1.3, 1.4.
- Vận dụng cách xét tính đơn điệu của hàm số để giải quyết bài toán thực tiễn: Bài tập 1.5.
- Nhận biết khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và điểm cực trị của hàm số thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số đạo hàm: Bài tập 1.6.
- Tìm cực trị của hàm số: Bài tập 1.7.
- Ví dụ về một hàm số đạt cực trị tại điểm (thuộc tập xác định) mà tại đó đạo hàm không tồn tại: Bài tập 1.8.
- Vận dụng cách tìm cực trị của hàm số để giải quyết bài toán thực tiễn: Bài tập 1.9.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.1. a) Từ đồ thị hàm số suy ra:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Từ đồ thị hàm số suy ra:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

1.2. a) Ta có: $y'=x^2-4x+3$.

Nhận xét: $y'>0$ với mọi $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; $y'<0$ với mọi $x\in(1;3)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

b) Ta có: $y'=-3x^2+4x-5$.

Nhận xét: $y'<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

1.3. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(2x+1)(x-3)-(x^2+x+4)}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=7$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y			-1		$\parallel$ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	$\parallel$	$\searrow$	15	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(7;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;3)$ và $(3;7)$.

1.4. a) Tập xác định của hàm số là $[-2;2]$.

Ta có: $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	-2		0		2
y'	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	
	0				0

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

1.5. a) Dân số của thị trấn vào các năm 2000 và 2015 lần lượt là $N(0) = 2$ (nghìn người) và $N(15) = 19{,}25$ (nghìn người).

b) Ta có $N'(t) = \dfrac{115}{(t+5)^2} > 0$, $t \geq 0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{25t+10}{t+5} = 25$. Vì vậy, số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá 25 nghìn người.

1.6. a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(2;4)$ và $(6;+\infty)$ vì khi đó $f'(x) > 0$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = 2$ và $x = 6$ vì tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 4$ vì tại đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

1.7. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 6x^2 - 18x + 12$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CĐ} = y(1) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = y(2) = -1$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$ và $y_{CT} = y\left(\pm\sqrt{2}\right) = -2$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{2}$ hoặc $x = 1+\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1-\sqrt{2}$ và $y_{CĐ} = y\left(1-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1+\sqrt{2}$ và $y_{CT} = y\left(1+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$.

d) Tập xác định của hàm số là $[0;2]$.

Ta có: $y' = \dfrac{4-4x}{2\sqrt{4x-2x^2}} = \dfrac{2-2x}{\sqrt{4x-2x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	0		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CĐ} = y(1) = \sqrt{2}$.

1.8. a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-0}{x-0} = 1; \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x-0}{x-0} = -1.$

Từ đó suy ra không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, tức là hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

b) Rõ ràng, từ định nghĩa (hoặc từ đồ thị) ta suy ra hàm số $f(x) = |x|$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

1.9. Ta có: $f'(t) = \dfrac{25\,000\mathrm{e}^{-t}}{\left(1+5\mathrm{e}^{-t}\right)^2} > 0, \forall t$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5\,000.$

Do đó, doanh số luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá 5 000.

Ta có: $f''(t) = \dfrac{25\,000\,\mathrm{e}^{-t}\left(25\mathrm{e}^{-2t}-1\right)}{\left(1+5\mathrm{e}^{-t}\right)^4}$; $f''(t) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2t} = \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow t = \ln 5 \approx 1{,}6.$

Do $f''(t) > 0$ với mọi $t \in [0; \ln 5)$ và $f''(t) < 0$ với mọi $t > \ln 5$, nên $f'(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = \ln 5$ và $\max\limits_{t\geq 0} f'(t) = f'(\ln 5) = \dfrac{5000}{(1+1)^2} = 1\,250.$

Vậy sau khi phát hành sản phẩm khoảng 1,6 năm thì tốc độ bán hàng lớn nhất.

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.
- Xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.

2. Về phẩm chất, năng lực

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc mô hình hoá những vấn đề thực tiễn liên quan đến giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu khái niệm và cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Chuẩn bị:

  + GV chuẩn bị một số tình huống trong thực tế liên quan đến giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

  + HS chuẩn bị máy tính cầm tay.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 3 tiết. Cụ thể như sau:

+ Tiết 1: Mục 1. Định nghĩa;

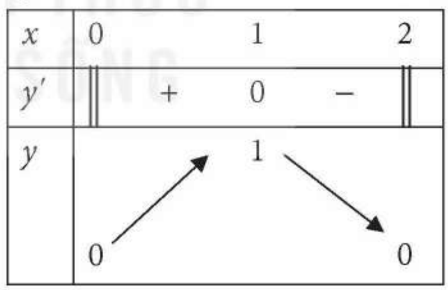
+ Tiết 2: Mục 2. Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn;

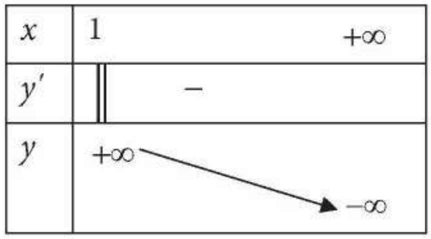
+ Tiết 3: Chữa bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV nêu bài toán thực tế để kích thích nhu cầu học tập của HS.

1. ĐỊNH NGHĨA		
HĐ1. Nhận biết khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	Cho HS nhận biết khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. GV nêu Chú ý và giải thích cho HS.
Ví dụ 1, **Ví dụ 2**	Rèn luyện kĩ năng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi, tổng kết lại kiến thức và nêu nhận xét.
Ví dụ 3	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng vào giải bài toán trong tình huống mở đầu.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi, tổng kết lại kiến thức và nêu nhận xét.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết kiến thức. *HD.* a) Tập xác định của hàm số là [0; 2]. Ta có: $y' = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ với $0 < x < 2$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;2]$:  Từ bảng biến thiên, ta thấy: $\min\limits_{[0;2]} y = y(0) = y(2) = 0;\ \max\limits_{[0;2]} y = y(1) = 1.$ b) $y' = -1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \in (1;+\infty)$. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(-x + \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty;$

		$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty.$ Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$:  Từ bảng biến thiên, hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1;+\infty)$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN		
HĐ2. Hình thành các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn	Cho HS làm quen với các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ2. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 4, Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.	HS tự làm tại lớp. *HD.* a) Ta có: $y' = 6x^2 - 6x + 5 > 0$ với mọi giá trị x. Ta có: $y(0) = 2; y(2) = 16$. Do đó: $\max\limits_{x\in[0;2]} y = y(2) = 16; \min\limits_{x\in[0;2]} y = y(0) = 2$. b) Ta có: $y' = -xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có: $y(0) = 1; y(-1) = 0; y(1) = 2e^{-1}$. Do đó: $\max\limits_{x\in[-1;1]} y = y(0) = 1; \min\limits_{x\in[-1;1]} y = y(-1) = 0$.
Vận dụng	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết tình huống thực tế.	HS tự làm tại lớp. *HD.* a) Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $N(t)$. Ta có: $N'(t) = -3t^2 + 24t = -3t(t-8) = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = 8$ Ta có: $N(0) = 0; N(8) = 256; N(12) = 0$. Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh là 256 người. b) Ta cần tìm t để $N'(t)$ lớn nhất. Ta có: $N''(t) = -6t + 24 = -6(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = 4$. Ta có: $N'(0) = 0; N'(4) = 48; N'(12) = -144$. Do đó, virus lây lan nhanh nhất ở tuần thứ 4.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3. Chữa bài tập

GV lựa chọn một số bài tập ở cuối bài học tuỳ theo dụng ý sư phạm và cho HS chữa tại lớp.

3. Phân loại bài tập

– Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: Bài tập 1.10, 1.11, 1.12.

– Vận dụng cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số để giải quyết các bài toán thực tiễn: Bài tập 1.13, 1.14, 1.15.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.10. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số có giá trị lớn nhất là 7 tại $x = 2$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{4}{3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{[0;+\infty)} y = y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{27}$. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[0;+\infty)$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}$ hoặc $x=1+\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y			$-2\sqrt{2}$		‖ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		$2\sqrt{2}$		

Từ bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{(1;+\infty)} y=y\left(1+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$. Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $(1;+\infty)$.

d) Tập xác định của hàm số là $[0;2]$.

Ta có: $y'=\dfrac{4-4x}{2\sqrt{4x-2x^2}}=\dfrac{2-2x}{\sqrt{4x-2x^2}}$ với $0<x<2$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	0		1		2
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y			$\sqrt{2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ tại $x=1$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x=0$ và $x=2$.

1.11. a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1$ hoặc $x = -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt giá trị giá trị nhỏ nhất là 2 tại $x = \pm 1$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = e^{-x} - xe^{-x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{e}$ tại $x = 1$.

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

c) Tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.

Ta có: $y' = \ln x + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{e}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Tập xác định của hàm số là $[1;3]$.

Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$ với $1 < x < 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $y(1) = \sqrt{2}$; $y(2) = 2$; $y(3) = \sqrt{2}$.

Do đó: $\max\limits_{[1;3]} y = y(2) = 2$; $\min\limits_{[1;3]} y = y(1) = y(3) = \sqrt{2}$.

1.12. a) Ta có: $y' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Ta có: $y(-1) = 7$; $y(1) = -1$; $y(2) = 7$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;2]} y = y(-1) = y(2) = 7$; $\min\limits_{[-1;2]} y = y(1) = -1$.

b) Ta có: $y' = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (vì $x \in [0; 3]$).

Ta có: $y(0) = 2$; $y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$; $y(3) = 56$.

Do đó: $\max\limits_{[0;3]} y = y(3) = 56$; $\min\limits_{[0;3]} y = y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$.

c) Ta có: $y' = 1 - 2\cos 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $2x = \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6}$ (vì $x \in [0;\pi]$).

Ta có: $y(0)=0; y(\pi)=\pi; y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}; y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó: $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}; \min\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Ta có: $y'=(2x-1)e^x+(x^2-x)e^x; y'=0 \Leftrightarrow e^x(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(do $x\in[0; 1]$).

Ta có: $y(0)=0; y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx -0,44; y(1)=0$.

Do đó: $\max\limits_{[0;1]} y = y(0)=y(1)=0; \min\limits_{[0;1]} y = y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx -0,44$.

1.13. Gọi x (cm) là chiều dài của hình chữ nhật. Điều kiện: $0<x<12$.

Chiều rộng của hình chữ nhật là: $12-x$ (cm).

Diện tích của hình chữ nhật là: $x(12-x)$ (cm^2).

Đặt $f(x)=x(12-x)=-x^2+12x, 0<x<12$.

Ta cần tìm x sao cho $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có: $f'(x)=-2x+12=0 \Leftrightarrow x=6$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng (0; 12), ta được $\max\limits_{(0;12)} f(x)=f(6)=36$.

Do đó, diện tích của hình chữ nhật lớn nhất khi chiều dài của hình chữ nhật là 6 cm, tức là hình chữ nhật trở thành hình vuông có độ dài cạnh 6 cm.

Vậy hình vuông có độ dài cạnh 6 cm là hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

1.14. Diện tích bề mặt của chiếc hộp là $4xh+x^2=108$, khi đó $h=\frac{108-x^2}{4x}, 0<x<\sqrt{108}$.

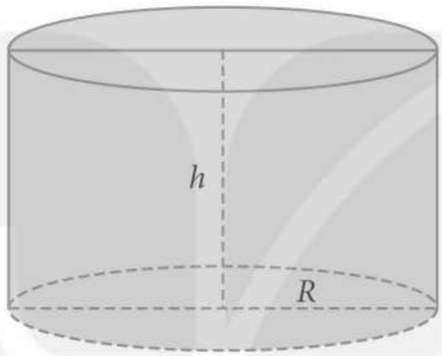
Thể tích của chiếc hộp là $V=x^2h=\frac{1}{4}x(108-x^2)=-\frac{1}{4}x^3+27x$.

Ta có $V' = -\frac{3}{4}x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$

x	0		6		$\sqrt{108}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$V(6)$	$\searrow$	0

Vậy với $x = 6$ cm, $h = 3$ cm thì thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.

1.15.



Gọi R (cm) là bán kính đáy của chiếc bình hình trụ. Điều kiện: $R > 0$.

Do thể tích của chiếc bình là 1 000 cm^3 nên ta có chiều cao của bình là $\frac{1\,000}{\pi R^2}$ cm.

Tổng diện tích mặt trên và mặt dưới của bình là: $2\pi R^2$ (cm^2).

Diện tích mặt bên của bình là: $2\pi R \cdot \frac{1\,000}{\pi R^2} = \frac{2\,000}{R}$ (cm^2).

Do đó, tổng chi phí vật liệu để sản xuất một chiếc bình là:

$$M = 2\pi R^2 \cdot 1{,}2 + \frac{2\,000}{R} \cdot 0{,}75 = 2{,}4\pi R^2 + \frac{1\,500}{R} \text{ (nghìn đồng).}$$

Ta cần tìm R để M nhỏ nhất.

Ta có: $M' = 4{,}8\pi R - \frac{1\,500}{R^2}$; $M' = 0 \Leftrightarrow 4{,}8\pi R^3 = 1\,500 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1\,500}{4{,}8\pi}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{1500}{4,8\pi}}$		$+\infty$
M'		$-$	0	$+$	
M	$+\infty$	$\searrow$	$M\left(\sqrt[3]{\dfrac{1500}{4,8\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, chi phí vật liệu sản xuất nhỏ nhất khi $R=\sqrt[3]{\dfrac{1500}{4,8\pi}}$.

Vậy chi phí vật liệu sản xuất nhỏ nhất khi bán kính đáy của bình bằng $\sqrt[3]{\dfrac{1500}{4,8\pi}}$cm.

(Khi đó, do thể tích của bình là 1 000 cm^3, ta sẽ tính được chiều cao của bình theo bán kính đáy).

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Nhận biết hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

2. Về phẩm chất, năng lực

- Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Bồi dưỡng năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán thông qua việc xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, so với SGK Toán 12 cũ bộ Cơ bản, ở đây có thêm nội dung đường tiệm cận xiên. Điều này là do việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ là một yêu cầu cần đạt trong Chương trình môn Toán năm 2018.

- Đường tiệm cận của đồ thị hàm số là hình ảnh hình học của giới hạn tại vô cực/giới hạn vô cực của hàm số. Nội dung giới hạn của hàm số đã được học ở Chương trình môn Toán lớp 11, nội dung đường tiệm cận của đồ thị hàm số sẽ được sử dụng trong việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ở bài sau.
- GV có thể sử dụng phần mềm Toán như GeoGebra để vẽ đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Nếu có điều kiện, GV có thể chuẩn bị trước bản in hoặc bản mềm để trình chiếu các hình vẽ trong bài để giúp HS dễ hình dung được hình ảnh hình học của các đường tiệm cận.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 4 tiết. Cụ thể như sau:

+ Tiết 1: Mục 1: Đường tiệm cận ngang;

+ Tiết 2: Mục 2: Đường tiệm cận đứng;

+ Tiết 3: Mục 3: Đường tiệm cận xiên;

+ Tiết 4: Chữa bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	Đây là bài toán về khối lượng còn lại của một chất phóng xạ sau một khoảng thời gian phân rã.
1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG		
HĐ1. Nhận biết đường tiệm cận ngang	Giúp HS hình thành khái niệm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.	HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý HS đường tiệm cận ngang là hình ảnh hình học của giới hạn tại vô cực.

Ví dụ 1	Thực hành tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.	GV nhắc lại cách tính giới hạn tại vô cực của hàm số phân thức hữu tỉ. HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 2	Thực hành tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trong trường hợp $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.	GV lưu ý cách đưa một đại lượng vào bên trong căn bậc hai. Từ đó tính hai giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Nhấn mạnh trong trường hợp hai giới hạn này khác nhau, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.	HS tự làm tại lớp. GV lưu ý HS thực hiện tương tự như Ví dụ 1. *HD*. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2.$ Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là $y = 2$.
Vận dụng 1	Giải bài toán trong tình huống mở đầu.	HS tự làm tại lớp. *HD*. Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} m(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 15e^{-0,012t} = 0.$ Đồ thị của hàm khối lượng $m(t)$ "tiệm cận" đến đường thẳng $y = 0$, tức là khối lượng của chất phóng xạ giảm dần về 0 khi thời gian tăng lên vô cùng.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG		
HĐ2. Nhận biết đường tiệm cận đứng	Giúp HS hình thành khái niệm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.	HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ2. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý HS đường tiệm cận đứng là hình ảnh hình học của giới hạn vô cực.

Ví dụ 3	Thực hành tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.	Lưu ý HS về quy tắc tính giới hạn vô cực của thương hai hàm số (HS đã học ở lớp 11) ở đó quan tâm đến giới hạn của tử thức và dấu của mẫu thức.
Ví dụ 4	Thực hành tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.	HS tự làm tại lớp. *HD*. Để tìm tiệm cận ngang, ta tính: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{4}{x}} = 2.$ Vậy $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$. Xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm $x=4$, ta có: $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty.$ Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=4$.
Vận dụng 2	Giải bài toán thực tế, tìm hiểu ý nghĩa của tiệm cận đứng trong một tình huống cụ thể.	HS tự làm tại lớp. *HD*. Do $\lim\limits_{p\to100^-} C(p) = \lim\limits_{p\to100^-} \dfrac{45p}{100-p} = +\infty$ nên $p=100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$. Đường tiệm cận đứng cho ta biết rằng không thể loại bỏ 100% tảo độc ra khỏi hồ nước.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN		
HĐ3. Nhận biết đường tiệm cận xiên	Giúp HS hình thành khái niệm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.	HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ3. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý HS đường tiệm cận xiên là hình ảnh hình học của giới hạn tại vô cực của hiệu hai hàm số.
Ví dụ 5	Thực hành tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Chú ý về cách tìm tiệm cận xiên trong trường hợp tổng quát.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Sau Ví dụ 5, GV lưu ý HS về quy tắc tổng quát để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Ta phải tính hai giới hạn: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (hoặc $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$); $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ (hoặc $b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$).
Ví dụ 6	Thực hành tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số theo cách đã chỉ dẫn sau Ví dụ 5.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý HS có thể không cần tính đồng thời các giới hạn tại $+\infty$ và $-\infty$ (vì đối với hàm phân thức, hai giới hạn này luôn bằng nhau). Với hàm số dạng phân thức bậc hai trên bậc nhất, ta có thể dùng cách chia đa thức để tìm tiệm cận xiên của đồ thị.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Cách 1: Tính $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+2}{x-x^2}=-1,$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{1-x}=3.$ Vậy $y=-x+3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

		Cách 2: Chia đa thức $$f(x)=-x+3-\frac{1}{1-x}.$$ Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=0.$ Vậy $y=-x+3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
Chữa bài tập	GV gợi ý/hướng dẫn HS làm một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4. Chữa bài tập

3. Phân loại bài tập

- Củng cố khái niệm đường tiệm cận của đồ thị hàm số: Bài tập 1.16, 1.17.
- Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số: Bài tập 1.18.
- Vận dụng giải bài toán thực tế: Bài tập 1.19, 1.20.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.16. Căn cứ vào đồ thị, ta thấy:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty.$

b) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang, các đường thẳng $x=-1, x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

1.17. Đường thẳng $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$ vì $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4.$

1.18. a) Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{2x+1}=-\dfrac{1}{2}$ nên $y=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Mặt khác, ta có: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{3-x}{2x+1}=+\infty$, nên $x=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Ta có $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Mặt khác, ta có:

$f(x)=2x-3+\dfrac{5}{x+2}$.

Từ đó suy ra $y=2x-3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

1.19. Ta có $f(x)=\dfrac{2x+50}{x}=2+\dfrac{50}{x}$. Từ đó $f(x)$ là hàm giảm và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Điều này cho thấy chi phí trung bình không thể thấp hơn hoặc bằng 2 triệu đồng. Tuy nhiên, khi số lượng sản phẩm sản xuất được càng lớn thì chi phí trung bình càng gần với 2 triệu đồng.

1.20. Độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là: $y=\dfrac{144}{x}$ (m).

a) Chu vi của mảnh vườn là: $P(x)=2(x+y)=2x+\dfrac{288}{x}$.

b) Đồ thị của hàm số $P(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x$. Trên thực tế, nếu x quá nhỏ hoặc quá lớn thì $P(x)$ cũng sẽ rất lớn. (Vì diện tích mảnh vườn không đổi nên nếu một cạnh có độ dài dần đến 0 hoặc dần đến $+\infty$ thì chu vi của mảnh vườn sẽ dần đến $+\infty$).

Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ (5 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Mô tả sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị).

– Khảo sát tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: hàm bậc ba, hàm phân thức hữu tỉ đơn giản.

– Nhận biết tính đối xứng (tâm đối xứng, trục đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

2. Về năng lực, phẩm chất

– Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học và mô hình hoá toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

– Bồi dưỡng năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán thông qua việc lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

– Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Về mặt nội dung, so với SGK Toán 12 cũ bộ Cơ bản, ở đây không có nội dung khảo sát và vẽ đồ thị của hàm bậc bốn trùng phương, tuy vậy có thêm nội dung khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất.

– Nội dung bài học này liên quan chặt chẽ với những kiến thức về tính đơn điệu và cực trị của hàm số trong các bài học trước, đồng thời kế thừa những kiến thức về đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

– Một số bài tập vận dụng liên quan đến Hoá học, tuy nhiên không đòi hỏi HS phải có kiến thức Hoá học trong chương trình THPT.

– GV có thể sử dụng phần mềm Toán như GeoGebra để vẽ đồ thị của hàm số và các yếu tố liên quan.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng:

Gợi ý phân phối thời gian dạy học 5 tiết. Cụ thể như sau:

+ Tiết 1: Mục 1: Sơ đồ khảo sát hàm số;

+ Tiết 2: Mục 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đa thức bậc ba;

+ Tiết 3: Mục 3.a: Hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$;

+ Tiết 4: Mục 3.b: Hàm số phân thức $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a \neq 0, p \neq 0,$ đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu);

+ Tiết 5: Chữa bài tập cuối bài học.

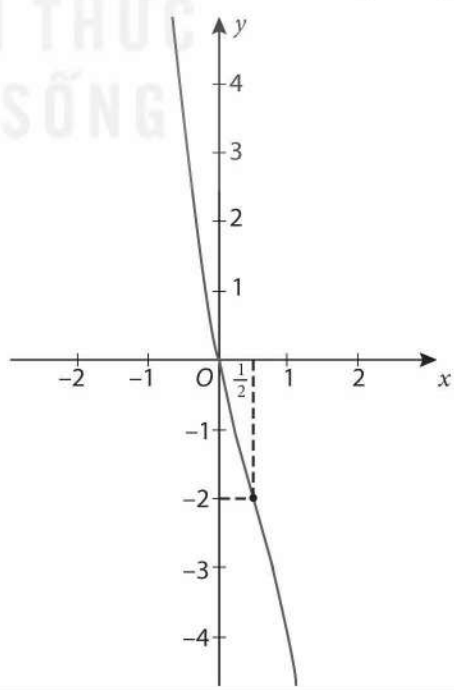
2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV nêu bài toán thực tế về chi phí sản xuất để kích thích nhu cầu học tập của HS.
1. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ		
HĐ1. Làm quen với việc khảo sát và vẽ đồ thị hàm số	Giúp HS hình thành sơ đồ khảo sát hàm số nói chung.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu, dựa vào kiến thức đã biết về khoảng đơn điệu, cực trị và bảng biến thiên của hàm số.
Lập sơ đồ khảo sát hàm số	Trình bày các bước khảo sát và vẽ đồ thị của một hàm số.	GV ghi lên bảng hoặc trình chiếu sơ đồ khảo sát và vẽ đồ thị của một hàm số nói chung. Ngoài ra, thông qua ví dụ trong HĐ1, GV lưu ý việc tìm các điểm đặc biệt của đồ thị bao gồm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ, nhận xét về tính đối xứng của đồ thị.
Luyện tập		GV có thể cho HS luyện tập khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (cả hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$).
Tổng kết	Dành cho dự phòng. GV tổng kết các nội dung đã học.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA		
Ví dụ 1	Thực hành khảo sát hàm số đa thức bậc ba trong trường hợp hàm số có cực trị.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV lưu ý HS về tâm đối xứng của đồ thị hàm bậc ba.
Ví dụ 2	Thực hành khảo sát hàm số đa thức bậc ba trong trường hợp hàm số không có cực trị.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

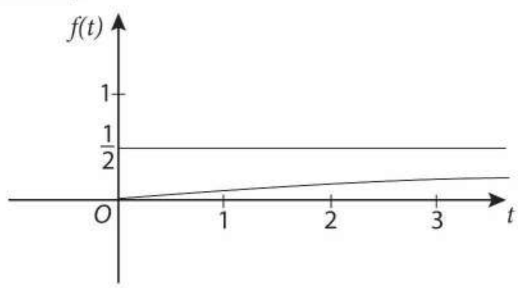
<table>
<tr>
<td>Luyện tập 1</td>
<td>Củng cố kĩ năng khảo sát hàm số đa thức bậc ba.</td>
<td>
HS tự làm tại lớp.
HD.
1) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.
2) Sự biến thiên:
+ Ta có: $y' = -6x^2 + 6x - 5$. Vậy $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
+ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
+ Hàm số không có cực trị.
+ Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.
+ Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
3) Đồ thị: Đồ thị của hàm số đi qua gốc toạ độ và có tâm đối xứng là điểm $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.


</td>
</tr>
</table>

Tổng kết	Dành cho dự phòng. GV tổng kết các nội dung đã học.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ		
a) Hàm số phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$		
Ví dụ 3	Thực hành khảo sát hàm số phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV yêu cầu HS nhắc lại cách tìm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số, lưu ý hàm số bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị.
Chú ý	HS nhận biết tâm đối xứng của đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất chính là giao điểm của hai đường tiệm cận. Ngoài ra, HS nhận biết hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị là các trục đối xứng.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu.
Luyện tập 2	Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*. Củng cố kĩ năng khảo sát hàm số phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có $f(x)=\dfrac{2x+45}{x}=2+\dfrac{45}{x}, x\geq 1.$ Khi đó $f'(x)=-\dfrac{45}{x^2}<0$ với mọi $x\geq 1$. Vậy hàm số nghịch biến trên $[1;+\infty)$, chứng tỏ chi phí trung bình giảm theo x. Hơn nữa, ta thấy $f(x)>2$ với mọi $x\geq 1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Từ đó, ta nhận thấy chi phí

		trung bình giảm nhưng luôn lớn hơn 2 triệu đồng/sản phẩm. Ngoài ra, khi x càng lớn thì chi phí trung bình càng gần với 2 triệu đồng.
Vận dụng	Mô hình hoá một bài toán thực tế dưới dạng một hàm số phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất và khảo sát hàm số này.	HS tự làm tại lớp. *HD.* a) Nồng độ chất khử trùng sau t phút là $\dfrac{20t}{200+40t}$ (gam/lít). b) Ta có $f(t)=\dfrac{t}{10+2t}$, $t\geq 0$. Tập xác định: $[0;+\infty)$. Sự biến thiên: + $f'(t)=\dfrac{10}{(10+2t)^2}>0$ với mọi $t\geq 0$. + Hàm số đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$. + Đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. + Bảng biến thiên: $\begin{array}{c\|ccc} t & 0 & & +\infty \\ \hline f'(t) & & + & \\ \hline f(t) & & & \dfrac{1}{2} \\ & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$ + Đồ thị: 

		c) Do $f(t)$ là hàm tăng nên nồng độ chất khử trùng tăng theo thời gian. Tuy nhiên, do $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0{,}5$ nên nồng độ này không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.
Tổng kết	Dành cho dự phòng. GV tổng kết các nội dung đã học.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
b) Hàm số phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0, p\neq 0,$ đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)		
Ví dụ 4	Thực hành khảo sát hàm số phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất trong trường hợp hàm số có cực trị.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV yêu cầu HS nhắc lại cách tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
Ví dụ 5	Thực hành khảo sát hàm số phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất trong trường hợp hàm số không có cực trị.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV yêu cầu HS nhận xét về tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số.
Chú ý	HS nhận biết được đồ thị của hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận. Hơn nữa, đồ thị này nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của nó làm các trục đối xứng.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng khảo sát hàm số phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất.	HS tự làm tại lớp. *HD.* 1) Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

2) Sự biến thiên: Ta có $y=-x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

+ $y'=-1-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

+ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

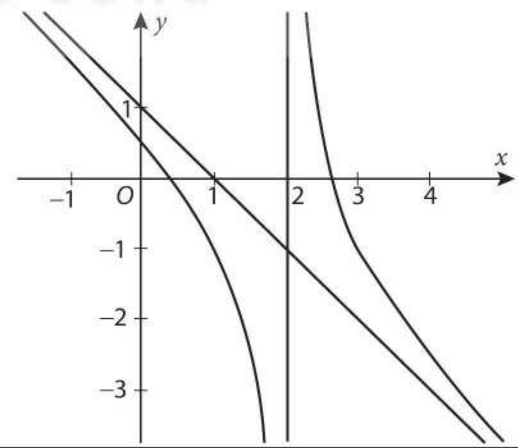
+ Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận: $y=-x+1$ là tiệm cận xiên, $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

+ Đồ thị: Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, cắt trục hoành tại các điểm $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};0\right)$. Đồ thị có tâm đối xứng là điểm $(2;-1)$.



Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 5. Chữa bài tập

3. Phân loại bài tập

– Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: Bài tập 1.21, 1.22, 1.23.

– Vận dụng giải bài toán thực tế: Bài tập 1.24, 1.25.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.21. a) Ta có: $y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0$ khi $x = \pm 1$.

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

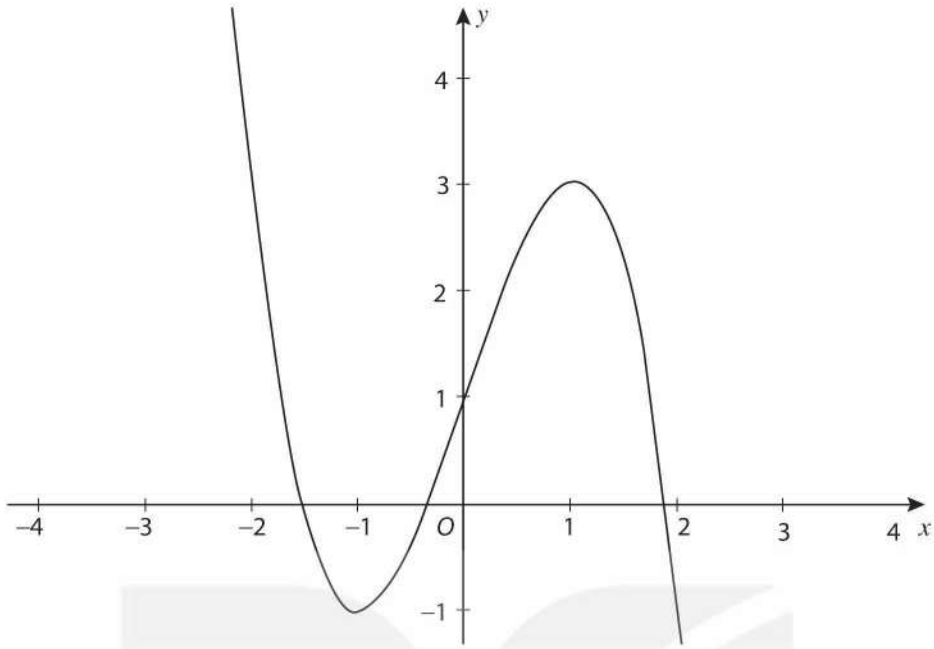
+ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CĐ} = 3$, đạt cực tiểu tại $x = -1$ với $y_{CT} = -1$.

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$	
			-1				$-\infty$

+ Đồ thị: Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;1)$, điểm này đồng thời là tâm đối xứng của đồ thị.



b) Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 1$. Do đó $y' = 0$ khi $x = x_1 = -1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = x_2 = -1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

+ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(x_1; x_2)$.

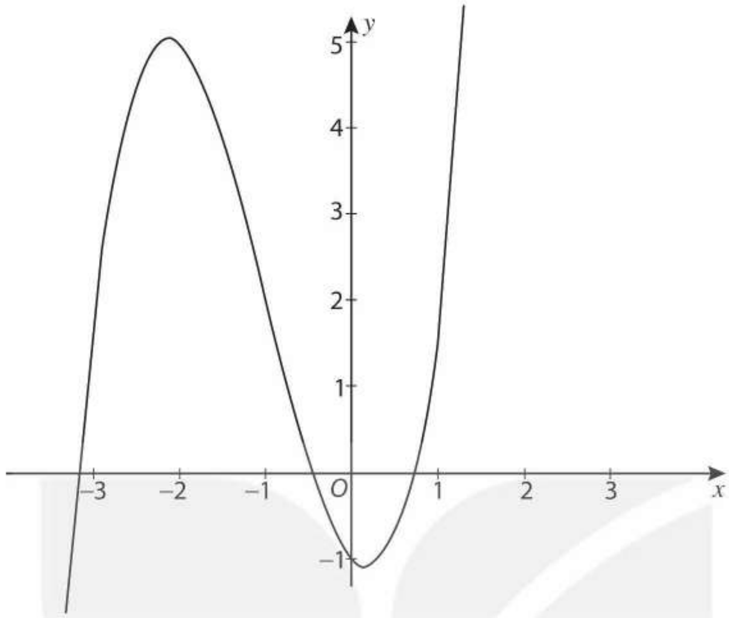
+ Hàm số đạt cực đại tại $x = x_1$ với $y_{CĐ} = f(x_1)$, đạt cực tiểu tại $x = x_2$ với $y_{CT} = f(x_2)$.

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$-1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

+ Đồ thị: Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, có tâm đối xứng là điểm $(-1;2)$.



1.22. a) Ta có: $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

+ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

+ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;1)$, cắt trục hoành tại điểm $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. Điểm $(-1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Ta có: $y' = \dfrac{4}{(1-x)^2} > 0$ với mọi $x \neq 1$.

+ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

+ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;3)$, cắt trục hoành tại điểm $(-3;0)$. Điểm $(1;-1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

1.23. a) Viết $y=2x+1+\frac{5}{x-1}$, ta có $y'=2-\frac{5}{(x-1)^2}$, $y'=0$ khi $x=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

+ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2};+\infty\right)$;

nghịch biến trên từng khoảng $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};1\right)$ và $\left(1;1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=x_1=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$, đạt cực tiểu tại $x=x_2=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$.

+ Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+1$, tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{10}}{2}$		1		$1+\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

b) Viết $y=x-1+\frac{4}{x+3}$. Khi đó $y'=1-\frac{4}{(x+3)^2}$, $y'=0$ khi $x=-1$ hoặc $x=-5$.

+ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên từng khoảng $(-5;-3)$ và $(-3;-1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-5$, đạt cực tiểu tại $x=-1$.

+ Đường thẳng $y=x-1$ là tiệm cận xiên, đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1.24. a) Ta có $C(x)=\dfrac{3\,000+8x}{30+x}$, $x\geq 0$.

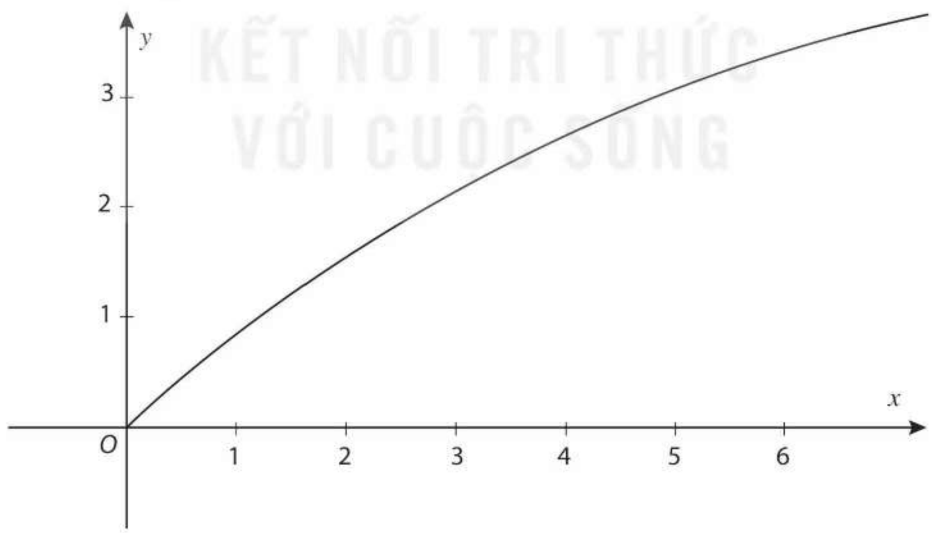
b) Khảo sát hàm số $C(x)$ với $x\geq 0$. Ta có $C'(x)=-\dfrac{2\,760}{(x+30)^2}<0$ với mọi $x\geq 0$.

+ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)=8$.

c) Từ đó, ta thấy nồng độ KOH giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml.

1.25. Ta có $R(x)=\dfrac{8x}{8+x}, x>0$. Đồ thị của hàm số $R(x)$ như sau:



a) Căn cứ vào đồ thị, ta thấy điện trở tương đương của mạch tăng khi x tăng.

b) Do $R(x)$ là hàm tăng và $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x)=8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8 Ω.

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn như tính tốc độ tức thời của một đại lượng, giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản trong thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

– Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc mô hình hoá những vấn đề thực tiễn liên quan đến đạo hàm và khảo sát hàm số.

– Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu những bài toán thực tiễn như tính tốc độ tức thời của một đại lượng, giải bài toán tối ưu hoá trong thực tế.

– Chuẩn bị:

+ GV: chuẩn bị một số tình huống trong thực tế liên quan đến tính tốc độ tức thời của một đại lượng, giải bài toán tối ưu hoá trong thực tế.

+ HS: chuẩn bị máy tính cầm tay.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 4 tiết. Cụ thể như sau:

+ Tiết 1, 2: Mục 1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng;

+ Tiết 3, 4: Mục 2. Một vài bài toán tối ưu hoá đơn giản.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1, 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV nêu bài toán thực tế để kích thích nhu cầu học tập.
1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG		
Đoạn mở đầu mục	Giới thiệu hàm số thể hiện tốc độ thay đổi tức thời của của y đối với x.	– GV giới thiệu cho HS tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y=f(x)$ đối với đại lượng x tại thời điểm $x=a$. – GV giới thiệu ý nghĩa thực tế của tốc độ thay đổi tức thời trong một số trường hợp thường gặp của đại lượng y: hàm vị trí, nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, hàm chi phí.
Ví dụ 1, **Ví dụ 2,** **Ví dụ 3,** **Ví dụ 4**	Rèn luyện kĩ năng giải quyết bài toán liên quan đến tốc độ thay đổi của một đại lượng.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi, tổng kết lại kiến thức và nêu nhận xét.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng giải quyết bài toán liên quan đến tốc độ thay đổi của một đại lượng.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết kiến thức. *HD.* Ta có: $P'=\dfrac{50t\left(t^2+1\right)-2t\left(25t^2+125\right)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-200t}{(t^2+1)^2}$. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là $P'(5)=\dfrac{-250}{169}$ (mmHg/s).

Chữa bài tập	Chữa một số bài tập cuối bài học liên quan đến nội dung mục này	Cho HS chữa các bài tập 1.26 và 1.27 tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của Mục 1, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3, 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN		
Đoạn mở đầu mục	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	Giới thiệu những tình huống cần tối ưu hoá thường gặp trong thực tế.
Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá	Giúp HS nắm được quy trình giải một bài toán tối ưu hoá.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu các bước giải một bài toán tối ưu hoá.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng giải một bài toán tối ưu.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV lưu ý HS nội dung phần Chú ý.
Luyện tập 2	Củng cố, rèn luyện kĩ năng giải một bài toán tối ưu.	HS làm việc tại lớp dưới sự hướng dẫn của GV. *HD*. Gọi x (km) là độ dài đoạn CD. Điều kiện: $0 \le x \le 8$. Độ dài quãng đường chèo thuyền là: $S_1 = \sqrt{x^2+9}$. Do vận tốc chèo thuyền là 6 km/h nên thời gian chèo thuyền là: $t_1 = \frac{S_1}{6} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$. Độ dài quãng đường chạy bộ là $S_2 = 8 - x$. Do vận tốc chạy bộ là 8 km/h nên thời gian

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
chạy bộ là: $t_2 = \frac{S_2}{8} = \frac{8-x}{8}$.

Do đó tổng thời gian đi từ A đến B của anh An là

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}.$$

Ta cần tìm x sao cho t đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có:

$$t' = \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9\sqrt{7}}{7}.$$

Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \frac{9\sqrt{7}}{7} & & 8 \\ \hline t'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline t(x) & \frac{3}{2} & \searrow & & \nearrow & \frac{\sqrt{73}}{6} \\ & & & \frac{1}{8}\left(8+\sqrt{7}\right) & & \end{array}$$

Vậy anh An cần chèo thuyền đến điểm cách điểm C một khoảng là $\frac{9\sqrt{7}}{7} \approx 3{,}402$ (km) để thời gian đến điểm B là ngắn nhất.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ví dụ 6</td>
<td>Rèn luyện kĩ năng giải một bài toán tối ưu trong kinh tế.</td>
<td>GV nhắc lại các khái niệm hàm chi phí, hàm cầu, hàm doanh thu và hàm lợi nhuận trong kinh tế.
HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ví dụ 7</td>
<td>Rèn luyện kĩ năng rút ra các kết luận thực tiễn từ việc khảo sát hàm số trong mô hình thực tế đang xét.</td>
<td>HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Vận dụng</td>
<td>Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết tình huống thực tế.</td>
<td>HS tự làm tại lớp.
HD. a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi chiếc ti vi. Ta cần xác định hàm cầu $p(x)$.
Giá $p_1 = 14$ ứng với $x_1 = 1\ 000$, và giá $p_2 = 13{,}5$ ứng với $x_2 = 1\ 000 + 100 = 1\ 100$.
Do đó, ta có:
$$p - 14 = \frac{14 - 13{,}5}{1000 - 1100}(x - 1\ 000), \text{ hay}$$
$$p = -\frac{1}{200}(x - 1\ 000) + 14 = -\frac{1}{200}x + 19.$$
b) Hàm doanh thu từ số ti vi bán được là:
$$R(x) = px = x\left(-\frac{1}{200}x + 19\right) = -\frac{1}{200}x^2 + 19x.$$
Ta cần tìm x sao cho R đạt giá trị lớn nhất.
Ta có:
$$R'(x) = -\frac{1}{100}x + 19; R'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1900.$$
Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1 900</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$R'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$R(x)$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>18 050</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
Với $x = 1\ 900$ thì $p = 9{,}5$.
Vậy với giá bán là 9,5 triệu đồng, tức là công ty nên giảm 4,5 triệu thì doanh thu là lớn nhất.
c) Hàm lợi nhuận là:
$$P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{200}x^2 + 22x - 12\ 000.$$
Ta cần tìm x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.
Ta có:
$$P'(x) = -\frac{1}{100}x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2\ 200.$$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $2\,200$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$P'(x)$</td><td>$+$ 0 $-$</td></tr>
<tr><td>$P(x)$</td><td>0 ↗ $12\,200$ ↘ $-\infty$</td></tr>
</table>
Với $x = 2\,200$ thì $p = 8$.
Vậy với giá bán là 8 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.</td></tr>
<tr><td>Chữa bài tập</td><td>Chữa một số bài tập cuối bài học liên quan đến nội dung của mục này</td><td>GV cho HS chữa các bài tập 1.28 và 1.29 tại lớp.</td></tr>
<tr><td>Tổng kết</td><td>Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của mục 2, dặn dò công việc về nhà.</td><td>GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.</td></tr>
</table>

3. Lựa chọn bài tập

– Vận dụng đạo hàm để giải quyết bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng: Bài tập 1.26, 1.27.

– Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết các bài toán tối ưu hoá: Bài tập 1.28, 1.29.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.26. a) Hàm vận tốc: $v = y' = 3t^2 - 12$.

Hàm gia tốc: $a = v' = 6t$.

b) Vì chiều dương của trục là chiều thẳng đứng hướng lên trên nên hạt chuyển động lên trên khi $v > 0$, chuyển động xuống dưới khi $v < 0$.

Do đó, vật chuyển động lên trên khi $t \in (2; +\infty)$ và chuyển động xuống dưới khi $t \in (0; 2)$.

c) Từ $t=0$ đến $t=2$, vật chuyển động từ toạ độ $y=3$ đến toạ độ $y=-13$, tức là vật đi được quãng đường 16 đơn vị độ dài.

Từ $t=2$ đến $t=3$, vật chuyển động từ toạ độ $y=-13$ đến toạ độ $y=-6$, tức là vật đi được quãng đường 7 đơn vị độ dài.

Do đó, trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$, vật đi được quãng đường 23 đơn vị độ dài.

d) Hạt tăng tốc khi $a>0$, hạt giảm tốc khi $a<0$.

Mà $a=6t, \forall t \ge 0$ nên hạt luôn tăng tốc.

1.27. a) Hàm chi phí biên $C'(x)=50-x+0{,}00525x^2$.

b) $C'(100)=2{,}5$. Chi phí biên tại x = 100 là 2,5 (trăm nghìn đồng), nghĩa là ta dự đoán chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 101) là khoảng 250 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101 là $C(101)-C(100)\approx 2{,}527$ (trăm nghìn đồng). Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(100)$ đã tính ở câu b.

1.28. Gọi p (triệu đồng) là giá thuê căn hộ một tháng. Ta cần xác định hàm cầu.

Giá thuê p = 8 ứng với x = 100, và giá thuê p = 8,1 ứng với x = 99. Do đó, ta có:

$p-8=\dfrac{8-8{,}1}{100-99}(x-100)$, hay $p-8=-\dfrac{1}{10}(x-100)$, tức là $x=-10p+180$.

Hàm doanh thu từ tiền cho thuê căn hộ là:

$$R(p)=px=p(-10p+180)=-10p^2+180p.$$

Ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất. Ta có: $R'(p)=-20p+180=0 \Leftrightarrow p=9$.
Bảng biến thiên:

p	0		9		$+\infty$
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$	0	$\nearrow$	810	$\searrow$	$-\infty$

Vậy với giá thuê là 9 triệu đồng thì doanh thu là lớn nhất.

1.29. a) Ta có: $x = \dfrac{35\,400 - 100p}{p}$.

Do $x \geq 0$ và $p > 0$ nên suy ra $0 < p \leq 354$. Vậy tập xác định của hàm số $x = x(p)$ là nửa khoảng $(0;354]$.

b) Ta có: $x'(p) = -\dfrac{35\,400}{p^2} < 0, \forall x \in (0;354]$. Suy ra hàm số $x = x(p)$ nghịch biến trên nửa khoảng $(0;354]$.

Do đó, số lượng đơn vị sản phẩm bán được x sẽ giảm khi giá bán p tăng.

Ta có: $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p) = \lim\limits_{p\to 0^+} \dfrac{35\,400 - 100p}{p} = +\infty$. Điều này chứng tỏ khi giá bán p dần về 0 đồng thì số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ tăng lên vô hạn.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I (2 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

– GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị slide dạng sơ đồ hoá).

– GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.

– Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

A – TRẮC NGHIỆM

1.30. B	**1.31.** A	**1.32.** D	**1.33.** C	**1.34.** B
1.35. B	**1.36.** D	**1.37.** D	**1.38.** B	**1.39.** D.

B – TỰ LUẬN

1.40. a) Ta có $y' = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CĐ}=y(0)=-1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm1$ và $y_{CT}=y(\pm1)=-2$.

c) Ta có $y'=\dfrac{5}{(1+3x)^2}>0, \forall x\neq -\dfrac{1}{3}$. Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Hàm số không có cực trị.

d) Ta có $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.
Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CĐ}=y(-2)=-2$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=2$.

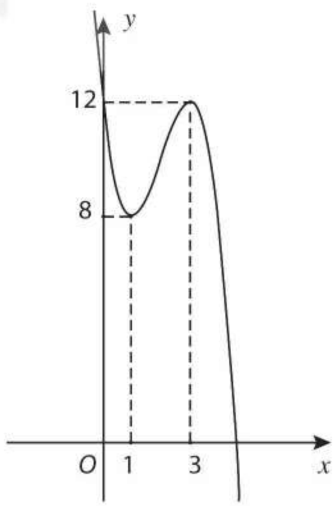
1.41. a) Ta có $\max\limits_{x\in[2;+\infty)} y=\dfrac{5}{4}$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $[2;+\infty)$.

b) Ta có $\max\limits_{x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} y=\sqrt{2}$ tại $x=0$ và $\min\limits_{x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} y=0$ tại $x=\pm\sqrt{2}$.

1.42. a) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=3$.

b) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$ có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$.

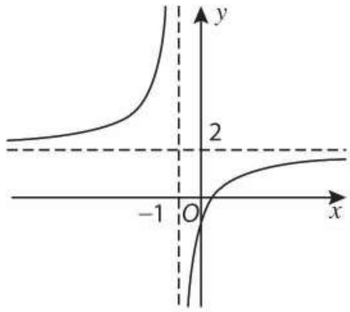
1.43. a) Hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+12$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$, nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và $y_{CĐ}=y(3)=12$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=8$.



Bảng biến thiên và đồ thị hàm số được cho như sau:

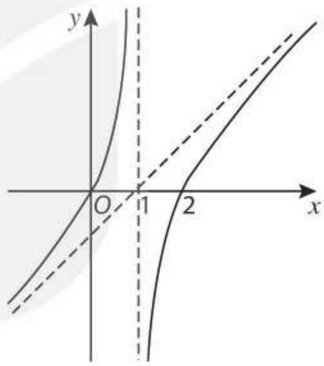
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

b) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=2$ làm tiệm cận ngang. Bảng biến thiên và đồ thị hàm số được cho như sau:



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

c) Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định và không có cực trị. Đồ thị hàm số này có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x-1$. Bảng biến thiên và đồ thị hàm số được cho như sau:



x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

1.44. a) Ta có $q=g(p)=\dfrac{pf}{p-f}$ là một hàm số của biến $p\in(f;+\infty)$.

b) Ta có $\lim\limits_{p\to+\infty} q=\lim\limits_{p\to+\infty} g(p)=\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{pf}{p-f}=f$ và $\lim\limits_{p\to f^+} q=\lim\limits_{p\to f^+} g(p)=\lim\limits_{p\to f^+}\dfrac{pf}{p-f}=+\infty$.

Từ $\lim\limits_{p\to+\infty} q=f$ suy ra đồ thị hàm số $q=g(p)$ nhận đường thẳng $q=f$ làm tiệm cận ngang. Như vậy, khi vật đặt cách thấu kính càng xa thì ảnh càng tiến gần đến tiêu điểm của thấu kính.

Từ $\lim\limits_{p\to f^+} q=+\infty$ suy ra đồ thị hàm số $q=g(p)$ nhận đường thẳng $p=f$ làm tiệm cận đứng. Như vậy, khi vật đặt càng gần tiêu điểm thì ảnh càng tiến ra xa vô hạn.

c) Bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f;+\infty)$ được cho dưới đây:

p	f		$+\infty$
q'		$-$	
q	$+\infty$	$\searrow$	f

1.45. a) Dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 lần lượt là

$f(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} \approx 108,76$ triệu người và $f(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} \approx 115,49$ triệu người.

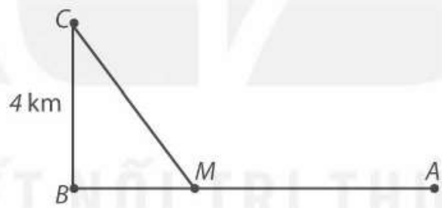
b) Hàm số f đồng biến trên đoạn $[0;50]$.

c) Ta có $f'(t) = 1,2e^{0,012t}$. Tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm nếu

$$f'(t) = 1,2e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow e^{0,012t} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,012}\ln\frac{4}{3} \approx 23,97.$$

Vậy vào khoảng năm 2047 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

1.46.



Đặt $BM = x, (0 \le x \le 10)$. Tổng chi phí lắp đặt là $f(x) = 30(10 - x) + 50\sqrt{16 + x^2}$ triệu đồng.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;10]$. Ta có:

$$f'(x) = -30 + \frac{50x}{\sqrt{16 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{16 + x^2} = 5x \Leftrightarrow x = 3.$$

Ta thấy $\min\limits_{x \in [0;10]} f(x) = 460$ khi $x = 3$. Như vậy chi phí lắp đặt nhỏ nhất là 460 triệu đồng khi đoạn BM dài 3 km.

Chương II. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

– Phần Hình học ở lớp 12 tiếp nối phần hình học không gian ở lớp 11 và được chia thành hai phần ứng với hai tập: phần một (tập một, chương II) giới thiệu về vectơ trong không gian và hệ trục toạ độ trong không gian; phần hai (tập hai, chương V) giới thiệu về phương pháp toạ độ trong không gian. Phần kiến thức này là sự mở rộng của phương pháp toạ độ trong mặt phẳng hai chiều cho trường hợp không gian ba chiều. Nếu trong Chương trình trước đây, phần vectơ trong không gian được trình bày ở lớp 11 (để tạo cơ sở nghiên cứu quan hệ vuông góc trong không gian) thì theo Chương trình năm 2018, phần kiến thức này chỉ được đề cập trong chương trình lớp 12.

– Nếu trong chương trình Hình học ở lớp 10, HS đã được giới thiệu về vectơ trong mặt phẳng và các khái niệm liên quan thì trong chương trình Hình học lớp 12, HS tiếp tục được giới thiệu về vectơ trong không gian. Nhìn chung, các khái niệm và tính chất của vectơ trong không gian không khác nhiều so với các khái niệm và tính chất tương ứng của vectơ trong mặt phẳng. Do vậy trong các bài học đề cập đến các khái niệm và tính chất đó, các đơn vị kiến thức được trình bày một cách ngắn gọn, nhiều đơn vị kiến thức được tích hợp trong cùng một hoạt động dạy học. Như một lẽ tự nhiên, các ví dụ và luyện tập minh hoạ về vectơ trong không gian gắn liền với các hình không gian mà HS đã được học ở lớp 11 như hình tứ diện, hình chóp, hình lăng trụ,…

– Nếu vectơ trong mặt phẳng là một công cụ hữu hiệu để biểu diễn các đối tượng hình học và đại lượng có hướng trong mặt phẳng thì vectơ trong không gian cũng đóng vai trò tương tự trong việc nghiên cứu hình học không gian. Ngoài ra, việc sử dụng thành thạo các tính chất của vectơ trong không gian có thể mang đến những lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ cho một số bài tập về hình học không gian mà HS đã học ở lớp 11.

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 3 bài học và Bài tập cuối chương, được thực hiện trong 14 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 6. Vectơ trong không gian	6 tiết
Bài 7. Hệ trục toạ độ trong không gian	3 tiết

Bài 8. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ	3 tiết
Bài tập cuối chương II	2 tiết.

3 Một số lưu ý

– Nhìn chung, các kiến thức về vectơ trong không gian tương tự các kiến thức về vectơ trong mặt phẳng. Do đó nếu HS vẫn còn nhớ các kiến thức về vectơ trong mặt phẳng đã học ở lớp 10 thì việc truyền tải những kiến thức về vectơ trong không gian là tương đối dễ dàng. GV có thể bắt đầu mỗi bài học bằng việc nhắc lại những kiến thức tương ứng trong mặt phẳng; điều này sẽ giúp HS dễ dàng tiếp nhận những kiến thức tương tự trong không gian. Ngoài ra, trong mỗi bài học, GV nên lấy các ví dụ minh hoạ về các vectơ thực sự nằm trong không gian (tức là không cùng nằm trong một mặt phẳng) để HS nhận thấy được sự khác biệt so với trường hợp của vectơ trong mặt phẳng. Những ví dụ điển hình xoay quanh vectơ thể hiện vận tốc/gia tốc, độ dịch chuyển của các vật hay lực tác động giữa các vật trong không gian,...

– Những kết quả về vectơ trong không gian có thể được chứng minh theo cách tương tự như các kết quả về vectơ trong mặt phẳng, hoặc sử dụng các kết quả tương ứng về vectơ trong mặt phẳng. GV nên nhấn mạnh sự tương đồng này để HS thấy rằng các kết quả về vectơ trong không gian chính là sự mở rộng của các kết quả về vectơ trong mặt phẳng.

– Một số những ví dụ vận dụng về vectơ trong không gian liên quan đến các kiến thức trong Vật lí như nguyên tắc tổng hợp lực, Định luật III Newton về lực tác dụng và phản lực,... Những HS không theo định hướng Khoa học tự nhiên và Công nghệ có thể không lựa chọn Vật lí là môn học tự chọn và do đó sẽ không biết đến các kiến thức nêu trên. Trong trường hợp đó, GV cần giải thích kĩ hơn về các khái niệm trên, đồng thời gợi lại những ví dụ vận dụng tương tự đã giới thiệu tại phần vectơ trong mặt phẳng ở lớp 10 để giúp HS không bị bỡ ngỡ trước những kiến thức liên môn.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 6. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN (6 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Nhận biết được vectơ trong không gian: hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng/ngược hướng, hai vectơ bằng nhau.

– Nhận biết và thực hiện được các phép toán vectơ trong không gian.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học), yêu nước (thông qua việc quan sát và tìm hiểu về quốc kì Việt Nam).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc sử dụng các kiến thức về vectơ trong không gian để trả lời các câu hỏi trong phần Vận dụng).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Nếu ở lớp 10 HS đã được giới thiệu về vectơ trong mặt phẳng và các phép toán vectơ trong mặt phẳng thì trong Chương trình Hình học lớp 12, HS tiếp tục được giới thiệu về vectơ trong không gian và các phép toán vectơ trong không gian. Nhìn chung, các khái niệm về vectơ trong không gian là sự mở rộng của các khái niệm tương ứng về vectơ trong mặt phẳng. Khi giảng dạy, nếu có thời gian, GV nên nhấn mạnh đến sự tương đồng giữa các khái niệm này. Đối với những HS vẫn còn nhớ các khái niệm, quy ước, tính chất của phép toán vectơ trong mặt phẳng như giá của vectơ, vectơ-không, tính chất giao hoán của phép cộng vectơ,..., GV có thể đi nhanh qua các nội dung đó để tiết kiệm thời gian trên lớp.

2. Các phép toán vectơ trong không gian bao gồm phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ và tích vô hướng của hai vectơ được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp của vectơ trong mặt phẳng. Do đó trước khi trình bày về mỗi phép toán vectơ trong không gian, GV có thể yêu cầu HS nhắc lại định nghĩa của các phép toán tương ứng trong mặt phẳng như một cách để dẫn nhập vào nội dung mới. Có một số điểm sau GV cần lưu ý:

- Các tính chất của phép toán vectơ trong mặt phẳng vẫn đúng đối với phép toán vectơ trong không gian;
- Quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng được mở rộng thành quy tắc hình hộp trong không gian;
- Chương trình môn Toán năm 2018 không đề cập đến kiến thức về *ba vectơ đồng phẳng*, do đó SGK mới cũng không nhắc đến nội dung này;

- Khi định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong không gian, có một khái niệm mới là "góc giữa hai vectơ trong không gian". Nếu có thể, GV nên nhấn mạnh mối liên hệ giữa khái niệm này với khái niệm "góc giữa hai đường thẳng trong không gian" mà HS đã học ở lớp 11.

3. Các ví dụ và luyện tập được thiết kế trong bài học này đều xoay quanh các đối tượng hình học trong không gian. Điều này giúp HS thấy được rằng, ngoài các vectơ trong mặt phẳng như đã học ở lớp 10, vectơ còn xuất hiện rất nhiều (và chủ yếu) trong không gian. GV cần đảm bảo HS vẫn nắm được các kết quả cơ bản của hình học không gian hay các tính chất đặc trưng của hình chóp, hình tứ diện, hình lăng trụ, hình hộp,... để sử dụng khi cần.

4. GV khuyến khích HS tìm hiểu thêm các hình ảnh về vectơ trong không gian được sử dụng trong thực tiễn. GV có thể gợi ý HS tập trung vào các đại lượng có hướng quen thuộc ở phổ thông như độ dịch chuyển, lực, vận tốc hay gia tốc để có được những ví dụ phong phú về vectơ trong không gian.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài.

III. GỢI Ý DẠY BÀI HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 6 tiết. Cụ thể như sau:

+ Tiết 1: Mục 1;

+ Tiết 2, 3: Mục 2 và chữa một số bài tập;

+ Tiết 4: Mục 3;

+ Tiết 5, 6: Mục 4 và chữa một số bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	HS quan sát hình ảnh vectơ trong không gian và liên hệ với vectơ trong mặt phẳng, từ đó nảy sinh nhu cầu tìm hiểu về vectơ trong không gian và các khái niệm liên quan.	GV trình bày theo SGK, có thể đưa thêm các ví dụ gợi lên hình ảnh của vectơ trong không gian.

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN		
HĐ1. Nhận biết vectơ trong không gian	HS quan sát và nhận biết hình ảnh về vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Nếu GV thay thế hình ảnh trong HĐ1 bởi một hình ảnh tương tự thì cần chú ý rằng trong hình ảnh được lựa chọn cần có ít nhất ba "mũi tên" không cùng nằm trong một mặt phẳng để thể hiện các vectơ trong không gian. *Gợi ý.* a) Các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ thể hiện rằng lực căng dây nằm dọc theo dây treo và hướng về phía móc treo của cần cẩu. Độ lớn của các lực căng dây là xấp xỉ bằng nhau. b) Các đoạn thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng. *Chú ý.* Nếu câu hỏi a) giúp HS nhận ra các đặc điểm giống nhau giữa vectơ trong không gian và vectơ trong mặt phẳng thì câu hỏi b) giúp HS nhận ra sự khác nhau giữa hai khái niệm đó.
Khung kiến thức	Khái niệm về vectơ trong không gian và độ dài của vectơ trong không gian.	GV trình bày theo SGK.
	HS tìm một số ví dụ về các đại lượng có thể được biểu diễn bởi vectơ trong không gian.	GV yêu cầu HS quan sát các hình ảnh trong bài và tìm thêm các hình ảnh tương tự. Các đại lượng có thể được biểu diễn bằng vectơ và quen thuộc với HS bao gồm vận tốc và lực. GV nên khuyến khích HS đưa ra các hình ảnh mà ở đó vectơ biểu diễn nằm trong không gian.

Chú ý	Tóm tắt các kí hiệu liên quan đến vectơ và khái niệm giá của vectơ.	GV triển khai theo SGK. Lưu ý rằng các kí hiệu về vectơ, độ dài vectơ hay khái niệm về giá của vectơ hoàn toàn giống như trường hợp vectơ trong mặt phẳng.
Ví dụ 1	HS nhận biết được vectơ trong không gian, xác định được vectơ nào có giá nằm trong một mặt phẳng cho trước, tính được độ dài của vectơ cho trước trong một tình huống cụ thể.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1		GV yêu cầu HS tự thực hiện và yêu cầu một HS lên bảng trình bày. *Gợi ý.* a) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD'}$.
HĐ2. Hình thành khái niệm hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, hai vectơ bằng nhau trong không gian	HS nhận biết được quan hệ cùng phương, quan hệ cùng hướng, ngược hướng và quan hệ bằng nhau của hai vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Trước khi thực hiện hoạt động này, GV có thể hỏi HS về hai vectơ cùng phương, cùng hướng/ngược hướng, hai vectơ bằng nhau trong mặt phẳng. Có thể bắt đầu bằng cách đặt câu hỏi: "Trong mặt phẳng, hai vectơ có giá song song thì cùng phương. Nếu trong không gian hai vectơ có giá song song thì có thể kết luận gì về phương và hướng của chúng?". Tương tự, GV có thể yêu cầu HS nhắc lại định nghĩa về hai vectơ bằng nhau trong mặt phẳng và đặt câu hỏi: "Hai vectơ bằng nhau trong không gian có thể được định nghĩa theo cách tương tự không?". *Gợi ý.* a) Hai vectơ cùng độ dài (quan sát). b) Giá của hai vectơ song song với nhau.

		c) Hai vectơ cùng phương và cùng hướng. Sau khi HS trả lời được ba câu hỏi trong HĐ2, GV nói rằng trong trường hợp đó ta nói hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ là bằng nhau (trong không gian) và dẫn tới khung kiến thức tiếp theo. *Chú ý*. Quan hệ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và bằng nhau của hai vectơ trong không gian trên thực tế được đưa về trường hợp tương ứng trong mặt phẳng.
Khung kiến thức	Khái niệm cùng phương, cùng hướng/ngược hướng, bằng nhau của hai vectơ trong không gian.	GV phát biểu như trong SGK.
	HS nhận biết được hai vectơ cùng bằng vectơ thứ ba thì bằng nhau.	GV hướng dẫn HS lần lượt tìm mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của hai vectơ để suy ra hai vectơ đó bằng nhau.
Chú ý	HS thừa nhận một tính chất về hai vectơ bằng nhau trong không gian và các quy ước về vectơ-không.	GV trình bày theo SGK. Trên thực tế, GV có thể giải thích chú ý đầu tiên cho HS như sau: qua O vẽ đường thẳng song song với giá của $\vec{a}$; gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng vừa vẽ và giá của $\vec{a}$; trong mặt phẳng (P) lấy điểm M (duy nhất) thoả mãn $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ thì M là điểm cần tìm.
Ví dụ 2	HS xác định được vectơ bằng vectơ cho trước, xác định được điểm M để vectơ	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2		GV gọi một số HS trả lời và nhận xét. *Gợi ý*. a) $\overrightarrow{DC}$;

	$\overrightarrow{OM}$ bằng một vectơ cho trước trong một trường hợp cụ thể.	b) Điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = AM$.
Vận dụng 1	HS nhận biết được hai vectơ bằng nhau trong một tình huống thực tiễn.	GV có thể nhắc lại khái niệm về vectơ biểu diễn độ dịch chuyển như sau: nếu một vật chuyển động (thẳng) từ điểm A đến điểm B thì vectơ biểu diễn độ dịch chuyển là $\overrightarrow{AB}$. *Gợi ý*. Nếu biểu thị vị trí của thang máy ở các tầng 15, 22, 29 lần lượt bởi các điểm A, B, C thì vectơ biểu thị độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$. Vì A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Hơn nữa, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ đều có độ dài bằng tổng chiều cao của 7 tầng nên $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$. Vậy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Tiết 2, 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN		
a) Tổng của hai vectơ trong không gian		
HĐ3. Hình thành khái niệm tổng của hai vectơ trong không gian	Dẫn dắt HS đến định nghĩa về tổng của hai vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Chú ý rằng HĐ3 hoàn toàn tương tự như hoạt động dẫn tới định nghĩa về tổng của hai vectơ trong mặt phẳng. Trước khi bắt đầu, GV có thể (yêu cầu HS) nhắc lại tính chất "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$" trong SGK Toán 10.

		Gợi ý. a) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (cùng bằng $\vec{a}$) nên bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Tương tự, ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. b) Từ câu a, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, do đó bốn điểm A, C, A', C' đồng phẳng và tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành. Vì vậy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.
Khung kiến thức	Định nghĩa về tổng của hai vectơ trong không gian và phép cộng hai vectơ.	GV trình bày như trong SGK.
Nhận xét	HS nhận biết quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành (trong mặt phẳng) vẫn đúng trong không gian.	GV trình bày như trong SGK.
Ví dụ 3	HS xác định được tổng của hai vectơ trong không gian và tính được chiều dài của vectơ tổng.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 3		GV yêu cầu HS tự thực hiện và yêu cầu một HS lên bảng trình bày. *Gợi ý.* $\left\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 1$.
Chú ý	Một số tính chất của phép cộng vectơ trong không gian.	GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng các tính chất này hoàn toàn giống các tính chất của phép cộng vectơ trong mặt phẳng.
Ví dụ 4	HS sử dụng được quy tắc ba điểm và các tính chất của phép cộng vectơ trong không gian để chứng minh một đẳng thức vectơ.	GV triển khai theo SGK, lưu ý nhấn mạnh vào các tính chất của phép cộng vectơ được sử dụng ở mỗi phép biến đổi. *Chú ý.* HS có thể thực hiện chuyển vế và đổi dấu các vectơ để đưa đẳng thức đã cho về đẳng thức giữa hiệu của hai vectơ. Trong trường hợp đó, GV nên nhắc HS rằng tại thời điểm này, chúng ta chưa học

		về hiệu của hai vectơ trong không gian, do đó HS chỉ nên sử dụng các tính chất của phép cộng vectơ để chứng minh đẳng thức đã cho.
Luyện tập 4		GV yêu cầu HS tự thực hiện và yêu cầu hai HS lên bảng trình bày. GV nhận xét và kết luận. *Gợi ý.* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CD}$ $=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\right)$ $=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.
HĐ4. Thiết lập quy tắc hình hộp	HS giải thích được quy tắc hình hộp.	GV triển khai như trong SGK. GV có thể gợi ý HS sử dụng quy tắc hình bình hành đã học trong mặt phẳng (và vẫn đúng trong không gian). *Gợi ý.* a) Trong hình bình hành *ABCD*, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. b) Từ câu a suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA' // CC'$ và $AA' = CC'$, suy ra tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$, suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.
Khung kiến thức	Quy tắc hình hộp.	GV phát biểu như trong SGK. GV nhấn mạnh sự tương đồng giữa quy tắc này và quy tắc hình bình hành mà HS đã học ở lớp 10.

?	HS áp dụng được quy tắc hình hộp để nhận được đẳng thức tương tự đẳng thức đã phát biểu trong khung kiến thức.	GV yêu cầu HS quan sát hình hộp đã cho và trả lời câu hỏi. GV có thể thay đổi đỉnh *B* của hình hộp bằng một đỉnh tuỳ ý và gọi một số HS trả lời. *Gợi ý.* $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.
Ví dụ 5	HS áp dụng được quy tắc hình hộp để chứng minh các đẳng thức về vectơ.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 5		GV gọi một HS trình bày lời giải trên bảng. GV gọi một vài HS nhận xét và kết luận. *Gợi ý.* $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$. *Chú ý.* Vì vế phải của đẳng thức là một vectơ có điểm đầu là *B* nên để áp dụng quy tắc hình hộp, HS cần tìm các vectơ cũng có điểm đầu là *B* và lần lượt bằng các vectơ ở vế trái.
b) Hiệu của hai vectơ trong không gian		
HĐ5. Nhận biết vectơ đối của một vectơ trong không gian	HS nhận biết được khái niệm hai vectơ đối nhau trong không gian.	Trước khi triển khai HĐ5, GV có thể giải thích nhanh về hai khái niệm lực tác dụng và phản lực được giới thiệu trong chương trình Vật lí lớp 10 và mối quan hệ giữa hai lực đó (Định luật III Newton). *Gợi ý.* Vì hai lực cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau nên hai vectơ biểu diễn hai lực đó cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau. *Chú ý.* Hình ảnh mũi tên thể hiện hai lực trên Hình 2.15 chỉ mang tính tương đối để HS dễ dàng quan sát. Trên thực tế lực tác dụng và phản lực có giá trùng nhau.

Khung kiến thức	Khái niệm vectơ đối.	GV trình bày theo SGK. Định nghĩa về vectơ đối của một vectơ trong không gian hoàn toàn giống với định nghĩa về vectơ đối của một vectơ trong mặt phẳng.
Chú ý	HS nhận biết được một số quy ước và tính chất của vectơ đối.	GV trình bày theo SGK.
Khung kiến thức	Định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian và phép trừ hai vectơ.	GV triển khai theo SGK. Định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian hoàn toàn giống với định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng. Do đó GV có thể yêu cầu HS nhắc lại định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng và dẫn dắt HS đến định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian.
Nhận xét	HS nhận biết một tính chất của phép trừ vectơ.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 6	HS giải thích được vì sao hai vectơ cho trước là đối nhau và thực hiện được phép trừ vectơ trong một tình huống cụ thể.	GV trình bày theo SGK.
Luyện tập 6		GV yêu cầu HS tự thực hiện, sau đó ghi bài chữa trên bảng. *Gợi ý.* a) Hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ cùng phương, ngược hướng và có cùng độ dài nên là hai vectơ đối nhau. b) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CM}$ $=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$.
Vận dụng 2	HS nhận biết được hai vectơ đối nhau trong thực tiễn.	GV yêu cầu HS nhận xét về mối liên hệ giữa phương, hướng và độ lớn của hai vectơ vận tốc, từ đó rút ra kết luận. *Gợi ý.* Quan sát thấy hai vectơ vận tốc cùng phương (vì làn lên và làn xuống "song song") và ngược hướng (một làn

		đi lên và một lần đi xuống). Thông thường thì lần lên và lần xuống có cùng tốc độ di chuyển nên độ lớn của hai vectơ vận tốc bằng nhau. Vì vậy hai vectơ vận tốc là hai vectơ đối nhau. *Chú ý.* Nếu HS lập luận rằng, vì lí do nào đó (ví dụ như để đảm bảo an toàn), lần xuống di chuyển chậm hơn lần lên thì HS hoàn toàn có thể trả lời rằng hai vectơ vận tốc không là hai vectơ đối nhau.
Bài tập 2.4	HS thực hiện được các phép toán cộng, trừ hai vectơ trong không gian.	GV yêu cầu một số HS lên bảng trình bày, gợi ý HS sử dụng linh hoạt các tính chất của phép cộng/trừ vectơ và quy tắc hình hộp.
Bài tập 2.6	HS chứng minh được một tính chất của hình bình hành.	GV gợi ý HS biến đổi đẳng thức đã cho về đẳng thức $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và rút ra kết luận.

Tiết 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN		
HĐ6. Hình thành khái niệm tích của một số với một vectơ trong không gian	Hình thành khái niệm tích của một số với một vectơ trong không gian.	– GV triển khai như trong SGK. *Gợi ý.* Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN // BC và $MN=\frac{1}{2}BC$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên BC // $B'C'$ và $BC=B'C'$. Suy ra MN // $B'C'$ và $MN=\frac{1}{2}B'C'$. Do đó $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương và cùng hướng, đồng thời $\lvert\overrightarrow{MN}\rvert=\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{B'C'}\rvert$.

		– Sau khi kết thúc HĐ6, GV nhấn mạnh rằng vectơ $\overrightarrow{MN}$ được gọi là tích của số thực $\frac{1}{2}$ với vectơ $\overrightarrow{B'C'}$. Định nghĩa trong trường hợp tổng quát sẽ được trình bày trong khung kiến thức tiếp theo.
Khung kiến thức	Định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian và phép nhân một số với một vectơ.	GV trình bày theo SGK.
	HS nhận biết được tích của 1, –1 với một vectơ trong không gian.	HS áp dụng định nghĩa về tích của một số với một vectơ để trả lời. GV nhấn mạnh HS cần so sánh phương, hướng và độ dài của $1\vec{a}$ và $\vec{a}$, $(-1)\vec{a}$ và $-\vec{a}$ để kết luận. *Gợi ý.* $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
Chú ý	Quy ước về phép nhân số 0 với một vectơ và phép nhân một số với vectơ-không; điều kiện để hai vectơ trong không gian cùng phương.	GV trình bày theo SGK. *Chú ý.* Các quy ước và tính chất này giống như trong trường hợp phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng.
Ví dụ 7	HS giải thích được vì sao một vectơ bằng tích của một số với một vectơ khác.	GV triển khai theo SGK. GV nhấn mạnh việc tìm quan hệ về phương, hướng và độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ để từ đó dẫn tới đẳng thức đã phát biểu. *Chú ý.* Ở đây ta không viết $\overrightarrow{CC'}=-2\overrightarrow{OM}$ vì đẳng thức này cần dùng đến một tính chất của phép nhân một số với một vectơ sẽ trình bày ở phần sau.
Luyện tập 7		GV yêu cầu HS tự thực hiện và gọi một HS trả lời. *Gợi ý.* Áp dụng định lí Thalès trong tam giác SAB, ta có: $EF\ //\ AB$ và $EF=\frac{1}{3}AB$.

		Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên AB // DC và $AB = DC$. Do đó EF // DC và $EF = \frac{1}{3}DC$. Hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.
Chú ý	Một số tính chất của phép nhân một số với một vectơ trong không gian.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 8	HS sử dụng được các tính chất của phép nhân một số với một vectơ trong không gian để chứng minh một đẳng thức về vectơ.	GV triển khai theo SGK.
Chú ý	HS nhận được một kết quả mở rộng của kết quả đã biết trong mặt phẳng.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 8	HS sử dụng được các tính chất của phép nhân một số với một vectơ trong không gian để chứng minh một đẳng thức về vectơ, từ đó dẫn tới khái niệm trọng tâm của tứ diện theo ngôn ngữ vectơ.	GV gợi ý HS sử dụng kết quả trong Ví dụ 8 để biểu diễn tổng $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$. *Gợi ý.* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IG}$ $= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$.
Vận dụng 3	HS vận dụng được tính chất của phép nhân một số với một vectơ trong không gian trong một tình huống thực tiễn.	GV gợi ý HS xác định mối liên hệ về phương, hướng và độ lớn của hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ để tìm ra câu trả lời. *Gợi ý.* Lực cản ngược hướng với lực đẩy của động cơ (lực này có hướng không đổi vì máy bay giữ nguyên hướng bay) nên $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ cùng hướng, suy ra $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}$ với k là tỉ số độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$.

		Nói cách khác, k là tỉ số độ lớn của hai lực cản tương ứng nên từ giả thiết tính được $k=\left(\frac{900}{920}\right)^2 \approx 0{,}96$.

Tiết 5, 6

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN		
a) Góc giữa hai vectơ trong không gian		
HĐ7. Hình thành khái niệm góc giữa hai vectơ trong không gian	Hình thành khái niệm góc giữa hai vectơ (khác vectơ-không) trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Chú ý rằng HĐ7 hoàn toàn tương tự như hoạt động dẫn tới định nghĩa về góc giữa hai vectơ trong mặt phẳng. Tuy nhiên, vì ta không định nghĩa hai tam giác bằng nhau trong không gian nên thay vì sử dụng tính "bằng nhau" của hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để suy ra $\widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}$, ta áp dụng định lí côsin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ (trong mặt phẳng chứa mỗi tam giác đó). *Gợi ý.* a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ và $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{O'B'}-\overrightarrow{O'A'}=\vec{b}-\vec{a}$ nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. b) Ta có: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}$ và $\cos\widehat{A'O'B'}=\dfrac{O'A'^2+O'B'^2-A'B'^2}{2O'A'\cdot O'B'}$. Vì $OA=O'A'$, $OB=O'B'$ và $AB=A'B'$ nên $\cos\widehat{AOB}=\cos\widehat{A'O'B'}$, suy ra $\widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}$.

Khung kiến thức	Định nghĩa về góc giữa hai vectơ (khác vectơ-không) trong không gian.	GV trình bày theo SGK. GV có thể nhấn mạnh rằng, về hình thức và ý tưởng, định nghĩa này hoàn toàn giống định nghĩa về góc giữa hai vectơ trong mặt phẳng.
Chú ý	HS nhận biết được cách để xác định góc giữa hai vectơ trong không gian và quy ước về góc giữa hai vectơ trong trường hợp có một vectơ là $\vec{0}$.	– GV trình bày theo SGK. – Trong Chú ý đầu tiên, GV cần lưu ý rằng ý tưởng để xác định góc giữa hai vectơ trong không gian (cũng như trong mặt phẳng) là "dịch chuyển" hai vectơ đến vị trí mới sao cho chúng có chung điểm đầu, từ đó xác định góc được tạo thành. Đơn giản hơn, ta có thể giữ cố định một vectơ và chỉ "dịch chuyển" vectơ còn lại. Đây cũng là cách thường được sử dụng để xác định góc giữa hai vectơ trong không gian. – Chú ý thứ hai là quy ước về góc giữa vectơ-không và một vectơ bất kì. Quy ước này giống quy ước đã biết trong mặt phẳng.
	HS xác định được góc giữa hai vectơ trong hai trường hợp đặc biệt.	GV minh hoạ bằng hình ảnh và yêu cầu HS sử dụng định nghĩa để xác định góc giữa hai vectơ được đề cập đến trong câu hỏi. *Gợi ý.* Góc giữa hai vectơ cùng hướng (khác $\vec{0}$) là 0°, góc giữa hai vectơ ngược hướng là 180°.
Ví dụ 9	HS xác định được góc giữa hai vectơ trong một trường hợp cụ thể.	GV triển khai theo SGK. GV có thể nhấn mạnh đến tính chất về góc giữa hai vectơ được nhắc tới trong Chú ý trên trước khi HS thực hiện ví dụ.
Luyện tập 9		GV yêu cầu HS thực hiện tại chỗ và yêu cầu hai HS lên bảng trình bày. *Gợi ý.* Hình lăng trụ tam giác đều có các mặt là hình chữ nhật, do đó

		$\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{CBB'} = 90°$. Vì ABC là tam giác đều nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 60°$.
b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian		
HĐ8. Nhận biết khái niệm tích vô hướng của hai vectơ trong không gian	HS nhắc lại định nghĩa về tích vô hướng trong mặt phẳng, từ đó dẫn đến định nghĩa về tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. *Chú ý*. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng cần đến khái niệm độ dài của vectơ và góc giữa hai vectơ trong mặt phẳng. Để mở rộng định nghĩa về tích vô hướng cho trường hợp vectơ trong không gian, ta cần mở rộng hai khái niệm trên cho trường hợp vectơ trong không gian. Do đó GV có thể đặt câu hỏi như trong HĐ8 để dẫn dắt HS đến định nghĩa về tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.
Khung kiến thức	Định nghĩa về tích vô hướng trong không gian.	GV phát biểu như trong SGK. GV nhấn mạnh sự tương đồng giữa định nghĩa này và định nghĩa của tích vô hướng trong mặt phẳng mà HS đã học ở lớp 10, và chú ý rằng nếu hai vectơ trong không gian cùng nằm trong một mặt phẳng thì từ công thức tính tích vô hướng của hai vectơ trong không gian, ta nhận lại được công thức tính tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng.
Chú ý	Một số tính chất và quy ước về tích vô hướng.	GV triển khai như trong SGK. Trên thực tế, các quy ước này là quen thuộc với HS vì đã được đề cập trong trường hợp của mặt phẳng.

Ví dụ 10	HS tính được tích vô hướng của hai vectơ trong không gian trong một trường hợp cụ thể.	GV triển khai theo SGK. GV nhấn mạnh rằng để tính tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cần xác định độ dài của mỗi vectơ và số đo của góc giữa hai vectơ đó.
Luyện tập 10		GV yêu cầu HS tự thực hiện. *Gợi ý.* a) 0; b) $-\frac{a^2}{2}$.
Nhận xét	Một số tính chất thừa nhận của tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Trên thực tế các tính chất này là khá quen thuộc với HS vì đã được giới thiệu trong Toán 10. *Chú ý.* Tính chất giao hoán của tích vô hướng có thể suy ra dễ dàng từ định nghĩa, nhưng hai tính chất còn lại thì không. Trong Toán 10, HS được hướng dẫn chứng minh các tính chất này bằng cách sử dụng biểu thức toạ độ của tích vô hướng. Ta cũng có thể làm điều tương tự đối với tích vô hướng trong không gian bằng cách sử dụng toạ độ trong không gian. Tuy nhiên để kiến thức được liền mạch, phần hệ toạ độ trong không gian sẽ được nhắc đến sau và do đó các tính chất của tích vô hướng sẽ không được chứng minh mà để HS thừa nhận.
Ví dụ 11	HS tính được tích vô hướng của hai vectơ trong một trường hợp cụ thể.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 11		GV hướng dẫn HS tự thực hiện. Có thể gợi ý HS viết vectơ $\overrightarrow{A'C}$ thành tổng của hai vectơ mà mỗi vectơ đều vuông góc với vectơ $\overrightarrow{B'D'}$. *Gợi ý.* $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{B'D'}=\left(\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'C}\right)\cdot\overrightarrow{B'D'}$ $=\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}+\overrightarrow{C'C}\cdot\overrightarrow{B'D'}=0$ vì hai đường thẳng $A'C'$ và $C'C$ đều vuông góc với đường thẳng $B'D'$.

		Chú ý. HS có thể lập luận rằng hai đường thẳng $A'C'$ và $C'C$ đều vuông góc với đường thẳng $B'D'$ nên suy ra (ACC') vuông góc với $B'D'$, từ đó kết luận $A'C$ vuông góc với $B'D'$. Trong trường hợp này GV nhấn mạnh rằng tính chất (thừa nhận) về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nói trên, về bản chất, là được chứng minh bằng cách sử dụng các tính chất của vectơ trong không gian. Nói cách khác, đến thời điểm này, ta mới có một chứng minh chặt chẽ cho tính chất đó sau khi học về tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.
Vận dụng 4	HS sử dụng được định nghĩa về tích vô hướng để trả lời một câu hỏi thực tiễn.	GV gợi ý HS viết tường minh công thức tính công A theo độ lớn của lực tác động, độ dài của quãng đường di chuyển và góc tạo bởi lực tác động và phương di chuyển. *Gợi ý*. $A=\left\|\vec{F}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\cdot\cos\left(\vec{F},\overrightarrow{MN}\right)$. Vì $\left\|\vec{F}\right\|$ và $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ không đổi nên A lớn nhất khi $\cos\left(\vec{F},\overrightarrow{MN}\right)=1$, tức là góc giữa lực tác động $\vec{F}$ và hướng di chuyển $\overrightarrow{MN}$ bằng 0°. Nói cách khác lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Do đó khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng, ta nên kéo (hoặc đẩy) theo hướng "song song" với hướng chuyển động mong muốn của vật.
Bài tập 2.10	HS tính được tích vô hướng của hai vectơ bằng định nghĩa trong một số trường hợp cụ thể.	GV yêu cầu HS lần lượt xác định góc giữa hai vectơ, độ dài của mỗi vectơ và từ đó tính tích vô hướng của hai vectơ theo định nghĩa.
Bài tập 2.11	HS áp dụng được tính chất của tích vô hướng để tính giá trị của một số biểu thức cho trước.	GV gợi ý HS sử dụng định nghĩa kết hợp với các tính chất thừa nhận của tích vô hướng để tính giá trị của các biểu thức.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập về vectơ trong không gian (độ dài của vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng/ngược hướng, hai vectơ bằng nhau): Các bài tập 2.1, 2.2, 2.3.
- Bài tập về phép cộng, trừ hai vectơ: Các bài tập 2.4, 2.5, 2.6.
- Bài tập về phép nhân một số với một vectơ: Các bài tập 2.7, 2.8.
- Bài tập về tích vô hướng: Các bài tập 2.10, 2.11, 2.12.
- Bài tập vận dụng: Các bài tập 2.3, 2.8, 2.9.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.1. Các mệnh đề đúng là a, b.

2.2. Vì $BB' = AA' = 4$ nên $|\overrightarrow{BB'}| = 4$.

Tam giác ABD vuông tại A có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ nên $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{13}$.

Tam giác BDD' vuông tại D có $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{13 + 4^2} = \sqrt{29}$ nên $|\overrightarrow{BD'}| = \sqrt{29}$.

2.3. (GV gợi ý cho HS xem lại bóng nói của rô bốt ở HĐ5 về mối quan hệ giữa lực và phản lực).

a) Các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đều cùng phương với vectơ $\vec{a}$ nên chúng đôi một cùng phương với nhau. Các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đều ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nên chúng đôi một cùng hướng với nhau.

b) Do trọng lực phân tán đều qua các chân bàn nên các phản lực có độ lớn như nhau, suy ra các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ có độ dài bằng nhau. Do đó các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.

2.4. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;

c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DC} = -(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{A'C}$ (theo quy tắc hình hộp).

2.5. a) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$;

b) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$;

c) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.

2.6. Đẳng thức đã cho tương đương với $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}$ hay $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, tức là $ABCD$ là hình bình hành.

2.7. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AB}$.

2.8. Vì $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ nên ba điểm A, I, G thẳng hàng và $AI = 3IG$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và I trên mặt phẳng (BCD). Áp dụng định lí Thalès suy ra $\frac{IK}{AH} = \frac{IG}{AG} = \frac{1}{4}$. Do đó $IK = \frac{1}{4}AH = \frac{1}{4}\cdot 8 = 2$ (cm). Vậy khoảng cách từ trọng tâm của khối rubik đến mỗi mặt là 2 cm.

2.9. Giả sử lực kéo trên mỗi sợi dây được biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ với O là đầu chung của ba sợi dây. Khi ba sợi dây cân bằng thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Vẽ hình bình hành $OADB$ thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$, suy ra $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC}$ hay O là trung điểm của CD. Do đó các điểm O, A, B, C cùng thuộc mặt phẳng ($ABCD$), suy ra ba sợi dây cùng nằm trong mặt phẳng đó.

2.10. a) $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}\right) = 180°$, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{C'C} = -4$;

b) $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right) = 90°$, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;

c) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'A'}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) = 135°$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'A'} = -1$.

2.11. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{-5+\sqrt{2}}{2}$; c) $2+\sqrt{2}$.

2.12. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}\right) = 0$.

Bài 7. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được toạ độ của điểm, của vectơ đối với hệ trục toạ độ.
- Vận dụng được toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Về phẩm chất, năng lực

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc sử dụng các kiến thức liên môn và kiến thức thực tế để trả lời các câu hỏi Vận dụng).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Hệ trục toạ độ trong không gian là sự mở rộng của hệ trục toạ độ trong mặt phẳng mà HS đã học trong Chương trình Toán 10. Sự mở rộng này là hoàn toàn tự nhiên khi ta muốn nghiên cứu các bài toán hình học không gian bằng phương pháp toạ độ. Tương tự như trong trường hợp của mặt phẳng, bài học này bắt đầu với định nghĩa về hệ toạ độ trong không gian và toạ độ của điểm/vectơ trong không gian. Biểu thức toạ độ của vectơ trong không gian sẽ được đề cập trong bài học tiếp theo.

2. Khi dạy toạ độ của điểm/vectơ trong không gian, GV có thể trình bày như trong Mục 2, hoặc trình bày toạ độ của vectơ trước, sau đó định nghĩa toạ độ của điểm M như là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$. Cả hai cách trình bày đều được chấp nhận, tuy nhiên GV cần chú ý rằng các ví dụ tương ứng phải tương thích với thứ tự kiến thức được trình bày. GV cũng cần nhấn mạnh đến mối liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ sau khi đã trình bày hai khái niệm trên.

3. Toạ độ của một điểm/vectơ hoàn toàn phụ thuộc vào hệ toạ độ đã chọn. Mặc dù ở mỗi tình huống trong bài học này ta luôn cố định một hệ toạ độ, nhưng việc sử dụng nhiều hệ toạ độ khác nhau trong cùng một tình huống là không hiếm gặp trong thực tiễn. Điều này được thể hiện rõ khi HS trả lời câu hỏi Vận dụng 1 và GV nên nhấn mạnh với HS về điều này.

4. GV khuyến khích HS tìm hiểu thêm các hình ảnh trong thực tiễn về hệ toạ độ trong không gian, ví dụ như quan sát ba đường thẳng đồng quy và đôi một vuông góc với nhau trong không gian. Khi HS đã có cảm nhận về hệ toạ độ trong không gian, GV có thể yêu cầu HS xác định toạ độ (một cách tương đối) của một số vật thể đối với hệ toạ độ đó.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết. Cụ thể như sau:

- Tiết 1: Từ đầu đến hết Nhận xét sau Luyện tập 3;
- Tiết 2: Từ Ví dụ 4 đến hết Luyện tập 5;
- Tiết 3: Từ HĐ4 đến hết và chữa một số bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Dẫn dắt HS đến khái niệm hệ trục toạ độ và toạ độ của điểm trong không gian.	GV có thể nhắc lại khái niệm toạ độ của một điểm trong mặt phẳng và nhấn mạnh rằng toạ độ của một điểm cho biết chính xác vị trí của điểm đó đối với các mốc đã lựa chọn. Từ đó GV đặt câu hỏi "Có cách nào tương tự để xác định chính xác vị trí của một điểm trong không gian hay không?" và dẫn tới nội dung của bài học.
1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN		
HĐ1. Hình thành khái niệm hệ trục toạ độ trong không gian	Dẫn dắt HS đến định nghĩa về hệ trục toạ độ trong không gian và một số khái niệm liên quan.	GV triển khai như trong SGK. GV có thể nhắc lại định nghĩa về mặt phẳng toạ độ (đã học ở lớp 8 và lớp 10) để HS có cơ sở trả lời các câu hỏi trong HĐ1. Sau khi kết thúc HĐ1, GV dẫn tới định nghĩa về hệ toạ độ trong không gian và nhấn mạnh rằng hệ toạ độ trong không gian có thể nhận được bằng cách "kết hợp" các hệ toạ độ trong mặt phẳng. *Gợi ý.* a) Các mặt phẳng toạ độ là (Oxy), (Oyz) và (Ozx). b) Các mặt phẳng toạ độ có vuông góc với nhau. Sử dụng tính chất: "Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với

		mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc với nhau".
Khung kiến thức	Định nghĩa về hệ trục toạ độ trong không gian, gốc toạ độ và mặt phẳng toạ độ.	GV trình bày theo SGK. GV có thể nhấn mạnh thêm về sự tương đồng giữa hệ trục toạ độ trong không gian và hệ trục toạ độ trong mặt phẳng đã học trước đây.
	HS nhận biết được hình ảnh về hệ toạ độ trong không gian trong thực tiễn.	GV gợi ý HS tìm các đường thẳng đôi một vuông góc trong Hình 2.34, từ đó đưa ra câu trả lời. *Gợi ý*. Hình ảnh góc căn phòng trong tình huống mở đầu có gợi lên hình ảnh về hệ toạ độ trong không gian. Có thể chọn gốc toạ độ là góc phòng, các trục toạ độ là các đường mép tường. Khi đó các mặt phẳng toạ độ là hai mặt tường và mặt sàn nhà.
Ví dụ 1	HS nhận biết được hệ toạ độ trong không gian có thể được thiết lập từ các yếu tố của các hình hình học như hình lập phương hay hình hộp chữ nhật.	GV triển khai theo SGK. GV nhấn mạnh đến các thành phần không thể thiếu của một hệ toạ độ trong không gian, đó là các trục toạ độ (đôi một vuông góc tại gốc) và các vectơ đơn vị trên mỗi trục.
Luyện tập 1		GV vẽ hình minh hoạ và yêu cầu hai HS lên bảng trình bày. *Gợi ý*. Có, hệ toạ độ gồm các trục CB, CD, CC' (đôi một vuông góc tại C); các vectơ đơn vị lần lượt cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC'}$.
2. TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM, TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN		
HĐ2. Hình thành khái niệm toạ độ của vectơ trong không gian	HS nhận biết được toạ độ của một điểm trong không gian đối với một hệ toạ độ cho trước.	– GV triển khai như trong SGK. – GV chú ý: + Toạ độ của một điểm trong mặt phẳng được định nghĩa theo cách thuần tuý hình học, tức là sử dụng hình chiếu vuông góc của một điểm trên mỗi trục toạ độ (lớp 8).

		Cách định nghĩa toạ độ trong không gian ở HĐ này sử dụng khái niệm vectơ trong không gian, từ đó suy ra ý nghĩa hình học của toạ độ ở phần sau. + Sau HĐ2, GV nhấn mạnh rằng các hệ số x, y, z là duy nhất. Kết quả này trên thực tế là một hệ quả được suy ra từ tính chất của ba vectơ "không đồng phẳng" $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. *Gợi ý:* a) Có (áp dụng quy tắc hình hộp). b) Mỗi vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ lần lượt cùng phương với các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
Khung kiến thức	Định nghĩa về toạ độ của một điểm trong không gian.	GV phát biểu như trong SGK.
	HS xác định được toạ độ của một điểm đặc biệt bằng định nghĩa.	GV gọi một HS trả lời. Trên thực tế, HS có thể dự đoán được đáp án dựa trên kiến thức đã biết trong mặt phẳng. Tuy nhiên sẽ có trường hợp HS chỉ nêu hai toạ độ thay vì ba. Trong trường hợp đó GV nhắc HS rằng trong không gian, toạ độ của một điểm là một bộ gồm ba số. *Gợi ý.* Vì $\overrightarrow{OO} = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ nên toạ độ của gốc O là $(0; 0; 0)$.
Ví dụ 2	HS xác định được toạ độ của một điểm trong một trường hợp cụ thể.	GV triển khai theo SGK. GV nhấn mạnh rằng để xác định toạ độ của điểm M trong không gian ta cần biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OM}$ qua các vectơ đơn vị.
Luyện tập 2		GV yêu cầu HS làm theo cặp và kiểm tra chéo. *Gợi ý.* Thực hiện tương tự Ví dụ 2, toạ độ của điểm N là $(2; 5; 4)$.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại định nghĩa về hệ toạ độ trong không gian và toạ độ của một điểm trong không gian.	GV gọi một số HS phát biểu và nhận xét.
Ví dụ 3	HS giải thích được ý nghĩa hình học của toạ độ của một điểm trong một trường hợp cụ thể.	GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ thì toạ độ của M là $(x; 0; 0)$.
Luyện tập 3		GV gợi ý HS áp dụng quy tắc hình bình hành cho các hình chữ nhật $OB'C'D'$, $OABB'$ và $OADD'$, sau đó sử dụng các kết quả đã có trong Ví dụ 3. *Gợi ý*. Trong hình bình hành $OB'C'D'$ có $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OB'} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, suy ra điểm C' có toạ độ là $(2; 3; 0)$. Tương tự, điểm B có toạ độ là $(0; 3; 5)$ và điểm D có toạ độ là $(2; 0; 5)$.
Nhận xét	HS nhận biết ý nghĩa hình học của toạ độ một điểm trong không gian.	Sau khi kết thúc Ví dụ 3 và Luyện tập 3, GV nhấn mạnh rằng các điểm D', B', A là hình chiếu vuông góc của điểm C trên các trục toạ độ, các điểm B, D, C' là hình chiếu vuông góc của điểm C trên các mặt phẳng toạ độ. Trong trường hợp tổng quát ta có các khẳng định trình bày như trong SGK.
Vận dụng 1	HS sử dụng được kiến thức về toạ độ của một điểm trong một tình huống thực tế.	GV gợi ý HS sử dụng hệ toạ độ đã có khi trả lời câu hỏi ở Mục 1. *Gợi ý*. Có thể chọn hệ trục toạ độ với các trục trùng với các mép tường: Ox hướng về phía trước trang giấy, Oy hướng về bên phải và Oz hướng lên trên, đơn vị trên mỗi trục lấy theo mét,

		khi đó toạ độ của bóng đèn là $(1; 1,5; 2)$. *Chú ý.* Tuỳ thuộc vào cách chọn các trục toạ độ và đơn vị trên các trục mà toạ độ của bóng đèn là khác nhau. Vì vậy GV nhấn mạnh với HS rằng, toạ độ của một điểm hoàn toàn phụ thuộc vào việc chọn hệ trục toạ độ.
HĐ3. Hình thành khái niệm toạ độ của vectơ trong không gian	HS nhận biết được khái niệm về toạ độ của vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Trước đó GV có thể nhắc lại toạ độ của một điểm trong không gian. *Gợi ý.* Gọi $(x;y;z)$ là toạ độ của điểm M thì $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, suy ra $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Sau khi HS thực hiện xong HĐ3, GV cũng nhấn mạnh bộ ba số (x, y, z) là duy nhất, từ đó dẫn tới khái niệm toạ độ của vectơ.
Khung kiến thức	Toạ độ của vectơ trong không gian.	GV triển khai như trong SGK. Trên thực tế các tính chất này là khá quen thuộc với HS vì đã được giới thiệu trong Chương trình Toán 10.
Nhận xét	HS nhận biết được mối liên hệ giữa toạ độ của một điểm và toạ độ của một vectơ và tính chất hai vectơ bằng nhau nếu và chỉ nếu chúng có các toạ độ tương ứng bằng nhau.	
Ví dụ 4	HS xác định được toạ độ của các vectơ cụ thể.	GV triển khai theo SGK. Có thể nhận thấy các kết quả trong Ví dụ 4 là sự mở rộng của các kết quả đã biết cho trường hợp của các vectơ đơn vị trong mặt phẳng.
Luyện tập 4		GV yêu cầu HS tự thực hiện và gọi một HS lên bảng trình bày lời giải. *Gợi ý.* $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} = (1; 2; 5)$.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
HĐ4. Thiết lập toạ độ của vectơ theo toạ độ hai đầu mút	HS giải thích được cách xác định toạ độ của một vectơ khi biết toạ độ của hai đầu mút.	GV triển khai theo SGK. *Gợi ý.* a) $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\overrightarrow{ON} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. b) Có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ $= (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} + (z'-z)\vec{k}$, suy ra toạ độ của $\overrightarrow{MN}$ là $(x'-x; y'-y; z'-z)$.
Khung kiến thức	Công thức biểu diễn toạ độ của một vectơ qua toạ độ của hai đầu mút.	– GV trình bày như trong SGK. – GV có thể gọi một số HS phát biểu bằng lời công thức đã nêu.
Ví dụ 5	HS sử dụng được công thức biểu diễn toạ độ của một vectơ qua toạ độ của hai đầu mút để xác định toạ độ của vectơ hoặc toạ độ của điểm.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 5		GV hướng dẫn HS tự thực hiện. *Gợi ý.* Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (4; -5; 4)$ nên $D(5; -5; 6)$. Vì $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} = (4; 0; -1)$ nên $D'(9; -5; 5)$.
Vận dụng 2	HS sử dụng được khái niệm về toạ độ của vectơ trong không gian để trả lời một câu hỏi liên quan đến thực tiễn.	GV nhắc lại khái niệm về vectơ biểu diễn độ dịch chuyển và gợi ý HS xác định phương, hướng và độ lớn của vectơ đó. *Gợi ý.* Gọi vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của máy bay trong nửa giờ là $\overrightarrow{AB}$ thì $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với vectơ đơn vị $\vec{j}$ và có độ dài bằng quãng đường máy bay di chuyển trong nửa giờ đó, tức là bằng: $890 \cdot 0,5 = 445$ (km). Do đó $\overrightarrow{AB} = 445\vec{j}$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là $(0; 445; 0)$.

Bài tập 2.14	HS nhận biết được hình ảnh về hệ trục toạ độ trong thực tiễn.	GV yêu cầu HS làm theo nhóm và gọi các nhóm lên bảng trình bày lời giải.
Bài tập 2.16	HS xác định được toạ độ của một số điểm cụ thể trong không gian.	GV yêu cầu HS tự thực hiện, sau đó gọi hai HS trình bày lời giải trước lớp.
Bài tập 2.18	HS sử dụng được mối liên hệ giữa toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm để xác định toạ độ của một số điểm trong không gian.	GV có thể yêu cầu HS xem lại Ví dụ 5 và Luyện tập 5 như là một gợi ý để giải bài tập này.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập về hệ toạ độ trong không gian: Các bài tập 2.13, 2.14.
- Bài tập về toạ độ của điểm trong không gian: Các bài tập 2.16, 2.17, 2.18, 2.19.
- Bài tập về toạ độ của vectơ trong không gian: Các bài tập 2.15, 2.18.
- Bài tập vận dụng: Các bài tập 2.14, 2.19.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.13. Các mệnh đề đúng là a, d.

2.14. Trục Ox là mép trần nhà nằm trên bức tường chứa bức tranh, trục Oy là mép còn lại của bức tường chứa bức tranh và trục Oz là mép trần nhà còn lại.

2.15. a) $\left(4; 2; -5\right)$; b) $\left(0; 0; 0\right)$; c) $\left(-10; 3; -7\right)$.

2.16. a) $\left(0; 0; 0\right)$; b) $\left(2; 0; 0\right)$; c) $\left(0; -3; 0\right)$.

2.17. Thực hiện tương tự Ví dụ 3 và Luyện tập 3, ta được:

$A\left(0; 0; 0\right)$, $C'\left(2; 4; 3\right)$, $C\left(2; 4; 0\right)$, $B'\left(0; 4; 3\right)$, $D'\left(2; 0; 3\right)$.

2.18. a) Vì $OABC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \left(-1; 2; 1\right)$, suy ra $C\left(-1; 2; 1\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \left(3; -5; 5\right)$, từ đó tính được

$O'\left(3; -5; 5\right)$, $A'\left(4; -4; 4\right)$, $B'\left(3; -2; 5\right)$.

2.19. Gọi M là điểm biểu diễn vị trí của máy bay. Khi máy bay di chuyển trên đường băng thì M luôn thuộc mặt phẳng (Oxy), do đó cao độ của M bằng 0. Vậy toạ độ của M có dạng $\left(x; y; 0\right)$.

Bài 8. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong không gian, thể hiện được các phép toán vectơ theo toạ độ.
- Xác định được độ dài của vectơ khi biết toạ độ của hai đầu mút.
- Vận dụng được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Về phẩm chất, năng lực

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc sử dụng các kiến thức liên môn và kiến thức thực tế để trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu và trong Mục 3 của bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Bài học này trình bày biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ (phép cộng/trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ và tích vô hướng của hai vectơ) đã học trong Bài 6. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong không gian hoàn toàn tương tự biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong mặt phẳng (ngoại trừ việc có 3 toạ độ thay vì 2). Do vậy HS có thể dễ dàng thừa nhận các biểu thức đó mà không gặp khó khăn nào. Đối với HS đại trà, thay vì yêu cầu HS chứng minh các biểu thức toạ độ một cách chặt chẽ, GV có thể dành thời gian để HS làm thêm các ví dụ và bài tập có sử dụng các biểu thức toạ độ đó.

2. Có hai cách để thiết lập biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian. Cách được trình bày trong bài học này là sử dụng tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng vectơ mà ta đã thừa nhận trong Bài 6 (xem HĐ2). Một cách tiếp cận khác là sử dụng định lí côsin như trong trường hợp của mặt phẳng. Cách tiếp cận này cho phép ta không cần thừa nhận bất cứ tính chất nào của tích vô hướng, tuy nhiên nó tương đối phức tạp đối với phần lớn HS và do đó không được trình bày trong bài học này.

3. Khi đã có biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, ta có thể đại số hoá nhiều bài toán hình học và đưa ra lời giải gồm các biến đổi đại số thuần tuý. Nếu có thời gian, GV nên trình bày thêm những bài toán như vậy để HS thấy được ứng dụng của phương pháp toạ độ trong không gian.

4. GV khuyến khích HS tìm hiểu thêm về các ứng dụng của biểu thức toạ độ của vectơ trong thực tiễn, ví dụ như tính khoảng cách giữa hai điểm hoặc tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Từ đầu đến hết Mục 1;

– Tiết 2, 3: Mục 2, 3 và chữa một số bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Tính toán các kích thước của vật thể sau khi đã mô hình hoá, từ đó dẫn tới nhu cầu hình thành biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.	GV mô tả tình huống và có thể yêu cầu HS dựa vào các tính chất hình học của lăng trụ đứng tam giác để xác định toạ độ các đỉnh của hình lăng trụ. Đến lúc này GV có thể đặt câu hỏi về cách tính khoảng cách giữa hai điểm khi biết toạ độ của hai điểm đó và dẫn dắt HS đến nội dung của bài học.
1. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ		
HĐ1. Hình thành biểu thức toạ độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ,	HS giải thích được biểu thức toạ độ của phép cộng/trừ hai vectơ và phép nhân một số với một vectơ trong trường hợp cụ thể, từ đó thừa nhận	– GV triển khai như trong SGK. Chú ý rằng HĐ1 hoàn toàn tương tự như hoạt động dẫn tới biểu thức toạ độ của các phép toán tương ứng trong mặt phẳng.

phép nhân một số với một vectơ trong không gian	biểu thức toạ độ của các phép toán trên trong trường hợp tổng quát.	– Trước khi bắt đầu, GV có thể (yêu cầu HS) nhắc lại định nghĩa về toạ độ của vectơ trong không gian. *Gợi ý.* a) $\vec{a}=\vec{i}+5\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}$. b) Ta có: $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+14\vec{k}$ nên toạ độ của $\vec{a}+\vec{b}$ là $(2;3;14)$; $2\vec{a}=2\vec{i}+10\vec{k}$ nên toạ độ của $2\vec{a}$ là $(2;0;10)$. – Đối với HS khá, giỏi, sau khi kết thúc HĐ1, GV có thể yêu cầu HS dự đoán biểu thức toạ độ của các phép toán cộng/trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.
Khung kiến thức	Biểu thức toạ độ của phép cộng/trừ hai vectơ và phép nhân một số với một vectơ.	– GV trình bày theo SGK. – GV có thể nhấn mạnh sự tương tự giữa các biểu thức toạ độ này với các biểu thức toạ độ trong mặt phẳng để HS dễ dàng ghi nhớ các công thức.
	HS xác định được toạ độ của vectơ đối của một vectơ.	GV gợi ý HS viết $-\vec{a}$ thành $(-1)\vec{a}$ và áp dụng biểu thức toạ độ của phép nhân một số với một vectơ. *Gợi ý.* $-\vec{a}$ có toạ độ là $(-x;-y;-z)$.
Nhận xét	HS nhận biết được dấu hiệu (dạng toạ độ) để hai vectơ cùng phương.	GV có thể yêu cầu HS nhắc lại điều kiện để hai vectơ (trong không gian) cùng phương, từ đó sử dụng biểu thức toạ độ của phép nhân một số với một vectơ để suy ra kết quả.
Ví dụ 1	HS sử dụng được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ vừa học để tìm toạ độ của một số vectơ cụ thể.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1		GV chia lớp thành các nhóm nhỏ và yêu cầu mỗi nhóm trình bày lời giải trên bảng. *Gợi ý.* $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}=(3;7;14)$.

HĐ2. Thiết lập toạ độ trung điểm đoạn thẳng, toạ độ trọng tâm tam giác	HS thiết lập được biểu thức toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và biểu thức toạ độ trọng tâm của tam giác.	GV triển khai theo SGK. *Gợi ý.* a) Gọi toạ độ của M là $(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{OM}=(x; y; z)$. Ta cũng có $\overrightarrow{OA}=(x_A; y_A; z_A)$ và $\overrightarrow{OB}=(x_B; y_B; z_B)$ nên $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ $=\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$. Từ đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ suy ra $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$; $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ và $z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$. b) Tương tự câu a.
Khung kiến thức	Biểu thức toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và biểu thức toạ độ trọng tâm của tam giác.	GV trình bày theo SGK.
Ví dụ 2	HS xác định được toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và toạ độ trọng tâm của tam giác trong trường hợp cụ thể.	GV hướng dẫn HS áp dụng các công thức vừa học để giải bài tập.
Luyện tập 2	HS áp dụng được các công thức vừa học để xác định được toạ độ của một điểm trong trường hợp cụ thể.	GV gợi ý HS đặt toạ độ của điểm C là $(x; y; z)$ và lập phương trình để tính x, y, z. *Gợi ý.* Từ giả thiết, ta có: $x_A+x_B+x=3x_G$, suy ra $x=3\cdot 3-2-9=-2$. Tương tự $y=-13$ và $z=8$. Vậy $C(-2; -13; 8)$.

Tiết 2, 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG		
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại biểu thức toạ độ của phép cộng/trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.	GV gọi một số HS phát biểu và nhận xét.
HĐ3. Thiết lập biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian	HS giải thích được biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian.	Trước khi triển khai HĐ3, GV yêu cầu HS nhắc lại định nghĩa và một số tính chất của tích vô hướng trong không gian. *Gợi ý.* a) Vì $\vec{i}$ có độ dài là 1 nên $\vec{i}\cdot\vec{i}=\left\|\vec{i}\right\|^2=1$. Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đôi một vuông góc nên $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$. b) Áp dụng câu a để suy ra $\vec{a}\cdot\vec{i}=x$. Tương tự suy ra $\vec{a}\cdot\vec{j}=y$ và $\vec{a}\cdot\vec{k}=z$. c) Tính $\vec{a}\cdot\left(x'\vec{i}\right)=x'\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)=xx'$. Tương tự, $\vec{a}\cdot\left(y'\vec{j}\right)=yy'$ và $\vec{a}\cdot\left(z'\vec{k}\right)=zz'$, từ đó suy ra biểu thức toạ độ của $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
Khung kiến thức	Biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian.	GV trình bày theo SGK. GV nhấn mạnh sự tương tự giữa biểu thức này và biểu thức đã học trong mặt phẳng.
Nhận xét	HS nhận biết được một số tính chất được suy ra từ biểu thức toạ độ của tích vô hướng.	GV trình bày theo SGK.
Ví dụ 3	HS sử dụng được biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian để tính	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 3		GV yêu cầu HS xác định toạ độ của

	góc giữa hai vectơ trong không gian và tính độ dài của một vectơ trong không gian khi biết toạ độ của các vectơ đó.	$\vec{a}+\vec{b}$ và từ đó tính $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$. *Gợi ý.* $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = 38$.
Ví dụ 4	HS sử dụng được biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian để giải tam giác trong không gian.	GV triển khai theo SGK.
Chú ý	Công thức tính khoảng cách giữa hai điểm khi biết toạ độ của mỗi điểm.	GV trình bày theo SGK.
Luyện tập 4	HS sử dụng được biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong không gian để giải tam giác trong không gian.	GV hướng dẫn HS tự thực hiện theo cách làm trong Ví dụ 4. Có thể áp dụng công thức tính khoảng cách vừa nhắc đến trong phần Chú ý. *Gợi ý.* $BC=\sqrt{110}$; $\widehat{ABC}=34{,}9°$; $\widehat{ACB}=24{,}2°$.
3. VẬN DỤNG TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN		
Ví dụ 5	HS sử dụng được toạ độ của vectơ trong một tình huống có liên quan đến thực tiễn.	GV trình bày theo SGK.
Luyện tập 5		GV yêu cầu HS tự thực hiện. *Gợi ý.* Gọi D là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo. Khi đó $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}=(140;\ 50;\ 1)$, suy ra $D(1\,080;\ 600;\ 9)$. Lưu ý rằng HS có thể sử dụng quan hệ $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$ hoặc nhận xét B là trung điểm của AD để tìm toạ độ của D.
Ví dụ 6	HS sử dụng được biểu thức toạ độ của tích vô hướng để trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.	GV triển khai theo SGK.

<table>
<tr>
<td>Luyện tập 6</td>
<td>HS sử dụng được biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong tình huống thực tiễn.</td>
<td>GV hướng dẫn HS tự thực hiện, chú ý rằng góc α cần tìm chính là góc $O'A'B'$ (hoặc góc OAB).
Gợi ý. $\alpha \approx 68,2^\circ$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ví dụ 7</td>
<td rowspan="2">HS biết cách xác định toạ độ của vật thể trong không gian ứng với một hệ toạ độ cho trước, từ đó biết cách tính khoảng cách giữa hai vật thể trong không gian.</td>
<td>GV triển khai theo SGK. Lưu ý rằng bài toán sẽ hay hơn nếu không phát biểu câu a. Tuy nhiên việc tự thiết lập được hệ trục toạ độ trong không gian là một yêu cầu tương đối khó với HS, do đó câu a được đưa vào như là một gợi ý để HS trả lời câu b, câu hỏi chính của bài toán.</td>
</tr>
<tr>
<td>Luyện tập 7</td>
<td>GV yêu cầu HS tự thực hiện.
Gợi ý. Khoảng cách từ hai chiếc khinh khí cầu đến điểm xuất phát lần lượt là 2,29 km và 1,97 km, do đó khinh khí cầu thứ nhất ở xa điểm xuất phát hơn.</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài tập 2.20</td>
<td>HS sử dụng được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong một số trường hợp cụ thể.</td>
<td rowspan="2">GV chia lớp thành các nhóm và gọi từng nhóm trình bày lời giải trên bảng; các nhóm nhận xét cho nhau.</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài tập 2.22</td>
<td>HS sử dụng được biểu thức toạ độ của tích vô hướng để giải tam giác trong không gian.</td>
</tr>
</table>

3. Phân loại bài tập

- Bài tập về biểu thức toạ độ của phép cộng/trừ vectơ, phép nhân một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ: Bài tập 2.20.
- Bài tập tổng hợp: Các bài tập 2.21, 2.22.
- Bài tập vận dụng: Các bài tập 2.23, 2.24.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.20. a) $(6; 0; 6)$; $(-15; 7; -8)$;

b) 1 và 34.

2.21. a) Ta tính được $\overrightarrow{MN} = (8; -7; -1)$ và $\overrightarrow{MP} = (7; 3; -4)$. Do không tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN}$ nên ba điểm M, N, P không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = (-8; 7; 1) + (-1; 10; -3) = (-9; 17; -2)$.

Để $MNPQ$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = (-9; 17; -2)$, suy ra $Q(-5; 13; 0)$.

c) Chu vi của hình bình hành $MNPQ$ bằng $2MN + 2MP = 2\left(\sqrt{114} + \sqrt{74}\right)$.

2.22. a) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; 2\right)$.

b) Ta tính được $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, từ đó suy ra $\widehat{BAC} = 90°$.

c) $54°$.

2.23. Gọi A là đỉnh của hình hộp chữ nhật nằm trên mặt phẳng (Oxy) và không nằm trên các trục. Gọi B là đỉnh của hình hộp chữ nhật nằm trên mặt phẳng (Oyz) và không nằm trên các trục. Trần nhà là hình chữ nhật nên điểm treo đèn (là tâm của hình chữ nhật) là trung điểm của đường chéo AB. Vì $A(6; 0; 3)$ và $B(0; 8; 3)$ nên toạ độ của điểm treo đèn là $(3; 4; 3)$.

2.24. Khoảng cách từ tàu thám hiểm đến radar là $\sqrt{25^2 + 15^2 + (-10)^2} \approx 30{,}8$ (km). Khoảng cách này lớn hơn phạm vi theo dõi của radar nên radar không thể phát hiện được tàu thám hiểm.

ÔN TẬP CHƯƠNG II (2 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV cho HS tóm tắt những kiến thức trọng tâm mà HS đã học trong chương II.
- GV cho HS làm phần trắc nghiệm trên lớp, chọn lọc một số bài toán tự luận điển hình trong phần ôn tập chương này để chữa bài, số bài tập còn lại để HS tự luyện tập.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

A. Trắc nghiệm

2.25. D.	**2.26.** B.	**2.27.** D.	**2.28.** B.	**2.29.** C.
2.30. C.	**2.31.** A.	**2.32.** B.	**2.33.** B.	**2.34.** A.

B. Tự luận

2.35. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì O là trung điểm của AC và BD.

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$. Do đó $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

2.36. Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Khi đó $3\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN}\right)+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2.37. a) Vì $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

b) Theo câu a và theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=3\overrightarrow{AG}$. Do đó ba điểm A, G, C' thẳng hàng.

2.38. a) $G\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$.

b) Vì M thuộc Oz nên toạ độ của M có dạng $M(0;0;t)$. Suy ra $\overrightarrow{BM}=(-1;-1;t+1)$ mà $\overrightarrow{AC}=(-3;1;-1)$ nên $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=3-1-t-1=1-t=0\Leftrightarrow t=1$. Vậy $M(0;0;1)$.

2.39. Ta có:

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(1;5;4)\Rightarrow B(1;5;4)$; $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OO'}=(3;1;3)\Rightarrow A'(3;1;3)$;

$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}=(0;0;5)\Rightarrow C'(0;0;5)$;

$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OO'}=(2;3;6)\Rightarrow B'(2;3;6)$.

2.40. a) $\vec{u}=\left(-4;-1;4\right)$.

b) $|\vec{u}|=\sqrt{16+1+16}=\sqrt{33}$.

c) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

2.41. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-3;-3;3\right)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$.

b) Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{AB}=\left(3;3;-3\right)\Rightarrow M\left(3;1;0\right)$.

c) Vì A,B,N thẳng hàng nên $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Theo giả thiết, N thuộc mặt phẳng toạ độ (Oxy) nên $N\left(a;b;0\right)$.

Do đó $\dfrac{a-4}{-3}=\dfrac{b-2}{-3}=\dfrac{0+1}{3}\Rightarrow a=3;b=1\Rightarrow N\left(3;1;0\right)$.

2.42. a) Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho O là góc nhà phía trên trần nhà (điểm giao của hai bức tường và trần nhà) và trục Ox là giao của bức tường bên trái với trần nhà; trục Oy là điểm giao của bức tường bên phải với trần nhà; trục Oz là giao của hai bức tường; đơn vị trên mỗi trục đều là mét. Khi đó, toạ độ của chiếc đèn ở vị trí ban đầu là $A\left(1,2;1,6;0,5\right)$. Toạ độ của chiếc đèn ở vị trí mới là $B\left(1,5;1,5;0,4\right)$.

b) Khoảng cách giữa hai vị trí của chiếc đèn là:

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{\sqrt{11}}{10}\approx 0,3\ (\text{m}).$$

Chương III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Phần thống kê trong CT GDPT môn Toán bậc THPT hoàn toàn trình bày về các số đặc trưng của mẫu số liệu, bao gồm mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Các số đặc trưng cho mẫu số liệu không ghép nhóm được trình bày trong Chương trình Toán lớp 10. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm (trung bình, trung vị, tứ phân vị và mốt) được giới thiệu trong Chương trình Toán lớp 11. Chương này cũng là toàn bộ nội dung phần thống kê của lớp 12, sẽ giới thiệu về các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn.

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 2 bài học và phần Bài tập cuối chương với tổng thời lượng là 4 tiết. Phân bố thời lượng cụ thể như sau:

Bài 9. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị	1 tiết
Bài 10. Phương sai và độ lệch chuẩn	2 tiết
Bài tập cuối chương III	1 tiết.

3 Một số điểm cần lưu ý

- Khi có mẫu số liệu gốc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta sẽ tính được các số đặc trưng đo độ phân tán của mẫu số liệu này. Tuy nhiên, trong một số trường hợp ta chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm. Các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm là xấp xỉ cho các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu gốc.
- Đối với số liệu liên tục, các nhóm số liệu có thể được cho dưới dạng $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$, $(a; b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, để đơn giản, SGK quy ước nhóm số liệu được cho dưới dạng $[a; b)$, riêng nhóm số liệu cuối cùng có thể là $[a; b]$.
- Ta cần phải hiệu chỉnh mẫu số liệu ghép nhóm trước khi tính các số đặc trưng cho mẫu số liệu ghép nhóm của số liệu rời rạc.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 9. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Tính được khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hiểu được ý nghĩa, vai trò của khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị trong việc đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực giao tiếp toán học thông qua việc đọc mẫu số liệu ghép nhóm; rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc tính toán khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu ghép nhóm để giải quyết các câu hỏi thực tế.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- HS cần ôn lại cách tính khoảng biến thiên, tứ phân vị của mẫu số liệu không ghép nhóm đã được học trong Chương trình Toán lớp 10 và ý nghĩa của các số đặc trưng đó trong việc đo mức độ phân tán.
- Trong một số tài liệu, để tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm người ta chọn trong mỗi nhóm một điểm đại diện x_i và định nghĩa khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = \max\limits_{1\le i\le n} x_i - \min\limits_{1\le i\le n} x_i$. Tuy nhiên, định nghĩa khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm như trình bày ở SGK là phổ biến hơn.
- Khoảng biến thiên còn được gọi là biên độ.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 1 tiết.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Khơi gợi động cơ, đưa ra một tình huống dẫn đến yêu cầu cần định nghĩa các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm.	– Nhắc lại các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm đã học. – Do ta không có mẫu số liệu gốc nên không tính được các số đặc trưng này. Vì vậy, ta cần tìm cách tính các số đặc trưng này cho mẫu số liệu ghép nhóm.
1. KHOẢNG BIẾN THIIÊN		
HĐ1 và Khung kiến thức	Dẫn dắt và đưa ra định nghĩa khoảng biến thiên cho mẫu số liệu ghép nhóm.	GV hướng dẫn HS thực hiện như SGK. *Gợi ý HĐ1:* a) Không thể tính chính xác khoảng biến thiên cho mẫu số liệu gốc do ta không biết các giá trị x_i. b) Giá trị bé nhất các x_i có thể nhận là 30; giá trị lớn nhất của các x_i thuộc [38; 40). c) HS có thể đưa ra các phương án khác nhau. Hai phương án hay gặp là như định nghĩa (40 – 30 = 10) và phương án chọn điểm đại diện như trong Mục II.
	Giúp HS hiểu được rằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.	*Gợi ý.* Giả sử dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ đã được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó giá trị chính xác của khoảng biến thiên là $x_n - x_1$. Do $x_n < a_{k+1}$ và $x_1 \geq a_1$ nên $x_n - x_1 < a_{k+1} - a_1$, hay khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm lớn hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
Ví dụ 1	Hướng dẫn HS tính khoảng biến thiên cho mẫu số liệu ghép nhóm và đưa ra kết luận	GV hướng dẫn HS thực hiện như SGK.

	về mức độ phân tán của mẫu số liệu dựa trên kết quả tính được.	
Luyện tập 1	HS luyện tập tính khoảng biến thiên cho mẫu số liệu ghép nhóm.	GV cho HS thực hiện và gọi lên bảng trình bày. *Gợi ý.* a) $R = 45 - 25 = 20$; b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là $43 - 27 = 16$.
2. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ		
HĐ2, Khung kiến thức, Ý nghĩa và Nhận xét	– Dẫn dắt và đưa ra định nghĩa khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu ghép nhóm. – Giúp HS hiểu được ý nghĩa, tính chất của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị này là xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.	GV cho HS thực hiện như SGK. *Gợi ý HĐ2:* a) Không thể tính chính xác khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu gốc do ta không biết các giá trị x_i. b) $Q_1 = 33{,}25$; $Q_3 = 36{,}625$. c) HS có thể đưa ra các phương án khác nhau. Tuy nhiên phương án phổ biến và hợp lí nhất là $Q_3 - Q_1$.
Ví dụ 2	Hướng dẫn HS tìm khoảng tứ phân vị và đưa ra kết luận về mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.	GV cho HS thực hiện như SGK.
Luyện tập 2	HS luyện tập tìm khoảng tứ phân vị và đưa ra kết luận về mức độ phân tán.	GV cho HS thực hiện và gọi lên bảng trình bày. *Gợi ý.* $Q_1 \approx 1{,}71$; $Q_3 = 3{,}5$. Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = 1{,}79$.
Vận dụng	HS vận dụng các kiến thức đã học để giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.	GV cho HS thực hiện và gọi lên bảng trình bày. *Gợi ý:* – Dựa vào khoảng biến thiên: Với mẫu số liệu năm 2021: $R_1 = 40 - 30 = 10$; Với mẫu số liệu năm 2022: $R_2 = 40 - 28 = 12$.

		Vậy nếu dựa vào khoảng biến thiên để kết luận thì mẫu số liệu năm 2021 phân tán hơn. – Dựa vào khoảng tứ phân vị: Với mẫu số liệu năm 2021: $Q_1 = 33,375; Q_2 \approx 38,33; \Delta_Q \approx 4,96.$ Với mẫu số liệu năm 2022: $Q_1 = 33,25; Q_2 = 36,625; \Delta_Q = 3,375.$ Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu năm 2021 phân tán hơn.

3. Phân loại bài tập

- Bài này gồm ba bài tập. Các bài tập nhằm vào yêu cầu cần đạt cơ bản là tính và hiểu được ý nghĩa của các số đặc trưng khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm để đo mức độ phân tán.
- GV có thể giao cả ba bài tập cho HS làm ở nhà.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

3.1. a) Giá trị lớn nhất là 101 nên các nhóm gồm [40; 50), [50; 60), [60; 70), [70; 80), [80; 90), [90; 100), [100; 110). Số giá trị của mẫu thuộc mỗi nhóm tương ứng là 2, 5, 7, 5, 0, 0, 1.

Ta có mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Nhóm	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[100; 110)
Tần số	2	5	7	5	1

b) – Với mẫu số liệu gốc:

Giá trị lớn nhất là 101, nhỏ nhất là 42, do đó khoảng biến thiên $R = 101 - 42 = 59$.

Cỡ mẫu: $n = 20$ nên $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{55+57}{2} = 56$; $Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{73+75}{2} = 74$.

Do đó $\Delta_Q = 74 - 56 = 18$.

– Với mẫu số liệu ghép nhóm:

Khoảng biến thiên: $R = 110 - 40 = 70$.

Ta có: $Q_1 = 56$; $Q_3 = 72$ nên $\Delta_Q = 72 - 56 = 16$.

Các khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc (59 và 18) là các giá trị chính xác. Các khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm (70 và 16) là các giá trị xấp xỉ.

3.2. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm ta tính được mức thu nhập trung bình (đơn vị: triệu đồng) của người lao động tại nhà máy A và B tương ứng là: $\overline{x}_A = 12,5$; $\overline{y}_B = 12,5$.

Khoảng tứ phân vị của thu nhập người lao động ở nhà máy A:

$$Q_1 \approx 9,61;\ Q_3 \approx 15,39;\ \Delta_Q \approx 5,78.$$

Khoảng tứ phân vị của thu nhập người lao động ở nhà máy B:

$$Q_1 \approx 9,37;\ Q_3 \approx 15,63;\ \Delta_Q \approx 6,23.$$

Dựa vào khoảng tứ phân vị thì có thể khẳng định thu nhập của người lao động ở nhà máy B phân tán hơn.

3.3. a) Với số liệu về chiều cao của học sinh lớp 12A:

Khoảng biến thiên: $R = 175 - 145 = 30$;

Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 167,125 - 158,25 = 8,875$.

Với số liệu về chiều cao của học sinh lớp 12B:

Khoảng biến thiên: $R = 175 - 155 = 20$;

Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 167,5 - 158,09 \approx 9,41$.

b) Ta nên dùng khoảng tứ phân vị vì khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị quá lớn hay quá bé.

Bài 10. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Tính được phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hiểu được ý nghĩa, vai trò của phương sai, độ lệch chuẩn trong việc đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm và áp dụng vào các bài toán thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực giao tiếp toán học thông qua việc đọc mẫu số liệu ghép nhóm; rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc tính toán phương sai, độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu ghép nhóm và áp dụng vào các bài toán đo mức độ rủi ro.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- HS cần ôn lại cách tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu không ghép nhóm đã được học trong Chương trình Toán lớp 10 và ý nghĩa của các số đặc trưng đó trong việc đo mức độ phân tán.
- Trong một số tài liệu, người ta còn định nghĩa phương sai và độ lệch chuẩn như sau:

$$\hat{s}^2 = \frac{m_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + m_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2}{n-1},\ \hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}.$$

Để so sánh mức độ phân tán của hai mẫu số liệu thì dùng định nghĩa này và định nghĩa đưa ra trong SGK là như nhau. Tuy nhiên, định nghĩa như SGK tự nhiên hơn và dễ hiểu hơn với HS.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Mục 1;

– Tiết 2: Mục 2.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Khơi gợi động cơ, đưa ra một tình huống dẫn đến nhu cầu cần định nghĩa độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm để xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc mà ta không có.	GV giới thiệu bài toán như SGK và có thể nhắc lại về phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu không ghép nhóm đã được học trong Chương trình Toán lớp 10.

1. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN		
HĐ1	Dẫn dắt để đưa ra định nghĩa phương sai, độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu ghép nhóm.	GV cho HS thực hiện như SGK. *Gợi ý:* a) Không tính được phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc do ta không biết các giá trị x_i. b) HS có thể đưa ra các phương án khác nhau. GV có thể phân tích và đưa ra ước lượng như định nghĩa.
Khung kiến thức, Nhận xét, Ý nghĩa và Chú ý	– Đưa ra định nghĩa phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm. – Giúp HS hiểu được ý nghĩa của phương sai, độ lệch chuẩn.	– GV cho HS thực hiện như SGK. – Trong hai đại lượng này, người ta hay dùng độ lệch chuẩn hơn do nó cùng đơn vị đo với mẫu số liệu. Phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là xấp xỉ cho phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.
Ví dụ 1	Hướng dẫn HS tính phương sai, độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu ghép nhóm.	GV cho HS thực hiện như SGK.
Luyện tập 1	HS luyện tập tính phương sai, độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu ghép nhóm.	GV cho HS thực hiện và gọi lên bảng trình bày. *Gợi ý.* Phương sai $s^2 \approx 0{,}0299$ và độ lệch chuẩn $s \approx 0{,}1729$. Phương sai và độ lệch chuẩn cho biết độ ổn định về thành tích của vận động viên.
Vận dụng	Giúp HS vận dụng kiến thức đã học để giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.	GV cho HS thực hiện và gọi lên bảng trình bày. *Gợi ý.* Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $s \approx 0{,}1023 < 0{,}15$ nên chưa cần đưa máy đi sửa chữa.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. SỬ DỤNG PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN ĐO ĐỘ RỦI RO		
Ví dụ 2	Giúp HS thấy được vai trò của phương sai, độ lệch chuẩn trong việc đo độ rủi ro.	GV cho HS thực hiện như SGK.
Ví dụ 3	Giúp HS thấy được có trường hợp không nên dùng phương sai, độ lệch chuẩn để đo độ rủi ro.	GV cho HS thực hiện như SGK.
Nhận xét (GV có thể giới thiệu về hệ số biến thiên trong mục Em có biết?)	Giúp HS hiểu được khi nào nên/không nên dùng phương sai, độ lệch chuẩn để đo độ rủi ro.	GV cho HS thực hiện như SGK.

3. Phân loại bài tập

- Bài này gồm 5 bài tập. Các bài tập nhằm vào các yêu cầu cần đạt cơ bản là tính và hiểu được ý nghĩa của các số đặc trưng phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- GV có thể lựa chọn 2 hoặc 3 bài để giao cho HS làm ở nhà.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

3.4. a) Đếm số giá trị thuộc mỗi nhóm ta có mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm số liệu	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)	[51; 51,5)
Số bao xi măng	6	2	4	4	6	8

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc là $s_1 \approx 0{,}934$. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $s_2 \approx 0{,}929$. Giá trị của s_2 là giá trị xấp xỉ cho giá trị chính xác s_1.

3.5. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho tuổi thọ của linh kiện điện tử được sản xuất bởi phân xưởng 1 là $s_1 \approx 0{,}5957$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho tuổi thọ của linh kiện điện tử được sản xuất bởi phân xưởng 2 là $s_2 \approx 0,4675$.

Do $s_1 > s_2$ nên tuổi thọ của các linh kiện điện tử do phân xưởng 1 sản xuất phân tán hơn tuổi thọ của các linh kiện điện tử do phân xưởng 2 sản xuất.

3.6. a) Số trung bình $\overline{x} = 5,45$ (μm) và độ lệch chuẩn $s \approx 0,43$.

b) Số trung bình $\overline{x}$ và độ lệch chuẩn s cho biết giá trị trung bình và độ phân tán của đường kính nhân tế bào.

3.7. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm về thành tích chạy cự li 100 mét của vận động viên A là $s_A \approx 0,259$ (giây).

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm về thành tích chạy cự li 100 mét của vận động viên B là $s_B \approx 0,288$ (giây).

Như vậy, thành tích của vận động viên A ổn định hơn thành tích của vận động viên B.

3.8. *HD*. Sử dụng các Nhận xét, bình luận trong Mục 2, bài 10 SGK để đưa ra lời giải.

ÔN TẬP CHƯƠNG III (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

– Bài ôn tập chương được thiết kế cho 1 tiết học, gồm hai phần:

Phần A: Trắc nghiệm. Các câu hỏi trắc nghiệm trong phần này chủ yếu kiểm tra kiến thức cơ bản đã được học.

Phần B: Tự luận. Các bài tập cuối chương gồm 4 bài mang tính tổng hợp.

– Với thời lượng 1 tiết, GV có thể tổng kết kiến thức của chương, cho HS trả lời một số câu hỏi trắc nghiệm trong phần A và bài tập trong phần B. Các câu hỏi, bài tập còn lại có thể giao cho HS tự làm ở nhà.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

A. Trắc nghiệm

3.9. C. **3.10.** C. **3.11.** C. **3.12.** B. **3.13.** A.

B. Tự luận

3.14. Khoảng biến thiên là: $R = 7,5 - 5 = 2,5$.

Cỡ mẫu $n = 2 + 8 + 15 + 10 + 5 = 40$.

Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 6$.

Tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 6,5 + \frac{30-25}{10} \cdot 0,5 = 6,75$.

Do đó, khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = 6,75 - 6 = 0,75$.

Độ lệch chuẩn là:

$$s = \sqrt{\frac{1}{40}\left(2 \cdot 5,25^2 + \ldots + 5 \cdot 7,25^2\right) - \left(\frac{2 \cdot 5,25 + \ldots + 5 \cdot 7,25}{40}\right)^2} \approx 0,5268.$$

3.15.

a) Tiền lãi trung bình (đơn vị: triệu đồng) khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B tương ứng là $\overline{x}_A = 18,5$; $\overline{x}_B = 16,9$. Như vậy, đầu tư vào lĩnh vực A mang số tiền lãi trung bình cao hơn.

b) Độ lệch chuẩn của hai mẫu tương ứng là $s_A \approx 5,831$; $s_B \approx 8,040$. Như vậy, mức độ phân tán của tiền lãi khi đầu tư vào lĩnh vực B cao hơn khi đầu tư vào lĩnh vực A.

3.16. *HD*. a) Tính các số đặc trưng đo mức độ phân tán theo định nghĩa.

b) Mức độ phân tán cho biết mức độ chênh lệch về thành tích của các vận động viên tham dự giải.

3.17. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho kết quả đo của An là $s_A \approx 0,039$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho kết quả đo của Bình là $s_B \approx 0,045$.

Do $s_A < s_B$ nên ta kết luận rằng vôn kế của An cho kết quả đo ổn định hơn.

Chương IV. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

- Cùng với phép tính vi phân, phép tính tích phân là một trong hai phép tính cơ bản của Giải tích. Chương này trình bày khái niệm, tính chất cơ bản của nguyên hàm và tích phân, cũng như ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng và thể tích vật thể. Ở đây, khái niệm tích phân được định nghĩa thông qua khái niệm nguyên hàm nhờ công thức Newton-Leibniz.
- Một trong những mục đích của chương này là ứng dụng tích phân để xây dựng các công thức tính thể tích vật thể trong Hình học, mà HS thường phải thừa nhận trước đây. Điều này thể hiện rõ tính tích hợp của Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 (ở đây là ứng dụng của Giải tích trong Hình học).

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 3 bài học và 2 tiết ôn tập chương, được thực hiện trong 15 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 11. Nguyên hàm	5 tiết
Bài 12. Tích phân	4 tiết
Bài 13. Ứng dụng hình học của tích phân	4 tiết
Bài tập cuối chương IV	2 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Bài toán tìm nguyên hàm của một hàm số là bài toán ngược của bài toán tìm đạo hàm của một hàm số nhưng phức tạp hơn nhiều. Tuy nhiên, theo quy định và tinh thần chung của Chương trình là "tinh giản, thiết thực", SGK Toán 12 chỉ yêu cầu tìm nguyên hàm của những hàm số đơn giản có dạng tổng, hiệu của những hàm số sơ cấp đơn giản hoặc tích của hàm số sơ cấp đơn giản với một hằng số, nhờ bảng nguyên hàm của những hàm số sơ cấp đơn giản này (suy ra từ bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp đơn giản đã học ở lớp 11) và các tính chất cơ bản của nguyên hàm. SGK Toán 12 không trình bày các phương pháp tổng quát tìm nguyên hàm (phương pháp đổi biến số, phương pháp lấy nguyên hàm từng phần), không có những bài tập lắt léo về tìm nguyên hàm.

– Vì lí do sư phạm, khái niệm tích phân trong SGK Toán 12 không được định nghĩa dựa vào giới hạn của tổng tích phân như ở các giáo trình Giải tích ở bậc Đại học, mà định nghĩa tích phân thông qua nguyên hàm nhờ công thức Newton-Leibniz. Định nghĩa này có ưu điểm là đơn giản, dễ tiếp thu và thuận lợi trong thực hành khi tính tích phân, nhưng có hạn chế là không bộc lộ được rõ bản chất, ý nghĩa thực sự của tích phân.

– Một hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ sẽ có nguyên hàm (và do đó sẽ có tích phân) trên đoạn đó. Có thể chứng minh được rằng, khi đó hàm số $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ a \le x \le b,$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;\ b]$.

– Theo tinh thần "tinh giản, thiết thực" và yêu cầu của Chương trình, SGK Toán 12 chỉ có những bài tập đơn giản về tìm nguyên hàm, tính tích phân, dựa trên Bảng nguyên hàm cơ bản và các tính chất cơ bản của nguyên hàm, tích phân. SGK Toán 12 không trình bày các phương pháp tính tích phân. Tuy nhiên, SGK lại nhấn mạnh đến những ứng dụng của tích phân trong thực tiễn, cũng như là chú trọng đến ứng dụng tích phân để xây dựng lại các công thức tính thể tích của các hình hình học trong Hình học không gian (mà HS đã học ở phần Hình học trực quan ở cấp THCS và ở phần Hình học lớp 11, nhưng ở đó HS thường phải thừa nhận các công thức này).

– Do trong Chương trình (và do đó trong SGK Toán 12) không đề cập đến vấn đề tương giao của các đồ thị hàm số, nên để thuận lợi cho HS trong việc xác định các cận của tích phân tương ứng, khi xét hình phẳng (kín) giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, SGK thường cho thêm hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$, mặc dù đôi khi việc cho thêm hai đường thẳng này là không cần thiết (vì hai giá trị này của x chính là các hoành độ giao điểm (nhỏ nhất và lớn nhất) của hai đồ thị đã cho).

– Để thuận lợi trong việc tìm nguyên hàm (và tính tích phân) của các hàm số cụ thể, SGK Toán 12 có giới thiệu khái niệm hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$, công thức tính đạo hàm và nguyên hàm của nó. Lưu ý rằng khi α không nguyên, tập xác định của hàm số luỹ thừa này là khoảng $(0; +\infty)$ và ta có công thức tìm nguyên hàm:

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \ne -1).$$

Chú ý rằng, công thức này đúng khi $x > 0$. Nếu $\alpha > 0$, bằng cách coi $0^\alpha = 0$ ta có thể chứng minh công thức trên cũng đúng khi $x \ge 0$. Nói riêng, ta có thể viết $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*, x \ge 0$.

Tuy nhiên, trong SGK Toán 12 để đơn giản cho HS (để HS có thể áp dụng trực tiếp công thức đã học mà không cần lí giải gì thêm) nên khi xét nguyên hàm hoặc tích phân của những hàm có dạng $y=\sqrt[n]{x}$ (chẳng hạn $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$) ta thường hạn chế xét trên các khoảng/đoạn nằm trong $(0;+\infty)$ (để không chứa điểm $x=0$). Mặc dù về mặt toán học, những hạn chế này thực ra là không thật cần thiết.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 11. NGUYÊN HÀM (5 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số.
- Tìm được nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp thường gặp.
- Vận dụng được khái niệm nguyên hàm vào giải quyết một số bài toán từ thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến khái niệm nguyên hàm.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày khái niệm nguyên hàm ở đây và SGK Toán 12 trước đây. Tuy nhiên, theo tinh thần của Chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến ứng dụng của nguyên hàm trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến khái niệm nguyên hàm. Nói riêng, để giảm bớt tính hàn lâm theo tinh thần của Chương trình, chúng tôi không đưa vào chứng minh dạng tường minh của họ nguyên hàm và các tính chất cơ bản.
- Ở bài này, khác với SGK Toán 12 trước đây, việc tìm nguyên hàm của một hàm số chỉ dừng ở việc vận dụng các phép toán tổng, hiệu và nhân với một hằng số từ các nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản.
- GV có thể sử dụng một số phần mềm toán học như GeoGebra để tìm nguyên hàm của một số hàm số đơn giản. Nếu có điều kiện, GV có thể hướng dẫn HS thực hành để kiểm chứng kết quả nhanh chóng và tăng cường năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.

– Chuẩn bị:

+ GV: Chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế liên quan đến ứng dụng của nguyên hàm (liên hệ đến khái niệm và các phép toán về đạo hàm).

+ HS: Ôn lại kiến thức và kĩ năng tính đạo hàm của hàm số. Xem lại các khái niệm vận tốc, điện lượng, phương trình chuyển động của vật rơi tự do đã được học trong Vật lí.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 5 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Mục 1. Nguyên hàm của một hàm số.

– Tiết 2: Mục 2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm.

– Tiết 3: Mục 3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

3a) Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa.

3b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác.

– Tiết 4: Mục 3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

3c) Nguyên hàm của hàm số mũ.

Gợi ý chữa một số bài tập.

– Tiết 5: Gợi ý chữa một số bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết. GV có thể yêu cầu HS nhắc lại ý nghĩa cơ học của đạo hàm đã học.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ		
HĐ1. Nhận biết khái niệm nguyên hàm	Hình thành khái niệm nguyên hàm. Cần lưu ý cho HS nhận biết đẳng thức $F'(x)=f(x)$ trong định nghĩa nguyên hàm.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu kết quả và giới thiệu sơ bộ về đẳng thức $F'(x)=f(x)$.
Khung kiến thức	Giới thiệu khái niệm nguyên hàm của một hàm số.	GV cần làm rõ đẳng thức $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.
Chú ý	Giúp HS nhận biết khái niệm nguyên hàm trên một đoạn, một nửa khoảng.	GV cần làm rõ sự khác biệt của đẳng thức $F'(x)=f(x), \forall x \in K$, trong trường hợp K là một khoảng hay một nửa khoảng, một đoạn.
Ví dụ 1	Rèn cho HS kĩ năng vận dụng định nghĩa.	– Lưu ý HS thực hiện lần lượt tính đạo hàm của các hàm số đã cho. – Yêu cầu HS đối chiếu định nghĩa nguyên hàm để kết luận và giải thích được cho kết luận đưa ra.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng vận dụng định nghĩa nguyên hàm.	HS tự làm tại lớp. *Đáp số*: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
HĐ2. Nhận biết họ nguyên hàm của một hàm số	Giúp HS nhận biết tập hợp các nguyên hàm của một hàm số.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. Từ đó GV cho HS thấy tập hợp các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số và $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS khái niệm họ nguyên hàm của một hàm số: Định nghĩa và kí hiệu.	GV cần làm rõ kí hiệu nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$ và tập hợp $F(x)+C$, với C là hằng số và $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$.

Chú ý	Giới thiệu sự tồn tại của nguyên hàm và quy tắc thực hành tìm nguyên hàm.	Lưu ý cho HS sự tồn tại của nguyên hàm trên một khoảng và cách tìm họ nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$.
Ví dụ 2	Thực hành tìm họ nguyên hàm của một hàm số đơn giản.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tìm họ nguyên hàm.	HS tự làm tại lớp. *Đáp số*: $\int x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc tiết tiếp theo hoặc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM		
HĐ3. Khám phá nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số khác 0	Giúp HS nhận biết họ nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số khác 0.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ3. GV giúp đỡ HS khi cần trong việc so sánh hai họ nguyên hàm. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS họ nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số.	GV cần làm rõ phép nhân một hằng số k với họ nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$ và quy tắc thực hành "đưa một hằng số ra ngoài dấu nguyên hàm".
Ví dụ 3	Thực hành tìm họ nguyên hàm của tích	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý sử dụng nguyên hàm đã biết của hàm số x^2.

	một hàm số với một hằng số khác 0.	
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng tìm nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý:* a) $F'(x) = x^n = f(x)$ với mọi x nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ b) $\int kx^n \mathrm{d}x = k\int x^n \mathrm{d}x = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C.$
HĐ4. Khám phá nguyên hàm của một tổng	Giúp HS nhận biết nguyên hàm của một tổng hai hàm số.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV giúp đỡ HS khi cần. – GV làm rõ tổng của hai họ nguyên hàm.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS các tính chất về nguyên hàm của tổng, hiệu hai hàm số.	GV làm rõ thêm tính chất nguyên hàm của hiệu hai hàm số từ nguyên hàm của tổng hai hàm số và của tích một hàm số với một hằng số khác 0.
Ví dụ 4	Thực hành tìm nguyên hàm của một tổng, hiệu kết hợp với tích của một hàm số với một hằng số khác 0.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. – GV gợi ý sử dụng nguyên hàm $\int x^n \mathrm{d}x$ với n là một số nguyên dương.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng tìm nguyên hàm dựa trên các tính chất cơ bản của nguyên hàm.	HS tự làm tại lớp. *Đáp số:* a) $\int (3x^2+1)\mathrm{d}x = x^3 + x + C;$ b) $\int (2x-1)^2 \mathrm{d}x = \frac{(2x-1)^3}{6} + C.$

Ví dụ 5	Rèn luyện năng lực vận dụng tổng hợp các kiến thức, kĩ năng được học để giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.	Cần làm rõ cho HS các bước giải: – Bước 1: Viết phương trình chuyển động (mô hình hoá bài toán). – Bước 2: Tìm nguyên hàm từ phương trình chuyển động để có biểu thức tính quãng đường khi biết biểu thức vận tốc (sử dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm). – Bước 3: Thay các giá trị tại thời điểm ban đầu (khi máy bay bắt đầu chạy đà) và khi cất cánh. Từ đó tính ra quãng đường chạy đà.
Vận dụng	Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học, vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài học để giải quyết bài toán thực tế.	Đây là tình huống để thực hiện dạy học phân hoá. Tuỳ trình độ chung của lớp học, GV chọn cách dạy phù hợp (hướng dẫn để HS tự làm, hay chữa chi tiết cho HS, ...). *HD.* Từ định nghĩa đạo hàm có $$R'(x) = M_R(x).$$ Cho trước hàm tốc độ biến động của doanh thu $M_R(x)$ khi x đơn vị sản phẩm được bán ra thì $R(x)$ là một nguyên hàm của $M_R(x)$. Do đó $$R(x) = \int M_R(x)\mathrm{d}x = \int (300 - 0{,}1x)\mathrm{d}x = 300x - \frac{0{,}1x^2}{2} + C.$$ Từ ý nghĩa thực tiễn, $R(0) = 0$ nên $C = 0$. Từ đó tìm được $R(1\,000) = 200\,000$ (triệu đồng).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP		
a) Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa		
Phần mở đầu	Giới thiệu cho HS hàm số luỹ thừa và công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa.	– GV nhấn mạnh các trường hợp khác nhau của hàm số ứng với số mũ nguyên dương, nguyên âm hoặc bằng 0, không nguyên. – Làm rõ thêm một số hàm căn thức hay gặp viết dưới dạng hàm số luỹ thừa.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS quy tắc đạo hàm của hàm số luỹ thừa.	– GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. – GV cần làm rõ điều kiện $x > 0$ ứng với số mũ α tổng quát (nói chung không nguyên).
	Củng cố quy tắc đạo hàm của hàm số luỹ thừa.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý việc biến đổi về biểu thức dạng x^{α}.
HĐ5. Khám phá nguyên hàm của hàm số luỹ thừa	Giúp HS nhận biết nguyên hàm của hàm số luỹ thừa.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ5. GV có thể yêu cầu HS nhắc lại một số quy tắc đạo hàm có liên quan. – GV gợi ý HS liên hệ định nghĩa nguyên hàm; GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS nguyên hàm của hàm số luỹ thừa.	GV làm rõ hai trường hợp nguyên hàm của hàm số x^{α} với $\alpha \neq -1$ và $\alpha = -1$.
Ví dụ 6	Thực hành tìm nguyên hàm của hàm số luỹ thừa.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV, lưu ý sử dụng tính chất cơ bản của nguyên hàm và cách viết hàm số căn dưới dạng một hàm số luỹ thừa.

Luyện tập 5	Củng cố kĩ năng tìm nguyên hàm của hàm số luỹ thừa.	HS tự làm tại lớp. *Đáp số*: a) $\int \frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3} + C$; b) $\int x\sqrt{x}\,dx = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + C$; c) $\int \left(\frac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x}\right)dx = 3\ln\|x\| - \frac{15x\sqrt[3]{x}}{4} + C$.
b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác		
HĐ6. Khám phá nguyên hàm của hàm số lượng giác	Giúp HS nhận biết nguyên hàm của các hàm số lượng giác cơ bản.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ6. GV giúp đỡ HS liên hệ định nghĩa nguyên hàm với kết quả đạo hàm.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS nguyên hàm của các hàm số lượng giác cơ bản.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung khung kiến thức.
Ví dụ 7	Thực hành tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. – GV gợi ý sử dụng tính chất của nguyên hàm và công thức nguyên hàm của các hàm số lượng giác cơ bản.
Luyện tập 6	Củng cố kĩ năng tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác.	HS tự làm tại lớp. *Đáp số*: a) $\int (3\cos x - 4\sin x)dx = 3\sin x + 4\cos x + C$; b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x + \cot x + C$. *Lưu ý*: Có thể gợi ý HS rút gọn thêm kết quả $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

Chữa bài tập	Rèn luyện năng lực vận dụng các nội dung trong tiết học.	Tuỳ tiến độ thực tế của lớp học, GV cho HS chữa Bài tập 4.4 trong SGK hoặc giao bài tập bổ sung trong SBT và các nguồn tham khảo khác.
Tổng kết	Tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc tiết sau hoặc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
c) Nguyên hàm của hàm số mũ		
HĐ7. Khám phá nguyên hàm của hàm số mũ	Giúp HS nhận biết nguyên hàm của hàm số mũ.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ7. GV giúp đỡ HS liên hệ định nghĩa nguyên hàm với kết quả đạo hàm.
Khung kiến thức	Giới thiệu cho HS nguyên hàm của các hàm số e^x và hàm số mũ tổng quát a^x.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung khung kiến thức, cho HS tìm liên hệ giữa hai công thức.
Ví dụ 8	Thực hành tìm nguyên hàm của hàm số mũ.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. – GV gợi ý sử dụng tính chất của nguyên hàm và công thức nguyên hàm của hàm số mũ.
Luyện tập 7	Củng cố kĩ năng tìm nguyên hàm của hàm số mũ.	HS tự làm tại lớp. *Đáp số*: a) $\int 4^x \mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + C$; b) $\int \frac{1}{e^x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{e^x} + C$ (Lưu ý: GV gợi ý cách viết $\frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ và $\ln\frac{1}{e} = -1$);

		c) $\int\left(2\cdot 3^x - \frac{1}{3}\cdot 7^x\right)dx = \frac{2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{7^x}{3\ln 7} + C.$
Bảng nguyên hàm	Giúp HS hệ thống hoá nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.	GV yêu cầu HS tổng hợp kết quả các phần đã học thành nội dung như bảng trong khung kiến thức.
Chữa bài tập	Rèn luyện năng lực vận dụng các nội dung trong tiết học.	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập trong SGK, giao bài tập bổ sung trong SBT và các nguồn tham khảo khác.
Tổng kết	Tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc tiết sau hoặc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 5

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Chữa bài tập	Rèn luyện năng lực tổng hợp sau khi học xong bài học.	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK, giao bài tập luyện tập bổ sung trong SBT và các nguồn tham khảo khác.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Kiểm tra định nghĩa nguyên hàm: Bài tập 4.1.
- Sử dụng tính chất và nguyên hàm của hàm số luỹ thừa, hàm số mũ: Bài tập 4.2, 4.3.
- Sử dụng tính chất và nguyên hàm của hàm số lượng giác: Bài tập 4.4.
- Vận dụng kiến thức về nguyên hàm với kiến thức toán học khác: Bài tập 4.5, 4.6.
- Ứng dụng thực tế của nguyên hàm: Bài tập 4.7.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.1. a) $F'(x)=\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1=f(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên hàm số $F(x)=x\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) $F(x)=e^{\sin x}$ không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

4.2. a) Dùng tính chất và công thức nguyên hàm của hàm số luỹ thừa.

Đáp số: $\int(3x^2+2x-1)\mathrm{d}x=x^3+x^2-x+C.$

b) *Đáp số:* $\int(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C.$

c) Ta có $\left[(2x+1)^3\right]'=3(2x+1)^2(2x+1)'=6(2x+1)^2$. Do đó $\frac{(2x+1)^3}{6}$ là một nguyên hàm của hàm số $(2x+1)^2$ trên $\mathbb{R}$. Vậy $\int(2x+1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(2x+1)^3}{6}+C.$

GV có thể hướng dẫn HS khai triển hằng đẳng thức và dùng tính chất của nguyên hàm kết hợp với bảng nguyên hàm.

d) Ta có $f(x)=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2=4x^2-4+\frac{1}{x^2}$ nên

$$\int\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int4x^2\mathrm{d}x-\int4\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{4x^3}{3}-4x-\frac{1}{x}+C.$$

4.3. Dùng tính chất và nguyên hàm của hàm số luỹ thừa, hàm số mũ.

a) Ta có:

$$\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int3\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

Đáp số: $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=2x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$

b) Phân tích tương tự, ta có:

$$\int\sqrt{x}(7x^2-3)\mathrm{d}x=\int7x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\int3x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=7\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

Đáp số: $\int \sqrt{x}\left(7x^2-3\right)\mathrm{d}x = 2\left(x^3-x\right)\sqrt{x}+C.$

c) Khai triển $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$ và chia cho x^2. Dùng tính chất của nguyên hàm.

Đáp số: $\int \frac{(2x+1)^2}{x^2}\mathrm{d}x = 4x+4\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$

d) *Đáp số:* $\int\left(2^x+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2}-\frac{3}{x}+C.$

4.4. Biến đổi biểu thức lượng giác, dùng tính chất và nguyên hàm của hàm số lượng giác.

a) *Đáp số:* $\int\left(2\cos x-\frac{3}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = 2\sin x+3\cot x+C.$

b) Biến đổi $4\sin^2\frac{x}{2} = 4\cdot\frac{1-\cos x}{2} = 2(1-\cos x)$.

Đáp số: $\int 4\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2(x-\sin x)+C.$

c) Biến đổi $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2} = 1-\sin x$.

Đáp số: $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x = x+\cos x+C.$

d) Sử dụng công thức biến đổi $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ta được

$$\int\left(x+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x = \int\left(x-1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

Đáp số: $\int\left(x+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-x+\tan x+C$.

4.5. Hàm số $f(x)$ cần tìm là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) = 2x+\frac{1}{x^2}$. Ta có:

$$\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = x^2-\frac{1}{x}+C.$$

Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+C,\ x\in(0;+\infty)$. Theo giả thiết, $f(1)=1^2-1+C=1$ nên $C=1$ và $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+1,\ x\in(0;+\infty)$.

Đáp số: $f(4)=\frac{67}{4}$.

4.6. Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta đã biết hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x;f(x))\in(C)$ là $k_M=f'(x)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2$. Lập luận tương tự Bài tập 4.5 và chú ý rằng $f(0)=0$ ta được $f(x)=\frac{(x-1)^3+1}{3}$ là hàm số cần tìm.

4.7. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta đã biết độ cao $h(t)$ của viên đạn (tính từ mặt đất) tại thời điểm t thoả mãn $h'(t)=v(t)$ nên $h(t)$ là nguyên hàm của hàm vận tốc $v(t)$. Ta có:

$$\int v(t)\mathrm{d}t=\int(160-9,8t)\mathrm{d}t=160t-4,9t^2+C.$$

Do đó, độ cao $h(t)$ có dạng $h(t)=160t-4,9t^2+C$. Kết hợp với giả thiết $h(0)=0$ ta được $C=0$ và $h(t)=160t-4,9t^2$ (m).

a) Sau thời gian $t=5$ (giây), độ cao của viên đạn là:

$$h=h(5)=160\cdot5-4,9\cdot5^2=677,5 \text{ (m)}.$$

b) Khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất thì $v(t)=160-9,8t=0$.

Từ đó ta có $t=t_m\approx16,3$ (giây).

Độ cao lớn nhất của viên đạn là $h_{\max}=h(t_m)\approx160\cdot16,3-4,9\cdot16,3^2\approx1360,1$ (m).

Bài 12. TÍCH PHÂN (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được định nghĩa và tính chất của tích phân.
- Tính được tích phân trong những trường hợp đơn giản.
- Vận dụng được tích phân để giải quyết một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua mô hình hoá những vấn đề thực tiễn liên quan đến tích phân.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu định nghĩa, ý nghĩa hình học và các tính chất của tích phân.
- Chuẩn bị:

  + GV chuẩn bị một số tình huống trong thực tế cần vận dụng tích phân để giải quyết.

  + HS chuẩn bị máy tính cầm tay.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 4 tiết. Cụ thể như sau:

- Tiết 1: Mục 1. Khái niệm tích phân (phần a).
- Tiết 2: Mục 1. Khái niệm tích phân (phần b).
- Tiết 3: Mục 2. Tính chất của tích phân.
- Tiết 4: Chữa bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

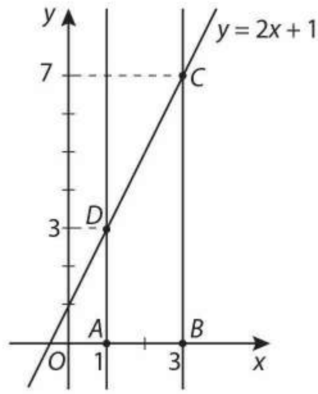
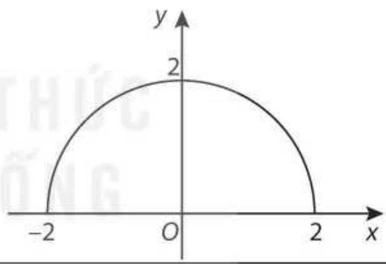
HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.
1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN		
a) Diện tích hình thang cong		
Khái niệm hình thang cong	Giới thiệu khái niệm hình thang cong.	GV giới thiệu khái niệm hình thang cong.

Ví dụ 1	Giúp HS nhận dạng hình thang cong trong những tình huống đơn giản thường gặp.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
HĐ1. Diện tích của hình thang	Gợi lên khái niệm tích phân.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1.
HĐ2. Diện tích của hình thang cong	Gợi lên khái niệm tích phân.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV thực hiện các yêu cầu của HĐ2.
Khung kiến thức	Cách tính diện tích hình thang cong.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 2	Rèn luyện cách tính diện tích hình thang cong bằng cách vận dụng khung kiến thức.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
b) Định nghĩa tích phân		
HĐ3. Nhận biết khái niệm tích phân	Cho HS nhận biết khái niệm tích phân.	– HS thực hiện yêu cầu trong HĐ3. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. – GV lưu ý HS nội dung phần Chú ý.
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng tính tích phân.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. – GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.

Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tính tích phân.	– HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. – GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *HD.* a) $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e^x \Big\vert_0^1 = e - 1;$ b) $\int_1^e \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert \Big\vert_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = -\cos x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1.$ d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x \Big\vert_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$
Ý nghĩa hình học của tích phân	Giúp HS nhận biết được ý nghĩa hình học của tích phân.	GV giới thiệu ý nghĩa hình học của tích phân.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng tính tích phân bằng cách sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. – GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tính tích phân bằng cách sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *HD.* a) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang *ABCD* có đáy lớn *BC*, đáy nhỏ *AD* và đường cao *AB*. Ta có *C*(3 ;7), *D*(1 ;3), khi đó $AD = 3, BC = 7, AB = 2.$

		Vậy $\int_{1}^{3}(2x+1)\mathrm{d}x = S_{ABCD} = 10.$  b) Ta có $y=\sqrt{4-x^2}$ là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O và bán kính 2. Do đó tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng. Vậy $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi.$ 
Vận dụng 1	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng ở Mục 1 vào giải quyết tình huống thực tế đặt ra ở đầu bài học.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *HD.* Khi ô tô dừng hẳn thì $v=0$, khi đó $-40t+20=0$, do đó $t=\frac{1}{2}$. Quãng đường ô tô di chuyển kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là

		$$\int_0^{\frac{1}{2}}(-40t+20)\mathrm{d}t=5\,(\mathrm{m}).$$ *Chú ý:* Để tính tích phân này, ở đây ta chưa sử dụng tính chất tích phân của một tổng (sẽ học ở mục sau), mà lưu ý một nguyên hàm của hàm số $f(t)=-40t+20$ là $F(t)=-20t^2+20t$, hoặc sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân (là diện tích của tam giác vuông có một cạnh góc vuông là 20 và cạnh góc vuông còn lại là $\frac{1}{2}$).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN		
HĐ4. Nhận biết tính chất của tích phân	Giúp HS nhận biết tính chất của tích phân.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV giúp đỡ HS khi cần. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng tính tích phân bằng cách sử dụng tính chất của tích phân.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Tiếp tục rèn luyện và củng cố kĩ năng tính tích phân bằng cách sử dụng tính chất của tích phân.	HS tự làm tại lớp dưới sự hướng dẫn của GV. *HD.* a) $\int_0^{2\pi}(2x+\cos x)\mathrm{d}x=x^2\Big\vert_0^{2\pi}+\sin x\Big\vert_0^{2\pi}=4\pi^2.$

		b) $\int_1^2\left(3^x-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3^x}{\ln 3}-3\ln x\right)\right\|_1^2$ $=\left(\frac{9}{\ln 3}-3\ln 2\right)-\left(\frac{3}{\ln 3}-3\ln 1\right)$ $=\frac{6}{\ln 3}-3\ln 2.$ c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$ $=\left.\left(\tan x+\cot x\right)\right\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=0.$
Ví dụ 6	Rèn luyện kĩ năng tính tích phân liên quan đến giá trị tuyệt đối.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng tính tích phân liên quan đến giá trị tuyệt đối.	HS tự làm tại lớp. *HD.* $\int_0^3\|2x-3\|\mathrm{d}x$ $=\int_0^{\frac{3}{2}}\|2x-3\|\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3\|2x-3\|\mathrm{d}x$ $=\int_0^{\frac{3}{2}}(3-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3(2x-3)\mathrm{d}x$ $=\left.\left(3x-x^2\right)\right\|_0^{\frac{3}{2}}+\left.\left(x^2-3x\right)\right\|_{\frac{3}{2}}^3=\frac{9}{2}.$
Vận dụng 2	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết tình huống thực tế.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa là

		$\frac{1}{12-6}\int_6^{12} T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_6^{12}(1{,}5t+11)\,\mathrm{d}t$ $=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}t^2+11t\right)\Big\|_6^{12} = 24{,}5\,(^\circ C).$
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4. Chữa bài tập

GV lựa chọn một số bài tập cuối bài học và cho HS chữa tại lớp, tuỳ theo dụng ý sư phạm.

3. Phân loại bài tập

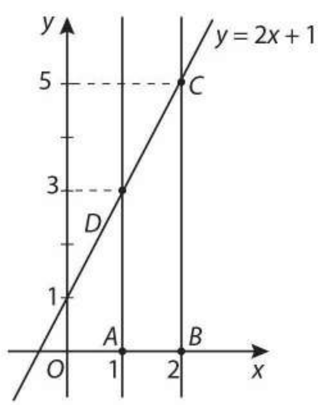
- Tính tích phân bằng cách sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân: Bài tập 4.8.
- Tính tích phân bằng việc sử dụng tính chất của tích phân: Bài tập 4.9, 4.10.
- Vận dụng tích phân để giải quyết các bài toán thực tiễn: Bài tập 4.11, 4.12, 4.13.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

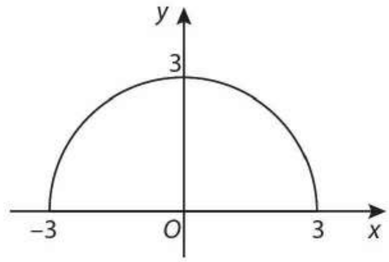
IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.8. a) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang $ABCD$ có đáy lớn BC, đáy nhỏ AD và đường cao AB. Ta có $C(2;5), D(1;3)$, khi đó $AD=3$, $BC=5$, $AB=1$.

Vậy $\int_1^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x = S_{ABCD} = 4.$



b) Ta có $y=\sqrt{9-x^2}$ là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O và bán kính 3. Do đó tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.



Vậy $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}$.

4.9. a) $\int_0^3[f(x)+g(x)]dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 g(x)dx=5+2=7$.

b) $\int_0^3[f(x)-g(x)]dx=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=5-2=3$.

c) $\int_0^3 3f(x)dx=3\int_0^3 f(x)dx=15$.

d) $\int_0^3[2f(x)-3g(x)]dx=2\int_0^3 f(x)dx-3\int_0^3 g(x)dx=4$.

4.10. a) $\int_0^3(3x-1)^2\,dx=\int_0^3(9x^2-6x+1)dx=\left(3x^3-3x^2+x\right)\Big|_0^3=57$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)dx=(x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+1$.

c) $\int_0^1(e^{2x}+3x^2)dx=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$.

d) $\int_{-1}^2|2x+1|dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2x-1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^2(2x+1)dx=\left(-x^2-x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2+x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^2=\frac{13}{2}$.

4.11. Giả sử vật chuyển động trên một trục nằm ngang, chiều dương hướng từ trái sang phải.

a) Ta có $\int_1^4 v(t)dt=\int_1^4\left(t^2-t-6\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t\right)\Big|_1^4=-\frac{9}{2}$.

Vậy trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$, vật dịch chuyển sang bên trái được 4,5 m so với vị trí tại thời điểm $t = 1$ (giây) (Trong quá trình chuyển động, lúc thì vật đi sang trái, lúc thì đi sang phải, nhưng tại thời điểm $t = 4$ (giây) thì vật có vị trí nằm ở phía bên trái và cách vị trí của vật tại thời điểm $t = 1$ (giây) một khoảng là 4,5 m).

b) Ta có

$$\int_1^4 |v(t)|\mathrm{d}t = \int_1^4 |t^2 - t - 6|\mathrm{d}t = \int_1^3 |t^2 - t - 6|\mathrm{d}t + \int_3^4 |t^2 - t - 6|\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^3 \left(-t^2 + t + 6\right)\mathrm{d}t + \int_3^4 \left(t^2 - t - 6\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{-1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 6t\right)\Bigg|_1^3 + \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t\right)\Bigg|_3^4 = \frac{22}{3} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6}.$$

Vậy tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$ (giây) (tính cả quãng đường lúc đi sang trái, quãng đường lúc đi sang phải) là $\frac{61}{6}$ m.

4.12. a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm là

$$\int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{4000}x^2 + 12,2x\right)\Bigg|_{100}^{101} = 12,14975 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm là

$$\int_{100}^{110} (-0,0005x + 12,2)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{4000}x^2 + 12,2x\right)\Bigg|_{100}^{110} = 121,475 \text{ (triệu đồng)}.$$

4.13. Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$ là

$$\frac{1}{R-0}\int_0^R k\left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{R}\left(kR^2 r - k\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{1}{R}\left(kR^3 - k\frac{R^3}{3}\right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3}kR^2.$$

Xét hàm số $v(r) = k\left(R^2 - r^2\right)$, $0 \le r \le R$. Ta có $v'(r) = -2kr$; $v'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CĐ} = kR^2$.

Vậy vậy tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình 1,5 lần.

Bài 13. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Sử dụng tích phân để tính diện tích của một số hình phẳng.
- Sử dụng tích phân để tính thể tích của một số hình khối.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc sử dụng tích phân như là một phương pháp tổng quát và hiệu quả để tính diện tích, thể tích.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu ứng dụng của tích phân để tính diện tích hình phẳng, tính thể tích vật thể; thiết lập lại các công thức tính thể tích đã được học trong Hình học, cũng như tính được thể tích của những vật thể phức tạp hơn gặp trong thực tiễn.
- Chuẩn bị:

  + GV chuẩn bị một số tình huống trong thực tế có vận dụng tính tích phân.

  + HS chuẩn bị máy tính cầm tay.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 4 tiết. Cụ thể như sau:

- Tiết 1: Mục 1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng (phần a).
- Tiết 2: Mục 1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng (phần b).
- Tiết 3: Mục 2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể (phần a).
- Tiết 4: Mục 2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể (phần b).

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV đặt vấn đề để gợi nhu cầu học tập cho HS.
1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG		
a) Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$		
HĐ1. Nhận biết công thức tính diện tích	Giúp HS nhận biết công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 1	Rèn luyện kĩ năng tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số và trục hoành.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số và trục hoành.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số và trục hoành.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *HD.* Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^3 \lvert x^2 - 4 \rvert \mathrm{d}x = \int_0^2 \lvert x^2 - 4 \rvert \mathrm{d}x + \int_2^3 \lvert x^2 - 4 \rvert \mathrm{d}x$ $= \int_0^2 (4 - x^2)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 4)\mathrm{d}x$

		$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big\vert_2^3=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}.$
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
b) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x=a, x=b$		
HĐ2. Nhận biết công thức tính diện tích	Giúp HS nhận biết công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x=a, x=b$.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ2. GV giúp đỡ HS khi cần. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu khung kiến thức. GV lưu ý HS nội dung phần Chú ý.
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_1^4\left\vert\sqrt{x}-x+2\right\vert dx=\int_1^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)dx$ $=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_1^4=\frac{19}{6}.$

Vận dụng 1	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết tình huống thực tế.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-0,36x+9=0,14x+2 \Leftrightarrow x=14.$ Khi đó $p_0=3,96.$ Thặng dư tiêu dùng cho sản phẩm này là $\int_0^{14}\left\|-0,36x+9-3,96\right\|dx=35,28$ (triệu đồng). Thặng dư sản xuất cho sản phẩm này là $\int_0^{14}\left\|0,14x+2-3,96\right\|dx=13,72$ (triệu đồng).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ		
a) Tính thể tích của vật thể		
HĐ3. Nhận biết công thức tính thể tích vật thể	Giúp HS nhận biết công thức tính thể tích vật thể.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng tính thể tích vật thể.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.
Ví dụ 6	Rèn luyện kĩ năng tính thể tích vật thể.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. GV theo dõi và tổng kết lại kiến thức.
Vận dụng 2	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng vào giải quyết tình huống thực tế.	HS tự làm tại lớp. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *HD.* Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x $(a \le x \le b)$, cắt khối chóp cụt đều theo thiết diện có diện tích

		$S(x) = \frac{S_1}{b^2}x^2.$ Thể tích của khối chóp cụt đều này là $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{S_1}{b^2}x^2\mathrm{d}x = \frac{S_1}{b^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big\|_a^b$ $= \frac{S_1}{b^2}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = S_1\cdot\frac{b-a}{3}\cdot\frac{b^2+ab+a^2}{b^2}.$ Mà $S_0 = \frac{S_1}{b^2}a^2$ và $h = b - a$ nên $V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_0S_1} + S_0\right).$ Do đó thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h là $V = \frac{1}{3}Sh.$
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
b) Tính thể tích khối tròn xoay		
HĐ4. Nhận biết công thức tính thể tích khối tròn xoay	Giúp HS nhận biết công thức tính thể tích khối tròn xoay.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV giúp đỡ HS khi cần. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 7	Rèn luyện kĩ năng tính thể tích khối tròn xoay.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 8	Rèn luyện kĩ năng tính thể tích khối tròn xoay.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Vận dụng 3	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng	HS tự làm tại lớp.

	trong bài vào giải quyết tình huống thực tế.	*HD.* a) Đường thẳng BC đi qua điểm $B(h; R)$ và điểm $C(0; r)$ có phương trình là $$y=\frac{R-r}{h}x+r\,(h\neq 0).$$ Thể tích của khối nón cụt là $$V=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2\mathrm{d}x$$ $$=\pi\left(\frac{(R-r)^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{(R-r)r}{h}x^2+r^2x\right)\Big\vert_0^h$$ $$=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right).$$ b) Cho $r=0$ trong công thức nhận được ở phần a, ta được thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng R và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}\pi hR^2$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính diện tích các hình phẳng: Bài tập 4.14, 4.15.
- Vận dụng công thức tính diện tích hình phẳng để giải quyết bài toán thực tiễn: Bài 4.16.
- Tính thể tích khối tròn xoay: Bài tập 4.17, 4.18, 4.19.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.14. Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int_0^4\left|5x-x^2-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^4\left|4x-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^4(4x-x^2)\mathrm{d}x=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^4=\frac{32}{3}.$$

4.15. a) Vì $e^x > 0 > x^2 - 1, \forall x \in (-1; 1)$ nên diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-1}^{1} \left| e^x - x^2 + 1 \right| dx = \int_{-1}^{1} (e^x - x^2 + 1) dx$$

$$= \left(e^x - \frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{3} + 1 = e - \frac{1}{e} + \frac{4}{3}.$$

b) Vì $x > 1 > \sin x, \ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ nên diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \sin x - x \right| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \sin x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \cos x \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{8} - 1.$$

c) Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| 9 - x^2 - 2x^2 \right| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (9 - 3x^2) dx = (9x - x^3) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}.$$

d) Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{0}^{1} \left| \sqrt{x} - x^2 \right| dx = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

4.16. Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005 là

$$\int_{0}^{100} \left| (0{,}00061x^2 + 0{,}0218x + 1723)^2 - x \right| dx \approx 297\,945\,768{,}2.$$

4.17. Thể tích vật thể cần tìm là

$$V = \pi \int_{0}^{2} (2x - x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{0}^{2} = \frac{16\pi}{15}.$$

4.18. Thể tích khối chỏm cầu là

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{R-h}^{R} = \pi \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right).$$

4.19. a) Đường thẳng OB đi qua điểm O và điểm $B\left(a; a\tan\alpha\right)$ nên có phương trình là $y = x\tan\alpha$.

Thể tích khối nón là

$$V = \pi\int_0^a \left(x\tan\alpha\right)^2 dx = \pi\int_0^a x^2\tan^2\alpha\, dx = \pi\tan^2\alpha\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{1}{3}\pi a^3\tan^2\alpha.$$

b) Xét hàm số $V\left(\alpha\right) = \frac{1}{3}\pi a^3\tan^2\alpha$, với $0 < \alpha \le \frac{\pi}{4}$.

Ta có $V'\left(\alpha\right) = \frac{2}{3}\pi a^3\tan\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} > 0,\ \forall\alpha\in\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$. Khi đó hàm số V đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của V là $\frac{1}{3}\pi a^3$, đạt được khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV (2 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống hoá kiến thức lí thuyết (có thể chuẩn bị slide tổng kết kiến thức).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở Bài tập cuối Chương IV theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

A. Trắc nghiệm

4.20. D	**4.21.** D	**4.22.** C
4.23. A	**4.24.** B	**4.25.** A
4.26. D	**4.27.** C	

B. Tự luận

4.28. a) $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}-\ln|x|+C.$

b) $F(x)=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+3\sin x+2\cot x+C.$

4.29. Ta có : $F(x)=2\sin x-\cot x+C.$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1+C\Rightarrow\sqrt{2}-1+C=-1\Rightarrow C=-\sqrt{2}.$$

Vậy $F(x)=2\sin x-\cot x-\sqrt{2}.$

4.30. Ta có:

$$v(t)=30-9{,}8t\ (t\geq 0).$$

Vậy vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây là $v(2)=10{,}4$ (m/s).

4.31. Quãng đường con cá bơi được khi bơi ngược dòng là:

$$S(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(-\frac{2t}{5}+4\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{5}t^2+4t+C.$$

Vì $S(0)=0$ nên suy ra $C=0$.

Do đó: $S(t)=-\dfrac{1}{5}t^2+4t=-\dfrac{1}{5}\left(t^2-20t+100\right)+20=-\dfrac{1}{5}(t-10)^2+20\leq 20.$

Vậy khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là 20 km.

4.32. a) $\dfrac{653}{12}$. b) 0. c) $\sqrt{3}-1$. d) 36.

4.33. Vì $e^x\geq 1\geq x$ với mọi $x\in[0;1]$ nên ta có: $S=\displaystyle\int_0^1(e^x-x)\mathrm{d}x=e-\frac{3}{2}.$

4.34. a) $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{16}{15}\pi$.

b) $V=\pi\int\limits_{2}^{4}\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{2}^{4}\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{94}{3}\pi.$

4.35. Mặt trong bình gốm sinh ra khi quay đồ thị $y=\frac{1}{175}x^2+\frac{3}{35}x+5,\ 0\le x\le 30$ xung quanh trục Ox. Do bề dày bình gốm luôn là 1 cm nên mặt ngoài bình gốm là một mặt tròn xoay sinh ra khi quay đồ thị $y=\frac{1}{175}x^2+\frac{3}{35}x+6,\ 0\le x\le 30$ xung quanh trục Ox.

Số centimét khối đất sét cần sử dụng là

$$V=\pi\int\limits_{0}^{30}\left(\frac{1}{175}x^2+\frac{3}{35}x+6\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{0}^{30}\left(\frac{1}{175}x^2+\frac{3}{35}x+5\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int\limits_{0}^{30}\left(\frac{2}{175}x^2+\frac{6}{35}x+11\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3\cdot 175}x^3+\frac{3}{35}x^2+11x\right)\Bigg|_0^{30}$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3\cdot 175}\cdot 30^3+\frac{3}{35}\cdot 30^2+11\cdot 30\right)=510\pi\ (\mathrm{cm}^3).$$

Chương V. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

- Tư tưởng của phương pháp toạ độ trong không gian là đại số hoá hình học, cụ thể là thông qua một hệ trục toạ độ, thể hiện các khái niệm và tính chất của hình học theo ngôn ngữ của đại số, từ đó dùng phương pháp của đại số để nghiên cứu hình học.
- Cùng với nội dung phương pháp toạ độ trong mặt phẳng, nội dung phương pháp toạ độ trong không gian giúp HS nhận ra: Mỗi khoa học trước hết là một ngôn ngữ để diễn đạt các sự kiện của tự nhiên và xã hội; mỗi khoa học bao gồm hệ thống khái niệm, kết quả và phương pháp. Phương pháp toạ độ trong không gian biểu hiện rõ ưu điểm và hạn chế của ngôn ngữ, phương pháp hình học so với ngôn ngữ, phương pháp đại số trong những tình huống cụ thể.
- Chương này cũng giúp HS củng cố kiến thức hình học không gian đã được học, bước đầu làm quen với việc xây dựng hình học bằng phương pháp đại số.

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 4 bài học và 1 bài ôn tập chương, được thực hiện trong 18 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 14. Phương trình mặt phẳng	6 tiết
Bài 15. Phương trình đường thẳng trong không gian	5 tiết
Bài 16. Công thức tính góc trong không gian	2 tiết
Bài 17. Phương trình mặt cầu	3 tiết
Bài tập cuối chương V	2 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Cần chú ý đến việc cho HS củng cố các khái niệm và tính chất của hình học không gian đã được học ở lớp 11.
- Đối với từng tình huống cụ thể giúp HS nhận ra ưu điểm và hạn chế giữa ngôn ngữ, phương pháp hình học và ngôn ngữ, phương pháp đại số: Chẳng hạn các bài toán chứng minh quan hệ vuông góc, tính khoảng cách, tính góc thường là các bài toán khá khó trong hình học không gian, nhưng chúng trở nên khá cơ bản trong không gian toạ độ; ngược lại, chẳng hạn khái niệm góc phẳng nhị diện khó thể hiện trong không gian toạ độ (và không được đề cập trong Chương trình).

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 14. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG (6 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

- Nhận biết được phương trình mặt phẳng.
- Viết được phương trình mặt phẳng trong các trường hợp: qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến (VTPT), qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương (VTCP), qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nhận biết được hai mặt phẳng song song, hai mặt phẳng vuông góc.
- Biết tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- Biết vận dụng kiến thức về phương trình mặt phẳng, công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke, hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (các bài tập vận dụng trong bài học).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập, phẩm chất yêu nước (thông qua bài tập về cối xay lúa, HS có thể tìm hiểu thêm về công việc xay lúa, giã gạo trước đây).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Nhấn mạnh cho HS điểm thuộc mặt phẳng khi và chỉ khi toạ độ của điểm đó thoả mãn phương trình mặt phẳng.
- Chương trình và SGK không đề cập đến phương trình tham số của mặt phẳng. Do đó, phương trình tổng quát của mặt phẳng có khi được nói gọn là phương trình mặt phẳng.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 6 tiết. Cụ thể như sau:

- Mục 1: 1 tiết. Mục 2: 0,5 tiết. Mục 3: 1,5 tiết. Mục 4: 1 tiết. Mục 5: 0,5 tiết. Mục 6: 0,5 tiết.
- Bài tập cuối bài 1 tiết.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG VÀ CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG		
HĐ1	Hình thành khái niệm VTPT.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – GV có thể giải thích cho HS phương thẳng đứng và mặt phẳng nằm ngang tại một điểm (điều này đã được đề cập ở SGK Toán 11).
Khung kiến thức	Khái niệm VTPT.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	– Nêu một cách xác định mặt phẳng. – Giúp HS hiểu sâu hơn về khái niệm VTPT.	– GV trình bày, giảng giải cho HS. – Chú ý rằng trong Chương trình môn Toán lớp 11, HS đã được học qua một điểm có duy nhất mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước. – GV có thể nêu chiều ngược lại: Mặt phẳng có nhiều VTPT, chúng cùng phương với nhau.
Ví dụ 1	Nhận biết VTPT	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết VTPT.	GV trình bày, giảng giải cho HS. *Giải.* Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;-2)$ là một VTPT của mặt phẳng (α).

HĐ2	Tìm một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – Có thể nêu câu hỏi gợi ý HS: + Hai vectơ vuông góc với nhau khi và chỉ khi tích vô hướng của chúng bằng bao nhiêu? + Công thức tính tích vô hướng giữa hai vectơ theo toạ độ của chúng là gì? + Hai vectơ cùng phương khi và chỉ khi toạ độ của chúng có mối quan hệ gì?
Khung kiến thức	Khái niệm tích có hướng của hai vectơ.	– GV trình bày, giảng giải cho HS. – Có thể dạy HS cách nhớ công thức tính tích có hướng thông qua định thức cấp 2.
Chú ý	Điều kiện cần và đủ để tích có hướng của hai vectơ bằng vectơ-không. Kí hiệu định thức cấp 2.	GV trình bày, giảng giải cho HS. Lưu ý đề cập tới cả điều kiện cần và đủ để tích có hướng của hai vectơ khác vectơ-không.
Ví dụ 2	HS học kĩ năng tính tích có hướng của hai vectơ.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 2	HS luyện tập kĩ năng tính tích có hướng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(0;0;0)$. Qua đó, ta có thể nhận xét, hai vectơ cùng phương thì tích có hướng của chúng bằng $\vec{0}$.
HĐ3	Hình thành khái niệm cặp VTCP của mặt phẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – Ở phần b, GV có thể lưu ý HS rằng: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì trong mặt phẳng tồn tại đường thẳng song song với đường thẳng đã cho. Từ đó có thể thấy rằng giá của $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ vuông góc với hai đường thẳng không cùng phương trong mặt phẳng (P).

Khung kiến thức	– Khái niệm cặp VTCP của mặt phẳng. – Quan hệ giữa cặp VTCP và VTPT của mặt phẳng.	– GV trình bày, giảng giải cho HS. – HS ghi nhớ cách tìm VTPT của mặt phẳng thông qua cặp VTCP.
Ví dụ 3	HS học kĩ năng tính VTPT khi biết cặp VTCP.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 3	HS luyện tập kĩ năng tính VTPT khi biết cặp VTCP.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1),\overrightarrow{AC}=(-3;5;1)$. Suy ra: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;6;-6)$ là một VTPT của mặt phẳng (ABC).
Vận dụng 1	HS vận dụng tích có hướng vào giải quyết bài toán thực tế.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải* a) Ta có $\overrightarrow{M}=\left[\overrightarrow{OP},\vec{F}\right]=(cy-bz;az-cx;bx-ay)$. b) Nếu $\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OP}=(2x;2y;2z)$ thì $\overrightarrow{M'}=\left[\overrightarrow{OP'},\vec{F}\right]=(2cy-2bz;2az-2cx;2bx-2ay)$ $=2\overrightarrow{M}$. Từ kết quả trên ta thấy nếu vị trí đặt lực P càng xa vị trí ốc O thì moment lực càng lớn và do đó ta càng đỡ tốn sức khi vặn ốc. *Chú ý:* Do tính chất trên mà tay nắm cánh cửa (vị trí đặt tay khi mở đóng cửa) được đặt ở vị trí xa trục chứa bản lề cánh cửa).
2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG		
HĐ4	Hình thành khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – Ở phần a, GV có thể gợi ý HS viết toạ độ của hai vectơ đang xét.

Khung kiến thức	Nêu dạng của phương trình tổng quát của mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Chiều ngược lại của kết luận về phương trình tổng quát của mặt phẳng.	– GV trình bày, giảng giải cho HS. – GV nhấn mạnh cho HS: + Trong phương trình tổng quát của mặt phẳng, các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0. + Một điểm thuộc mặt phẳng khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn phương trình mặt phẳng.
Ví dụ 4	HS học kĩ năng nhận biết phương trình tổng quát của mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 4	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết phương trình tổng quát của mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Phương trình tổng quát của mặt phẳng là phương trình b) $\frac{x}{2} - y + \frac{z}{3} + 5 = 0$.
Ví dụ 5	HS học kĩ năng tìm VTPT của mặt phẳng, nhận biết một điểm thuộc một mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 5	HS rèn kĩ năng tìm VTPT của mặt phẳng, nhận biết một điểm thuộc một mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Điểm $A(-2;1;0)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): x+2=0$ vì $-2+2=0$. b) Một VTPT của (α) là $\vec{n}=(1;0;0)$.
3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG		
HĐ5	Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết VTPT.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết VTPT.	GV trình bày, giảng dạy cho HS.

Ví dụ 6	HS học kĩ năng lập phương trình của mặt phẳng đi qua một điểm và biết VTPT.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Luyện tập 6	HS rèn luyện kĩ năng viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết VTPT.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Một VTPT của (α) là $\vec{k}=(0;0;1)$, mà mặt phẳng (α) đi qua $M(1;2;-4)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là: $z+4=0$.
HĐ6	Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp VTCP.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ để HS thực hiện. – GV có thể gợi ý HS nhớ lại kết quả đã có ở HĐ2 về việc tìm một vectơ vuông góc với hai vectơ.
Khung kiến thức	Cách viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp VTCP.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 7	HS học kĩ năng viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp VTCP.	GV tổ chức, quan sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Luyện tập 7	HS rèn kĩ năng viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp VTCP.	GV trình bày, giảng giải cho HS. *Giải.* Trục Oy có một VTCP là $\vec{j}=(0;1;0)$ và đường thẳng BC có VTCP là $\overrightarrow{BC}=(-2;2;-1)$. Mặt phẳng song song với Oy và BC có một VTPT là $\vec{n}=\left[\vec{j},\overrightarrow{BC}\right]=(-1;0;2)$. Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $-1(x-1)+0(y+2)+2(z+1)=0$ $\Leftrightarrow x-2z-3=0$.
HĐ7	Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Cách viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Ví dụ 8	HS học kĩ năng viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 8	– HS rèn luyện kĩ năng viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. – Giới thiệu phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – GV có thể hướng dẫn HS tiến hành theo hai hướng: + Hướng 1: Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đã cho, sau đó, biến đổi phương trình đó về phương trình để bài yêu cầu. + Hướng 2: Kiểm tra xem phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$ có phải là phương trình của một mặt phẳng và ba điểm không thẳng hàng đã cho có thoả mãn phương trình đó hay không. *Giải.* Vì toạ độ của ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ đều thoả mãn phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
Vận dụng 2	HS vận dụng hiểu biết về phương trình mặt phẳng để giải quyết vấn đề được nêu ra trong tình huống mở đầu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. Ở câu c, GV có thể nêu câu hỏi gợi ý, hoặc nhấn mạnh với HS: Điều kiện để M luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$. *Giải.* a) Với $t=0$ thì $M_1=(1;1;1)$, với $t=\frac{\pi}{2}$ thì $M_2=(-1;1;0)$, với $t=\pi$ thì $M_3=(-1;-1;-1)$. b) $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2;0;-1)$ và $\overrightarrow{M_1M_3}=(-2;-2;-2)$ là hai vectơ không cùng phương.

		Phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ là: $x+y-2z=0$. c) Điểm $M(\cos t-\sin t;\cos t+\sin t;\cos t)$ luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ với mọi t.
4. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU		
HĐ8	Tìm điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – GV có thể nhắc lại hoặc cho HS nhắc lại khái niệm góc giữa hai mặt phẳng.
Khung kiến thức	Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Một cách tìm cặp VTCP từ quan hệ vuông góc.	– GV trình bày, giảng giải cho HS. – GV có thể nêu hoặc cho HS rút ra kết luận: Mặt phẳng vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau thì nhận hai VTPT tương ứng của hai mặt phẳng đó làm cặp VTCP.
Ví dụ 9	HS học kĩ năng nhận biết hai mặt phẳng vuông góc với nhau.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 9	HS rèn kĩ năng nhận biết hai mặt phẳng vuông góc với nhau.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Ta có $\vec{n}=(3;1;-1)$ là một VTPT của mặt phẳng (α), $\vec{n'}=(9;3;-3)$ là một VTPT của mặt phẳng (β). Vì $\vec{n}\cdot\vec{n'}=27+3+3=33\neq 0$ nên hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ không vuông góc với nhau.
Ví dụ 10	HS học kĩ năng viết phương trình mặt phẳng trong bài toán gắn với quan hệ vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Vận dụng 3	HS vận dụng kiến thức đã học về phương trình mặt phẳng và quan hệ vuông góc giữa hai mặt phẳng vào giải quyết tình huống thực tiễn.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Sàn của căn phòng là hình tứ giác *OABC* nằm trong mặt phẳng (*Oxy*). Gọi (*P*), (*Q*), (*R*), (*S*) tương ứng là các mặt phẳng chứa các bức tường ứng với các chân tường *OA*, *AB*, *BC*, *CO*.

		a) Mặt phẳng chứa bức tường (*P*) có phương trình là $y=0$. Mặt phẳng chứa bức tường (*Oyz*) có phương trình là $x=0$. Mặt phẳng (*Q*) có phương trình là $x=2$. Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(-2;2\sqrt{3}-3;0\right),\vec{k}=\left(0;0;1\right)$. Một VTPT của mặt phẳng (*R*) là $\left[\overrightarrow{BC},\vec{k}\right]=\left(2\sqrt{3}-3;2;0\right)$. Phương trình mặt phẳng (*R*) là: $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(x-2\right)+2\left(y-3\right)=0$ $\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3}-3\right)x+2y-4\sqrt{3}=0.$ Phương trình mặt phẳng (*S*) là $x=0$. b) Mặt phẳng (*P*) vuông góc với mặt phẳng (*S*). Mặt phẳng (*P*) vuông góc với mặt phẳng (*Q*).
5. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI NHAU		
HĐ9	Tìm điều kiện để hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Điều kiện để hai mặt phẳng song song.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	– Mối quan hệ giữa các VTPT của hai mặt phẳng song song. – Điều kiện để hai mặt phẳng trùng nhau.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 11	HS học kĩ năng nhận biết hai mặt phẳng song song.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 10	HS rèn kĩ năng nhận biết hai mặt phẳng song song, viết phương trình mặt phẳng gắn với quan hệ song song.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Ta có hai mặt phẳng $\left(\alpha\right),\left(\beta\right)$ không song song với nhau vì $\overrightarrow{n_\alpha}=\left(5;2;-4\right),\overrightarrow{n_\beta}=\left(10;4;-2\right)$ không cùng phương.

		b) Vì $5\cdot1+2\cdot(-3)-4\cdot5+6=-15\neq0$ và $10\cdot1+4\cdot(-3)-2\cdot5+12=0$ nên điểm M không thuộc mặt phẳng (α) nhưng thuộc mặt phẳng (β). c) Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_\alpha}=(5;2;-4)$ làm VTPT nên phương trình mặt phẳng (P) là $5(x-1)+2(y+3)-4(z-5)=0$ $\Leftrightarrow 5x+2y-4z+21=0.$
Vận dụng 4	Vận dụng kiến thức về phương trình mặt phẳng trong biểu diễn số liệu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Mỗi thí sinh có điểm thi Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh tương ứng là x_0, y_0, z_0 mà có tổng số điểm ba môn đó bằng 27 thì đều có điểm biểu diễn $M(x_0;y_0;z_0)$ có toạ độ thoả mãn phương trình hay $x+y+z-27=0$. Do đó các điểm biểu diễn các thí sinh có tổng điểm bằng 27 đều cùng thuộc mặt phẳng có phương trình $x+y+z-27=0$. b) Tương tự câu a, các thí sinh có tổng số điểm ba môn bằng m thì đều có điểm biểu diễn kết quả cùng thuộc mặt phẳng $(\alpha_m): x+y+z-m=0$. Các các mặt phẳng như vậy cùng nhận VTPT là $(1;1;1)$. Vì vậy ứng với các giá trị m khác nhau, các mặt phẳng (α_m) song song với nhau.
6. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG		
HĐ10	Thiết lập công thức khoảng cách.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 12	HS học kĩ năng tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Luyện tập 11	HS rèn kĩ năng tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Một VTPT của (P) là $\vec{n}=(1;3;1)$, vectơ này cũng là một VTPT của mặt phẳng (Q). Mặt khác có $A(0;-1;1)$ thuộc (P) nhưng không thuộc (Q), do đó (P) // (Q). b) Khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng khoảng cách giữa A và (Q), do vậy khoảng cách cần tìm bằng $$\frac{\lvert 0-3+1+5\rvert}{\sqrt{1+9+1}}=\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}.$$
Vận dụng 5	HS vận dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng để giải quyết tình huống thực tiễn.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Khoảng cách từ điểm $C(1;2;4)$ đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z+3$ là $$\frac{\lvert 1+4+8+3\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{16}{3}.$$ Gọi H là chân đường cao kẻ từ C đến (P). Khi đó, bán kính hình tròn là $R=CH\cdot\tan\frac{115^\circ}{2}=\frac{16}{3}\cdot\tan\frac{115^\circ}{2}\approx 8{,}4$ đơn vị độ dài.

3. Phân loại bài tập

- Viết phương trình mặt phẳng theo ba trường hợp cơ bản: Từ Bài tập 5.1 đến Bài tập 5.4.
- Quan hệ song song và quan hệ vuông góc giữa các mặt phẳng: Các bài tập 5.3, 5.4, 5.6, 5.7.
- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng: Các bài tập 5.5, 5.6, 5.7.
- Vận dụng hiểu biết về phương trình mặt phẳng, vectơ vào bài toán thực tế và bài toán vật lí: Từ bài tập 5.8 đến Bài tập 5.10.

IV. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

5.1. *Đáp số.* $x-1=0$.

5.2. a) Ta có $A(1;-1;3)$, $B(0;2;4)$, $D(2;-1;1)$ và $A'(0;1;2)$.

Vì $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)=(x_C-2;y_C+1;z_C-1)\Rightarrow C=(1;2;2)$.

Vì $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}=(-1;2;-1)=(x_{B'};y_{B'}-2;z_{B'}-4)\Rightarrow B'=(-1;4;3)$.

Vì $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}=(-1;2;-1)=(x_{D'}-2;y_{D'}+1;z_{D'}-1)\Rightarrow D'=(1;1;0)$.

b) Ta có $\left[\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{CD'}\right]=(-3;-4;2)$ là một VTPT của mặt phẳng $(CB'D')$.

Phương trình mặt phẳng $(CB'D')$ là

$-3(x-1)-4(y-2)+2(z-2)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2z-7=0.$

5.3. Một VTPT của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(3;2;-1)$, một VTPT của mặt phẳng (R) là $\overrightarrow{n_R}=(1;1;-1)$. Một VTPT của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_R}\right]=(-1;2;1)=-(1;-2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$1(x-1)-2(y+1)-1(z-5)=0\Leftrightarrow x-2y-z+2=0.$

5.4. Trục Ox có một VTCP là $\vec{i}=(1;0;0)$, một VTPT của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-3)$.

Một VTPT của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{n_Q}\right]=(0;3;2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$0(x-2)+3(y-3)+2(z+1)=0\Leftrightarrow 3y+2z-7=0.$

5.5. Khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0;0)$ đến (P) là: $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{|1|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{1}{3}$.

5.6. $(P):x+y+z+2=0$, $(Q):x+y+z+6=0$ là hai mặt phẳng có chung một VTPT là $\vec{n}=(1;1;1)$ và $A(0;-1;-1)$ thuộc (P) nhưng không thuộc (Q), do đó $(P)\parallel(Q)$.

Khoảng cách giữa (P) và (Q) là: $\mathrm{d}(A,(Q))=\dfrac{|-1-1+6|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

5.7. a) Một VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;3;-1)$, một VTPT của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;-2)$.

Vì $\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=1-3+2=0\Rightarrow(P)\perp(Q)$.

b) Gọi $M(t;0;0) \in Ox$, ta có:

$$d(M,(P)) = d(M,(Q)) \Leftrightarrow \frac{|t|}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{|t+1|}{\sqrt{1+1+4}} \Leftrightarrow 6t^2 = 11(t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 22t + 11 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-11 \pm \sqrt{66}}{5}.$$

Vậy $M\left(\frac{-11+\sqrt{66}}{5};0;0\right)$ hoặc $M\left(\frac{-11-\sqrt{66}}{5};0;0\right)$.

5.8. Gọi mái nhà là hình chóp *S.ABCD*. Nếu ý tưởng của bác An thực hiện được thì tích có hướng của hai VTPT của hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SCD*) đều là VTPT của mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*). Do đó hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*) song song hoặc trùng nhau, điều này vô lí. Vậy ý tưởng của bác An không thực hiện được.

5.9. Mặt phẳng (*Oxy*) có phương trình $z = 0$ song song với mặt phẳng có phương trình $z - 1 = 0$. Do đó mặt phẳng chứa sàn nhà và mặt phẳng chứa mái tầng 1 song song với nhau, hai mặt phẳng này không song song với mặt phẳng chứa mái nhà tầng 2.

5.10. Giá của moment lực $\vec{M}$ vuông góc với giá của vectơ $\overrightarrow{OP}$ và $\vec{F}$. Mà *OP* và *AB* luôn nằm ngang và giá của $\vec{F}$ song song với *AB* nên giá của moment lực $\vec{M}$ luôn có phương thẳng đứng.

Bài 15. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN (5 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

- Nhận biết được phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng.
- Viết được phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết VTCP, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.
- Nhận biết được vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.
- Biết vận dụng hiểu biết về phương trình đường thẳng vào một số bài toán thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke, hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (các bài tập vận dụng trong bài học).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Nhấn mạnh cho HS: Một điểm thuộc một đường thẳng khi và chỉ khi toạ độ của điểm thoả mãn phương trình của đường thẳng đó.
- Lưu ý HS nhớ cách lập phương trình tham số của đường thẳng, không nhất thiết nhớ công thức.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 5 tiết. Cụ thể như sau:

- Mục 1: 2 tiết. Mục 2: 0,5 tiết. Mục 3: 1,5 tiết.
- Bài tập cuối bài: 1 tiết.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG		
a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng		

HĐ1	Hình thành khái niệm VTCP của một đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Khái niệm VTCP của đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	– Nêu một cách xác định đường thẳng. – Giúp HS hiểu sâu hơn về khái niệm VTCP của đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng nhận biết VTCP của một đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn kĩ năng nhận biết VTCP của một đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS. *Giải.* Các VTCP của đường thẳng AB là: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'A'}$.
b) Phương trình tham số của đường thẳng		
HĐ2	Hình thành khái niệm phương trình tham số của đường thẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – Ở câu b, GV có thể gợi ý HS biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo vectơ $\vec{u}$.
Khung kiến thức	Khái niệm phương trình tham số của đường thẳng.	GV trình bày, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Chú ý	Nhận biết phương trình tham số và điểm thuộc đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 2	HS học kĩ năng nhận biết một điểm thuộc đường thẳng, một VTCP của đường thẳng khi biết phương trình tham số của đường thẳng đó. Viết phương	GV trình bày, giảng giải cho HS.

	trình tham số của đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết VTCP.	
Luyện tập 2	HS rèn kĩ năng nhận biết một điểm thuộc đường thẳng và lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết VTCP.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Lần lượt lấy $t=0$ và $t=1$ ta nhận được tương ứng hai điểm thuộc đường thẳng Δ là $A(2;0;1), B(3;3;2)$. Một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;3;1)$. b) Phương trình tham số của đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=t. \end{cases}$
c) Phương trình chính tắc của đường thẳng		
HĐ3	Hình thành khái niệm phương trình chính tắc của đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Phương trình chính tắc của đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 3	HS học kĩ năng nhận biết VTCP của đường thẳng và điểm thuộc đường thẳng khi biết phương trình chính tắc của đường thẳng đó.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 3	HS rèn kĩ năng nhận biết VTCP của đường thẳng và điểm thuộc đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(3;1;5)$, hai điểm thuộc đường thẳng Δ là $A(-1;1;2), B(2;2;7)$. *Chú ý:* Khi lấy điểm thuộc đường thẳng có phương trình chính tắc, với mỗi giá trị của hoành độ, từ phương trình ta sẽ tính được tung độ và cao độ của điểm đó.

Ví dụ 4	HS học kĩ năng viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 4	HS rèn kĩ năng viết phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t. \end{cases}$ Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.
Ví dụ 5	HS học kĩ năng viết phương trình tham số của đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 5	HS rèn kĩ năng viết phương trình tham số của đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $M(2;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oyz) là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$ vì đường thẳng đó có một VTCP là $\vec{i} = (1;0;0)$.
d) Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm		
HĐ4	Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 6	HS học kĩ năng viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 6	HS rèn kĩ năng viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Đáp số.* Phương trình tham số của đường thẳng

		AB là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$
Vận dụng 1	Vận dụng hiểu biết về phương trình đường thẳng để giải quyết bài toán có tính thực tiễn.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Ta có $M(2;3;-4), N(-1;0;8)$. a) Vì $\overrightarrow{MN} = (-3;-3;12) = -3(1;1;-4)$ là một VTCP của đường thẳng MN nên phương trình đường thẳng MN là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 4t. \end{cases}$ b) D là giao điểm của MN và (Oxy), ta xét: $z = -4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Do đó $D(1;2;0)$. c) Vì $\overrightarrow{DM} = (1;1;-4), \overrightarrow{DN} = (-2;-2;8) = -2\overrightarrow{DM}$ nên D nằm giữa M và N. Trả lời câu hỏi được nêu ra trong tình huống mở đầu: Ta có $OD = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5} < 3$ nên tấm bìa che khuất tầm nhìn.
2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC		
HĐ5	Tìm điều kiện để hai đường thẳng vuông góc với nhau.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc với nhau.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 7	HS học kĩ năng nhận biết hai đường thẳng vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 7	HS rèn kĩ năng nhận biết hai đường thẳng vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (2;1;-1)$, một VTCP của trục Oz là $\vec{k} = (0;0;1)$. Ta thấy $\vec{u} \cdot \vec{k} = -1 \neq 0$ nên Δ không vuông góc với trục Oz.

Vận dụng 2	HS vận dụng hiểu biết về phương trình đường thẳng trong một tình huống mang tính thực tiễn.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Hai con đường thuộc hai đường thẳng lần lượt có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(1;1;0), \overrightarrow{u_2}=(-2;2;0)$. Ta có $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$ nên hai con đường thuộc hai đường thẳng vuông góc với nhau.
3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG		
HĐ6	Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – Ở phần b, GV có thể gợi ý HS xét đường thẳng d qua A_1 và song song với Δ_1. Khi đó, từ giả thiết ta có ba đường thẳng Δ_1, A_1A_2, d cùng vuông góc với giá của $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$ và cùng đi qua A_1. Sau đó GV có thể nêu các câu hỏi gợi ý sau: + Ba đường thẳng trên cùng thuộc một mặt phẳng hay không? + Mặt phẳng đó có chứa điểm A_2 hay không, có chứa đường thẳng Δ_2 hay không?
Khung kiến thức	Tiêu chuẩn nhận biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 8	HS học kĩ năng nhận biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 8	HS rèn kĩ năng nhận biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Hai đường thẳng có cùng một VTCP là $(1;-2;3)$ và điểm $A(3;0;1)$ thuộc đường thẳng Δ_1 nhưng không thuộc Δ_2. Do đó hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.
Ví dụ 9	HS học kĩ năng nhận biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.

Luyện tập 9	HS rèn kĩ năng nhận biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có cùng một VTCP là $\vec{u} = (1;1;4)$ và điểm $A(1;-2;3)$ thuộc đường thẳng Δ_1 nhưng không thuộc Δ_2. Do đó hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau. b) Một VTCP của trục Ox là $\vec{i} = (1;0;0)$, ta có $\overrightarrow{OA} = (1;-2;3)$ $\Rightarrow \left[\vec{u}, \vec{i}\right] \cdot \overrightarrow{OA} = 0 - 8 - 3 = -11 \neq 0.$ Do đó Δ_1 và trục Ox chéo nhau. c) Hai đường thẳng Δ_2 và Δ_3 có cùng VTCP $(1;1;4)$ và cùng đi qua điểm $B(-1;-1;0)$ nên hai đường thẳng đó trùng nhau. d) Một VTCP của trục Oz là $\vec{k} = (0;0;1)$, ta có: $\left[\vec{u}, \vec{k}\right] = (1;-1;0) \neq \vec{0}$ và $\left[\vec{u}, \vec{k}\right] \cdot \overrightarrow{OB} = -1 + 1 + 0 = 0$ nên Δ_2 và trục Oz cắt nhau.
Chú ý	Giới thiệu cách kiểm tra vị trí tương đối giữa hai đường thẳng bằng tiêu chuẩn hệ phương trình.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 10	HS kiểm tra vị trí tương đối giữa hai đường thẳng bằng tiêu chuẩn hệ phương trình.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. GV gợi ý HS dùng tiêu chuẩn hệ phương trình. *Giải.* Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1 + 2t = s & (1) \\ 3 + t = 1 + 2s & (2) \\ 1 - t = 3s & (3) \end{cases}$ Từ (1) và (2) ta tìm được $\begin{cases} t = 0 \\ s = 1 \end{cases}$, nhưng với hai giá trị này không thoả mãn (3), do đó hệ đang

		xét vô nghiệm. Mặt khác, một VTCP của Δ_1 là $(2;1;-1)$ và một VTCP của Δ_2 là $(1;2;3)$ hai vectơ này không cùng phương. Vậy hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.
Vận dụng 3	HS vận dụng hiểu biết về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng vào một tình huống có tính thực tiễn.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Hai đường thẳng chứa phương chuyển động của hai vật thể là hai đường thẳng chéo nhau vì $\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right] \cdot \overrightarrow{AB} = -10 + 3 + 0 = -7 \neq 0$. Vậy trong quá trình dịch chuyển hai vật thể không bao giờ chạm nhau.

3. Phân loại bài tập

- Viết phương trình đường thẳng: Các bài tập từ 5.11 đến 5.13.
- Nhận biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng: Các bài tập từ 5.14 đến 5.16.
- Vận dụng hiểu biết về phương trình đường thẳng vào một số tình huống có tính thực tiễn: Các bài tập từ 5.17 đến 5.19.

IV. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

5.11. Đường thẳng d có một VTCP là $(2;1;3)$, mà đường thẳng Δ song song với d nên

phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$;

phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$.

5.12. Một VTPT của mặt phẳng (P) là $(1;3;-1)$ nên phương trình tham số của Δ là

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$; phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$.

5.13. $\overrightarrow{AB} = (-1;-5;5)$ là một VTCP của đường thẳng Δ nên phương trình tham số của Δ

là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$; phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z+1}{5}$.

5.14. a) Đường thẳng Δ_1 đi qua $A(1;3;2)$ và có một VTCP là $\vec{u}=(2;-1;3)$, đường thẳng Δ_2 đi qua $B(8;-2;2)$ và có một VTCP là $\vec{v}=(-1;1;2)$. Đặt $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=(-5;-7;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-5;0)\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-35+35=0$, mà $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương nên Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Mặt phẳng chứa Δ_1 và Δ_2 nhận $\vec{n}$ làm một VTPT và mặt phẳng đó đi qua điểm A nên phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$-5(x-1)-7(y-3)+1(z-2)=0\Leftrightarrow 5x+7y-z-24=0.$

5.15. a) Đường thẳng Δ_1 đi qua $A(1;3;2)$ và có một VTCP là $\vec{u}=(3;1;2)$, đường thẳng Δ_2 đi qua $B(1;-1;0)$ và có một VTCP là $\vec{v}=(3;1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-4;-2)$, $\vec{u}=\vec{v}$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương với $\vec{u}$ nên hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

b) Đặt $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]=6(1;1;-2)$.

Mặt phẳng chứa Δ_1 và Δ_2 nhận $\vec{n}$ làm một VTPT và mặt phẳng đó đi qua điểm A nên phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$1(x-1)+1(y-3)-2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y-2z=0.$

5.16. Đường thẳng Δ_1 đi qua $A(-1;1;3)$ và có một VTCP là $\vec{u}=(1;0;2)$, đường thẳng Δ_2 đi qua $B(-1;2;1)$ và có một VTCP là $\vec{v}=(2;1;3)$. Đặt $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=(-2;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;1;-2)\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=1-2=-1\neq 0$ suy ra Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

5.17. a) Hai con đường thuộc hai đường thẳng lần lượt có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;3)$, $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$. Do đó hai con đường thuộc hai đường vuông góc với nhau.

b) Nút giao thông trong hình vẽ là nút giao thông khác mức vì độ cao của các đường giao thông khác nhau để tránh xung đột.

5.18. a) Mục tiêu đặt tại M, ta có $\overrightarrow{AM}=\left(6;\frac{1}{2};17\right)$ không cùng phương với $\vec{v}=(2;1;6)$ nên viên đạn bắn không trúng mục tiêu.

b) Mục tiêu đặt tại N, ta có $\overrightarrow{AN}=(-4;-2;-12)=-2(2;1;6)$ cùng phương với $\vec{v}=(2;1;6)$ nhưng ngược chiều với $\vec{v}=(2;1;6)$. Trong trường hợp này viên đạn bắn cũng không trúng mục tiêu.

5.19. Ta có $A(0;0;6)$, $A'\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};-6\right)=\frac{3}{2}\left(1;\sqrt{3};-4\right)$ là một VTCP của đường thẳng AA' nên phương trình đường thẳng chứa tia nắng tại thời điểm đang xét là $\frac{x}{1}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z-6}{-4}$.

Bài 16. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

- Biết tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng trong không gian $Oxyz$.
- Biết vận dụng hiểu biết về góc vào một số tình huống liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke, hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (các bài tập vận dụng trong bài học).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cần chuẩn bị máy tính cầm tay.
- Trong tính toán, có thể lấy gần đúng giá trị số đo của các góc.
- Bài học cần kiến thức về góc trong hình học không gian mà HS đã học ở lớp 11.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Các mục 1 và 2.

– Tiết 2: Mục 3 và bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG		
HĐ1	Tìm mối quan hệ giữa góc giữa hai đường thẳng và góc giữa hai VTCP tương ứng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – GV có thể lưu ý HS: Góc giữa hai đường thẳng là không tù.
Khung kiến thức	Công thức tính góc giữa hai đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian *Oxyz*.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian *Oxyz*.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS. *Giải.* Đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}=(1;2;-2)$, trục Oz có một VTCP là $\vec{k}=(0;0;1)$. Ta có: $\cos(\Delta,Oz)=\left\|\cos(\vec{u},\vec{k})\right\|=\dfrac{\left\|\vec{u}\cdot\vec{k}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{k}\right\|}=\dfrac{2}{3}$. Do đó $(\Delta,Oz)\approx 48,2^\circ$.
2. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG		
HĐ2	Tìm mối liên hệ giữa góc	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.

	giữa đường thẳng và mặt phẳng với góc giữa các VTCP, VTPT tương ứng.	– GV có thể nhắc lại hoặc cho HS nhắc lại khái niệm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. – GV lưu ý HS: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là không tù.
Khung kiến thức	Công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 2	HS học kĩ năng tính góc giữa hai đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 2	HS rèn luyện kĩ năng tính góc giữa hai đường thẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS. *Giải.* Đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}=(-1;2;1)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}=(1;-1;1)$. Ta có: $\sin(\Delta,(P))=\lvert\cos(\vec{u},\vec{n})\rvert=\dfrac{\lvert -1-2+1\rvert}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+1}}$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow(\Delta,(P))\approx 28{,}1^\circ.$
3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG		
HĐ3	Tìm mối liên hệ giữa góc giữa hai mặt phẳng và góc giữa hai VTPT tương ứng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. – GV có thể nhắc hoặc cho HS nhắc lại khái niệm góc giữa hai mặt phẳng.
Khung kiến thức	Công thức tính góc giữa hai mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 3	HS học kĩ năng tính góc giữa hai mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 3	HS rèn luyện kĩ năng tính góc giữa hai mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}=(1;-\sqrt{2};1)$, mặt phẳng (Oxz) có một VTPT là $\vec{j}=(0;1;0)$. Ta có: $\cos((P),(Oxz))=\dfrac{\lvert-\sqrt{2}\rvert}{\sqrt{1+2+1}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow((P),(Oxz))=45^\circ.$

Ví dụ 4	HS học kĩ năng tính góc giữa hai mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Vận dụng	HS vận dụng hiểu biết về góc giữa hai mặt phẳng vào một tình huống mang tính thực tiễn.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Giả sử $AA' = 7$ m, $BB' = 6$ m, $CC' = 5$ m, tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 4 m nên $OB = 2\sqrt{3}$ m. Đơn vị trên các trục toạ độ là mét, nên ta có: $A'(0;-2;7), B'(2\sqrt{3};0;6), C'(0;2;5)$ $\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3};2;-1), \overrightarrow{A'C'} = (0;4;-2)$. Một VTPT của mặt phẳng $(A'B'C')$ là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right] = 4\sqrt{3}(0;1;2)$. Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0;0;1)$. Khi đó $\cos((Oxy),(A'B'C')) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow ((Oxy),(A'B'C')) \approx 26,6°$. Vậy góc giữa mái nhà và mặt sàn gần bằng 26,6°.

3. Phân loại bài tập

- Tính góc: Các bài tập từ 5.20 đến 5.22.
- Vận dụng hiểu biết về góc vào bài toán mang tính thực tiễn: Các bài tập 5.23, 5.24.

IV. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

5.20. Đường thẳng Δ_1 có một VTCP là $\vec{u} = (2;-1;3)$, đường thẳng Δ_2 có một VTCP là

$$\vec{v} = (-1;1;2). \text{ Ta có } \cos(\Delta_1,\Delta_2) = \left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right| = \frac{3\sqrt{21}}{42} \Rightarrow (\Delta_1,\Delta_2) \approx 70,9°.$$

5.21. Đường thẳng Oz có một VTCP là $\vec{k} = (0;0;1)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là

$$\vec{n} = (1;2;-1). \text{ Ta có } \sin(Oz,(P)) = \left|\cos(\vec{k},\vec{n})\right| = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow (Oz,(P)) \approx 24,1°.$$

5.22. Đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}=(-1;2;3)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}=(1;1;1)$. Ta có $\sin(\Delta,(P))=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{2\sqrt{42}}{21}\Rightarrow(\Delta,(P))\approx 38,1^\circ$.

5.23. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho O là giao điểm của AC và BD, điểm A thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy, điểm S thuộc tia Oz.

Ta có $OA=OB=OC=115\sqrt{2}$, $OS=7\sqrt{439}$

$\Rightarrow A\left(115\sqrt{2};0;0\right)$, $B\left(0;115\sqrt{2};0\right)$, $C\left(-115\sqrt{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;7\sqrt{439}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}=\left(115\sqrt{2};0;-7\sqrt{439}\right), \overrightarrow{SB}=\left(0;115\sqrt{2};-7\sqrt{439}\right), \overrightarrow{SC}=\left(-115\sqrt{2};0;-7\sqrt{439}\right)$.

Từ các vectơ trên ta tính được:

– Một VTPT của (SAB) là $\overrightarrow{n_1}=115\sqrt{2}\left(7\sqrt{439};7\sqrt{439};115\sqrt{2}\right)$,

– Một VTPT của (SBC) là $\overrightarrow{n_2}=-115\sqrt{2}\left(7\sqrt{439};-7\sqrt{439};-115\sqrt{2}\right)$.

Do đó $\cos((SAB),(SBC))=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{26\,450}{69\,472}\Rightarrow((SAB),(SBC))\approx 67,6^\circ$.

5.24. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$, sao cho mặt phẳng (Oxy) chứa đáy bể, O là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống đáy bể, tia Ox chứa chân đường vuông góc kẻ từ A xuống đáy bể, tia Oy chứa chân đường vuông góc kẻ từ C xuống đáy bể, tia Oz chứa điểm B, đơn vị trên các trục là mét.

Ta có: $A(1;0;0,4)$, $B(0;0;0,44)$, $C(0;1;0,48)$.

a) Vì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ nên ta tính được $D=(1;1;0,44)$. Do đó khoảng cách từ D đến đáy bể là 44 cm.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;0;0,04), \overrightarrow{BC}=(0;1;0,04)$.

Đặt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=(-0,04;0,04;-1)$, một VTPT của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{k}=(0;0;1)$

$\Rightarrow \cos((ABCD),(Oxy))=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|=\frac{25}{\sqrt{627}}\Rightarrow((ABCD),(Oxy))\approx 3,2^\circ$.

Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang khoảng $3,2^\circ$.

Bài 17. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

- Nhận biết được phương trình mặt cầu.
- Xác định được tâm và bán kính mặt cầu khi biết phương trình của mặt cầu.
- Lập được phương trình mặt cầu khi biết tâm và bán kính.
- Biết vận dụng kiến thức về phương trình mặt cầu để giải quyết một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

Bài học góp phần phát triển phẩm chất, năng lực sau cho HS:

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke, hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

Trong tính toán ở Mục 2, kết quả của từng phép tính được làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư sau dấu phẩy, chẳng hạn $\pi \approx 3,1416$.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết. Cụ thể như sau:

- Mục 1: 1,5 tiết.

- Mục 2: 1 tiết.
- Bài tập cuối bài: 0,5 tiết.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU		
HĐ1	Tìm phương trình mặt cầu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Phương trình mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Điểm nằm trong, điểm nằm ngoài mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng xác định tâm, bán kính mặt cầu. Xác định một điểm nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng xác định tâm, bán kính mặt cầu. Xác định một điểm nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Tâm của mặt cầu là $I\left(-2;0;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính của mặt cầu $R=\frac{3}{2}$. b) $MI^2=4^2+\frac{9}{4}>\frac{9}{4}=R^2$ nên một điểm M nằm ngoài mặt cầu
Ví dụ 2	HS học kĩ năng viết phương trình mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 2	HS rèn luyện kĩ năng viết phương trình mặt cầu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* a) Phương trình mặt cầu tâm $O(0;\ 0;\ 0)$ bán kính $R=1$ là $x^2+y^2+z^2=1$.

		b) Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm I của AB, ta có $I=\left(\frac{3}{2};-2;\frac{1}{2}\right)$, bán kính là $R=IA=\frac{\sqrt{14}}{2}$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$.
Ví dụ 3	HS học kĩ năng nhận biết phương trình mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 3	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết phương trình mặt cầu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Phương trình đã cho tương đương với phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=25$. Do đó (S) là mặt cầu có tâm là $I(2;-3;0)$, bán kính là $R=5$.
Nhận xét	Điều kiện xác định phương trình mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 4	HS học kĩ năng nhận biết phương trình mặt cầu.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 4	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết phương trình mặt cầu.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Ta có $a=-2; b=\frac{5}{2}; c=-3$ nên mặt cầu có: tâm là $I\left(-2;\frac{5}{2};-3\right)$, bán kính $R=\sqrt{4+\frac{25}{4}+9-\frac{25}{4}}=\sqrt{13}$.
2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN		
Đoạn mở đầu	Mô hình toán học của bề mặt Trái Đất trong một không gian $Oxyz$.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

	Mối liên hệ giữa vĩ độ, kinh độ của một điểm và toạ độ của điểm đó trong không gian *Oxyz*.	
Ví dụ 5	HS học kĩ năng tính khoảng cách giữa hai điểm trên bề mặt Trái Đất.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 5	HS rèn luyện kĩ năng tính khoảng cách giữa hai điểm trên bề mặt Trái Đất.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Giải.* Ta có $A(1;0;0), B\left(\frac{\sqrt{6}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\Rightarrow \cos\widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA\cdot OB} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 52,24°.$ Độ dài cung *AB* là $\frac{52,24}{360}\cdot 2\pi\cdot 6371 \approx 5808,8230\,(\text{km}).$
Trải nghiệm	Tính khoảng cách giữa hai điểm trên bề mặt Trái Đất bằng công cụ của Google Maps.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. Hướng dẫn: Vào Google Maps, chọn chức năng tính khoảng cách, nhập hai vị trí cần tính khoảng cách.

3. Phân loại bài tập

- Xác định tâm và bán kính: Các bài tập 5.25, 5.28, 5.29.
- Viết phương trình mặt cầu: Các bài tập 5.26, 5.27.
- Nhận biết phương trình mặt cầu: Bài tập 5.29.
- Vận dụng hiểu biết về mặt cầu vào tình huống có tính thực tiễn: Bài tập 5.30.

IV. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

5.25. Mặt cầu có tâm $I\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$, bán kính $R=3$.

5.26. Phương trình mặt cầu là $(x+2)^2+y^2+(z-5)^2=4$.

5.27. Bán kính mặt cầu là $R = \mathrm{d}\left(I,(P)\right) = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \frac{7}{2}$.

5.28. Tâm của (*S*) là $I(-1;1;-4)$, bán kính của (*S*) là $R = \sqrt{1+1+16+18} = 6$.

5.29. a) Ta có $a=1, b=0, c=\frac{5}{2}$ và $d=30$. Vì $a^2+b^2+c^2-d = 1+0+\frac{25}{4}-30<0$ nên phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

b) Ta có $a=2, b=-1, c=1$ và $d=0$. Vì $a^2+b^2+c^2-d=6>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

c) Phương trình đã cho là phương trình bậc 3 nên phương trình đó không phải là phương trình mặt cầu.

d) Ta có $a=0, b=0, c=0$ và $d=-5$. Vì $a^2+b^2+c^2-d=5>0$ nên phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm $I(0;0;0)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

5.30. Ta có $A(2;0;0), M(2;1;1) \Rightarrow AM = \sqrt{2} > 1$. Do đó, vị trí của điểm *M* không thuộc vùng phủ sóng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V (2 tiết)

I. TỔNG KẾT KIẾN THỨC

1. Phương trình mặt phẳng

- Một mặt phẳng đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ làm VTPT thì phương trình của mặt phẳng là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
- Nếu $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ và $abc \neq 0$ thì phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn).
- Nếu mặt phẳng (P) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ thì $\vec{n}=(A;B;C)$ là một VTPT của mặt phẳng (P).

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. Phương trình đường thẳng trong không gian

– Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có một VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ thì phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$

– Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có một VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và $abc\neq 0$ thì phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

– Nếu đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ hoặc phương trình chính tắc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ thì đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(a;b;c)$ làm VTCP.

4. Một số công thức tính góc trong không gian

– Góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$: Gọi $\vec{n}=(A;B;C)$ và $\vec{n'}=(A';B';C')$ lần lượt là VTPT của (P) và (Q). Khi đó, ta có:

$$\cos((P),(Q))=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{n'}\right|}=\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

– Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P): Gọi $\vec{n}=(A;B;C)$ và $\vec{u}=(a;b;c)$ lần lượt là VTPT của (P) và VTCP của Δ. Khi đó, ta có:

$$\sin(\Delta,(P))=|\cos(\vec{n},\vec{u})|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

– Góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng Δ': Gọi $\vec{u} = (a;b;c)$ và $\vec{u'} = (a';b';c')$ lần lượt là VTCP của Δ và Δ'. Khi đó, ta có:

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{u'}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{u'}\right|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

5. Phương trình mặt cầu

– Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R thì có phương trình là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

– Phương trình có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Khi đó, mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– GV cho HS tự tổng kết kiến thức của chương và triển khai làm bài tập trắc nghiệm trên lớp (có thể dùng máy chiếu).

– Bài tập tự luận, GV có thể phân các dạng bài tập để HS ôn tập.

III. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

A. Trắc nghiệm

5.31. D **5.32.** D **5.33.** B **5.34.** C **5.35.** C

5.36. D **5.37.** A **5.38.** C **5.39.** A

B. Tự luận

5.40. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;1;3), \overrightarrow{AC} = (-2;-2;4)$ nên $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 2(5;-1;2)$ là một VTPT của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$5(x-1) - 1(y-0) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 2z - 3 = 0.$

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;4)=-2(1;1;-2)$ là một VTCP của đường thẳng AC nên phương trình chính tắc của đường thẳng AC là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

c) Trung điểm của AC là $I=(0;-1;1)$, bán kính của mặt cầu đường kính AC là $R=\dfrac{AC}{2}=\sqrt{6}$. Phương trình mặt cầu là $x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

d) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính là $R=AB=\sqrt{19}$. Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=19$.

5.41. Vì đường thẳng d có một VTCP $\vec{u}=(1;1;-2)$ và d đi qua $A(1;-2;4)$, ta có $\overrightarrow{OA}=(1;-2;4)$ nên $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{OA}\right]=-3(0;2;1)$ là một VTPT của mặt phẳng chứa d và gốc toạ độ O. Phương trình mặt phẳng chứa d và gốc toạ độ O là:

$0(x-0)+2(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 2y+z=0.$

5.42. a) Ta có: $\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{|1+2+4-1|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$

b) Mặt phẳng (Q) song song với (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;2)$, mặt phẳng (Q) đi qua $A(1;-1;2)$. Phương trình mặt phẳng (Q) là:

$1(x-1)-2(y+1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-7=0.$

c) Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-2)$, do đó mặt phẳng (R) có một VTPT là $\overrightarrow{n_R}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=-2(0;1;1)$.

Phương trình (R) là $0(x-1)+1(y+1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow y+z-1=0.$

5.43. a) Đường thẳng d đi qua $M(0;1;0)$ và có một VTCP là $\vec{u}=(1;2;2)$, đường thẳng d' đi qua $N(-1;-2;3)$ và có một VTCP là $\vec{v}=(2;2;-1)$.

Đặt $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=(-6;5;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-1;-3;3)\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=6-15-6=-15\neq 0$ suy ra d và d' chéo nhau.

b) Đường thẳng Δ song song với d và Δ đi qua $A(1;0;2)$, đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}=(1;2;2)$. Phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2}$.

c) Mặt phẳng (P) chứa A và đường thẳng d nên chứa điểm M, ta có $\vec{u}=(1;2;2)$, $\overrightarrow{AM}=(-1;1;-2)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]=-3(2;0;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1)+0(y-0)-1(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-z=0$.

d) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y=0$.

Phương trình đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$.

Từ phương trình đường thẳng d, ta cho $y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2};\ z=-1$.

Toạ độ giao điểm của d và (Oxz) là $\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$.

5.44. Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;-2)$, đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$, do đó $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}\right]=(4;-3;5)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P).

Phương trình mặt phẳng (Q) là:

$4(x-1)-3(y+1)+5(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+5z-7=0$.

5.45. Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$, đi qua $M(-1;1;0)$.

Đường thẳng d′ có một VTCP là $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;1;2)$, đi qua $N(1;2;-1)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa d và song song với d′ nên mặt phẳng (P) có một VTPT là

$\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]=(5;-3;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$5(x+1)-3(y-1)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow 5x-3y-z+8=0$.

5.46. Một VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;-1)$, một VTPT của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=(2;1;-1)$. Vì mặt phẳng (R) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (R) có một VTPT là $\overrightarrow{n_R}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(2;-1;3)$.

Phương trình mặt phẳng (R) là:

$2(x+1)-1(y-2)+3(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x-y+3z+4=0.$

5.47. a) Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-2)$, đi qua điểm $A(-2;-3;3)$.

Đường thẳng d' có một VTCP là $\overrightarrow{u_{d'}}=(-1;1;2)$, đi qua điểm $B(1;-2;0)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]=(6;0;3), \overrightarrow{AB}=(3;1;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]\cdot\overrightarrow{AB}=9\neq 0$. Do đó hai đường thẳng d, d' chéo nhau.

b) Ta có $\cos(d,\ d')=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\Rightarrow(d,d')\approx 66^\circ$.

5.48. Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}=(2;-2;1)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}=(1;1;-2)$. Ta có $\sin(d,(P))=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{9}\Rightarrow(d,(P))\approx 15{,}8^\circ$.

5.49. Gọi ba vị trí trên mặt bể là A, B, C thì tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 m. Gọi dây dọi lần lượt là AA', BB', CC' có độ dài lần lượt là 4 m; 4,4 m; 4,8 m.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm của BC, tia Ox chứa điểm A, tia Oy chứa điểm B, tia Oz đi qua trung điểm của $B'C'$ và đơn vị trên các trục là mét.

Ta có: $OB=OC=1,\ OA=\sqrt{3}\Rightarrow A'=\left(\sqrt{3};0;4\right), B'=(0;1;4{,}4), C'=(0;-1;4{,}8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'}=\left(-\sqrt{3};1;0{,}4\right), \overrightarrow{A'C'}=\left(-\sqrt{3};-1;0{,}8\right)$.

Mặt phẳng $(A'B'C')$ có một VTPT là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right]=0{,}4\cdot\sqrt{3}\left(\sqrt{3};1;5\right)$.

Mặt phẳng (ABC) có một VTPT là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Do đó $\cos((ABC),(A'B'C'))=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. Góc cần tìm khoảng $21{,}8^\circ$.

5.51. Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;-1)$, mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Khi đó $\sin(AB,(Oxy))=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{k}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{33}}\Rightarrow(AB,(Oxy))\approx 10^\circ$.

5.52. Ta có $AB^2=OB^2-OA^2=2\Rightarrow AB=\sqrt{2}$. Do 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6 371 km trên thực tế nên khoảng cách AB là $\sqrt{2}\cdot 6\,371\approx 9\,010$ (km).

Chương VI. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

– Trong thực tế, ta thường phải cập nhật xác suất của một biến cố khi biết thêm một thông tin nào đó. Nếu có thông tin biến cố *B* xảy ra, cần cập nhật xác suất của biến cố *A*, tức là tính xác suất có điều kiện của *A* với điều kiện biết *B* đã xảy ra. Nội dung của chương bao gồm khái niệm xác suất có điều kiện và một số công thức có liên quan (công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes). Xác suất có điều kiện là một chủ đề có rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

– Các ví dụ, bài tập và ứng dụng của chương được lấy từ chính thực tế cuộc sống hoặc rất gần gũi với cuộc sống nhằm trang bị cho HS những kiến thức và kĩ năng để có thể giải quyết những bài toán tính xác suất thường gặp trong thực tế. Vì vậy nội dung của chương mang tính ứng dụng cao, thể hiện triết lí của bộ sách là "Kết nối tri thức với cuộc sống".

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 2 bài học và 1 tiết ôn tập chương, được thực hiện trong 9 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 18: Xác suất có điều kiện	4 tiết
Bài 19: Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes	4 tiết
Bài tập cuối chương VI	1 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

Các bài học của chương này liên quan đến các kiến thức về xác suất của lớp 10 và lớp 11. Khi đề cập tới những kiến thức có liên quan đó, GV cần ôn tập, nhắc lại cho HS.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 18. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

- Nhận biết định nghĩa xác suất có điều kiện và ý nghĩa của khái niệm này trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.
- Biết tính xác suất có điều kiện từ công thức, từ bảng dữ liệu thống kê 2×2 và từ sơ đồ hình cây.
- Nắm được và biết vận dụng công thức nhân xác suất.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều trước đây.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong Khung kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay theo Ví dụ.
- Các HĐ, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi hỏi HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS. GV có thể thực hiện việc chữa bài HĐ, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc. Nếu HS đó sai GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 4 tiết. Cụ thể như sau:

- Mục 1: Xác suất có điều kiện 3 tiết
- Mục 2: Công thức nhân xác suất 1 tiết

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1, 2, 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Giới thiệu trò chơi "*Ô cửa bí mật*" một trò chơi trên truyền hình nổi tiếng ở Mỹ.	GV triển khai theo SGK. "Bật mí" rằng các kiến thức trong bài học sẽ giúp ta cho người chơi lời khuyên.
1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN		
HĐ1	Khởi động cho việc hình thành khái niệm xác suất có điều kiện.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS trả lời. *Trả lời:* Nếu Sơn lấy được bút bi đen thì trong 11 chiếc bút còn lại có 7 bút bi xanh và 4 bút bi đen. Vậy xác suất để Tùng lấy được bút bi xanh khi biết Sơn lấy được bút bi đen là $\frac{7}{11}$.
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm xác suất có điều kiện và công thức tính.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 1	Tính xác suất có điều kiện từ định nghĩa và từ công thức.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1	Tính xác suất có điều kiện từ định nghĩa và từ công thức.	HS tự làm, GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Giải.* a) Bằng định nghĩa: Nếu B không xảy ra tức là Bình lấy được viên bi đen. Khi đó trong hộp còn lại 29 viên bi với 20 viên bi trắng và 9 viên bi đen. Vậy $P\left(A\mid\overline{B}\right)=\frac{20}{29}$. b) Bằng công thức: Nếu B không xảy ra tức là Bình lấy được viên bi đen. Bình có 10 cách chọn bi đen. An có 29 cách chọn từ 29 viên còn lại.

		Vậy $n(\overline{B}) = 10 \cdot 29$ và $P(\overline{B}) = \dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)}$. Bình có 10 cách chọn bi đen. An có 20 cách chọn viên bi trắng. Vậy $n(\mathrm{A}\overline{B}) = 20 \cdot 10$ và $P(A\overline{B}) = \dfrac{n(A\overline{B})}{n(\Omega)}$. Vậy $P\left(A \mid \overline{B}\right) = \dfrac{P\left(A\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{n(A\overline{B})}{n\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{20 \cdot 10}{10 \cdot 29} = \dfrac{20}{29}$.
Ví dụ 2	Minh hoạ việc tính xác suất có điều kiện từ định nghĩa và từ công thức.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2	Minh hoạ việc tính xác suất có điều kiện từ định nghĩa.	*Giải:* Theo định nghĩa $P\left(\overline{A} \mid B\right)$ là xác suất của $\overline{A}$ (tức là xác suất không xuất hiện của A) biết rằng biến cố B đã xảy ra. Vì $\overline{A}$, B độc lập nên việc xảy ra B không ảnh hưởng tới xác suất không xuất hiện của A. Do đó $P\left(\overline{A} \mid B\right) = P\left(\overline{A}\right)$. Tương tự $P\left(A \mid \overline{B}\right)$ là xác suất của A biết rằng biến cố B không xảy ra. Vì A, $\overline{B}$ độc lập nên việc không xảy ra B không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của A. Do đó $P\left(A \mid \overline{B}\right) = P(A)$.
Ví dụ 3	Minh hoạ việc tính xác suất có điều kiện từ bảng dữ liệu thống kê 2×2.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 3	Luyện tập tính xác suất có điều kiện từ bảng dữ liệu thống kê 2 x 2. Ví dụ 3 đóng vai trò làm mẫu.	– HS tự làm (trong 10 phút). GV gọi HS lên bảng. – GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Giải.* Không gian mẫu Ω là tập hợp 4 000 bệnh nhân.

		a) Gọi A là biến cố: "Bệnh nhân đó uống thuốc M". B là biến cố: "Bệnh nhân đó khỏi bệnh". Ta cần tính $P(A\|B)$. Ta có B là tập hợp con của không gian mẫu gồm các bệnh nhân khỏi bệnh. Do đó: $n(B) = 1\,600 + 1\,200 = 2\,800$; $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$. AB là biến cố: "Bệnh nhân đó uống thuốc M và khỏi bệnh". AB là tập hợp con của không gian mẫu gồm các bệnh nhân uống thuốc M và khỏi bệnh. Ta có: $n(AB) = 1\,600$; $P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)}$. Do đó $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{1\,600}{2\,800} = \frac{4}{7}$. b) $\overline{B}$ là biến cố: "Không khỏi bệnh". $\overline{A}$ là biến cố: "Người đó dùng thuốc N". Ta cần tính $P(\overline{A} \mid \overline{B})$. Ta có $\overline{B}$ là tập hợp con của không gian mẫu gồm các bệnh nhân không khỏi bệnh. Vậy $n(\overline{B}) = 800 + 400 = 1\,200$. $\overline{A}\,\overline{B}$ là biến cố: "Bệnh nhân đó uống thuốc N và không khỏi bệnh", $\overline{A}\,\overline{B}$ là tập hợp con của không gian mẫu gồm các bệnh nhân uống thuốc N và không khỏi bệnh, suy ra $n(\overline{A}\,\overline{B}) = 400$. Do đó $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{n(\overline{A}\,\overline{B})}{n(\overline{B})} = \frac{400}{1\,200} = \frac{1}{3}$.

Tiết 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT		
HĐ2	Khởi động cho việc hình thành công thức nhân xác suất.	GV cho HS suy nghĩ khoảng 3 phút rồi hỏi xem ai trả lời được. *Trả lời:* Theo công thức: Với hai biến cố A và B bất kì, $P(B) > 0$, ta có: $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, suy ra $P(AB)=P(B)\cdot P(A\mid B)$.
Khung kiến thức	Trình bày công thức nhân xác suất.	GV triển khai theo SGK.
Nhận xét	Đây là nhận xét quan trọng, HS cần ghi nhớ.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 4	Minh hoạ một ứng dụng công thức nhân xác suất và minh hoạ trực quan bằng sơ đồ hình cây.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 4	Luyện tập áp dụng công thức nhân xác suất và sơ đồ hình cây.	HS tự làm (trong 5 – 10 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Giải.* a) $P(XĐ) = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{5}{11}=\dfrac{35}{132}$. b) $P(ĐĐ) = \dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{11}=\dfrac{20}{132}$; $P(XX) = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{6}{11}=\dfrac{42}{132}$. Xác suất để hai viên bi rút ra cùng màu là $\dfrac{20}{132}+\dfrac{42}{132}=\dfrac{62}{132}=\dfrac{31}{66}$.
Vận dụng	Giải quyết tình huống mở đầu.	HS tự làm (trong 10 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải.

		a) +) Trước khi người chủ trò mở cánh cửa số 3 thì ba biến cố E_1, E_2, E_3 là đồng khả năng. Do đó $P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=\frac{1}{3}$. +) Xét $P(H\mid E_1)$: Nếu E_1 xảy ra, tức là sau cửa số 1 có ô tô. Khi đó sau cửa số 2 và 3 là con lừa. Người quản trò chọn mở cửa số 2 hay số 3 với xác suất như nhau. Vậy $P(H\mid E_1)=\frac{1}{2}$. +) Xét $P(H\mid E_2)$: Nếu E_2 xảy ra tức là cửa số 2 có ô tô. Khi đó chủ trò chắc chắn phải mở cửa số 3 và thấy con lừa. Vậy $P(H\mid E_2)=1$. b) Theo công thức tính xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất ta có: $P(E_1\mid H)=\frac{P(E_1H)}{P(H)}=\frac{P(E_1)\cdot P(H\mid E_1)}{P(H)}$; (1) $P(E_2\mid H)=\frac{P(E_2H)}{P(H)}=\frac{P(E_2)\cdot P(H\mid E_2)}{P(H)}$. (2) c) Từ (1), (2) và câu a, suy ra $\frac{P(E_2\mid H)}{P(E_1\mid H)}=\frac{P(H\mid E_2)}{P(H\mid E_1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$ Vậy $P(E_2\mid H)=2P(E_1\mid H)$. Người chơi nên chuyển sang cửa số 2. Bởi vì với điều kiện H "người quản trò mở cửa số 3 thấy con lừa" thì xác suất để cửa số 2 có ô tô gấp đôi xác suất để cửa số 1 có ô tô.

3. Phân loại bài tập

- Tính xác suất có điều kiện bằng công thức: Các bài tập từ 6.1 đến 6.5.
- Áp dụng công thức nhân xác suất: Bài tập 6.6.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.1. Gọi A là biến cố: "Người đó rút được thẻ số 10"; B là biến cố: "Người đó rút được thẻ mang số chẵn". Ta có $AB = \{10\} \Rightarrow n(AB) = 1$.

$$P(AB) = \frac{1}{20};\ P(B) = \frac{10}{20}. \text{ Vậy } P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{10}.$$

6.2. $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$.

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}16}{0{,}51} \approx 0{,}3137.$$

6.3. a) Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7";

B là biến cố: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm". Cần tính $P(A \mid B)$.

Ta có $n(\Omega) = 36$; $AB = \{(2, 5); (5, 2)\} \Rightarrow n(AB) = 2 \Rightarrow P(AB) = \frac{2}{36}$.

$$\overline{B} = \{(a, b), a, b \in \{1, 2, 3, 4, 6\}\} \Rightarrow n(\overline{B}) = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{25}{36}.$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Từ đó $P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2}{11}$.

b) Ta cần tính $P(B \mid A)$.

Ta có $P(B\,|\,A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Ở câu a, ta đã có $P(AB) = \frac{2}{36}$. Cần tính $P(A)$.

$A = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4), (4, 3); (5, 2); (6, 1)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36}$.

Từ đó $P(B\,|\,A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

6.4. Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc không nhỏ hơn 10";

B là biến cố: "Ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm". Cần tính $P(A \mid B)$.

$AB = \{(5, 6); (5, 5); (6, 5)\} \Rightarrow n(AB) = 3 \Rightarrow P(AB) = \frac{3}{36}$.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Vậy $P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{11}$.

6.5. a) Gọi A là biến cố: "Thí nghiệm thứ nhất thành công" và B là biến cố: "Thí nghiệm thứ hai thành công". Khi đó biến cố: "Cả hai thí nghiệm đều thành công" là AB.

Theo công thức nhân xác suất ta có $P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

Theo bài ra $P(A) = 0,7$; $P(B \mid A) = 0,9$. Thay vào ta được $P(AB) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63$.

b) Biến cố: "Cả hai thí nghiệm đều không thành công" là $\overline{A}\overline{B}$. Theo công thức nhân xác suất ta có $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})$.

Ta có $P(\overline{B} \mid \overline{A})$ là xác suất để thí nghiệm thứ hai không thành công nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công. Do đó, từ dữ kiện của bài toán ta có:

$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$;

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$. Vậy $P(\overline{A}\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$.

c) Biến cố: "Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công" là $A\overline{B}$. Theo công thức nhân xác suất ta có $P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A)$. Ta có $P(\overline{B} \mid A)$ là xác suất để thí nghiệm thứ hai không thành công nếu thí nghiệm thứ nhất thành công. Do đó từ dữ kiện của bài toán ta có $P(\overline{B} \mid A) = 1 - 0,9 = 0,1$; $P(A) = 0,7$. Vậy $P(\overline{B} \mid A) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07$.

6.6. Gọi A là biến cố: "Lần 1 Hà lấy được kẹo màu cam"; B là biến cố: "Lần 2 Hà lấy được kẹo màu cam". Khi đó AB là biến cố: "Cả hai lần Hà lấy được kẹo màu cam".

Gọi n là số kẹo ban đầu trong túi. Ta có $P(A) = \frac{6}{n}$, $P(B \mid A) = \frac{5}{n-1}$.

Theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n-1} = \frac{30}{n^2 - n} = \frac{1}{3} \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow n = 10.$$

Vậy ban đầu trong túi có 10 cái kẹo.

Bài 19. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Nắm được công thức xác suất toàn phần.

- Sử dụng sơ đồ hình cây để mô tả công thức xác suất toàn phần.
- Vận dụng công thức xác suất toàn phần trong một số bài toán có nội dung thực tế và trong Sinh học.
- Nắm được công thức Bayes. Biết được ý nghĩa của công thức này.
- Vận dụng công thức Bayes trong một số bài toán có nội dung thực tế đặc biệt là chẩn đoán bệnh trong Y học.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều trước đây.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong Khung kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay theo Ví dụ.
- Các Hoạt động, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi gọi HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS. GV sẽ thực hiện việc chữa bài Hoạt động, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc. Nếu HS đó sai GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 4 tiết. Cụ thể như sau:

- Mục 1: Công thức xác suất toàn phần 2 tiết
- Mục 2: Công thức Bayes 2 tiết

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1, 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN		
Nêu vấn đề	Tình huống đặt ra nhu cầu cần có công thức xác suất toàn phần.	GV triển khai theo SGK.
HĐ1	Khởi động cho hình thành công thức xác suất toàn phần.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS trả lời. *Trả lời:* a) $P(A) = 0,75$; $P(\overline{A}) = 0,25$; $P(B \mid A) = 0,4$; $P(B \mid \overline{A}) = 0,9$. b) Nhà tổ chức quan tâm tới $P(B)$ nhất.
Khung kiến thức	Trình bày công thức xác suất toàn phần.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 1	Minh hoạ vận dụng công thức xác suất toàn phần trong một bài toán có nội dung thực tiễn.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1	Vận dụng công thức xác suất toàn phần để giải quyết vấn đề đặt ra trong tình huống mở đầu Mục 1.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm. *Giải.* Gọi A là biến cố: "Trời mưa" và B là biến cố: "Bán hết vé". Theo bài ra $P(A) = 0,75$. Suy ra $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,75 = 0,25$. Ta có: + Nếu trời mưa thì xác suất bán hết vé là 0,4. Vậy $P(B \mid A) = 0,4$. + Nếu trời không mưa thì xác suất bán hết vé là 0,9. Vậy $P(B \mid \overline{A}) = 0,9$.

		Thay vào công thức xác suất toàn phần ta được: $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})$ $=0,75\cdot 0,4+0,25\cdot 0,9$ $=0,3+0,225=0,525.$
Chú ý	Giới thiệu phương pháp mô tả trực quan công thức xác suất toàn phần dùng sơ đồ hình cây.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2	Dùng sơ đồ hình cây giải quyết câu hỏi tương tự như trong Ví dụ 1.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS trả lời. *Trả lời.* Hai nhánh cây đi tới $\overline{B}$ là $OA\overline{B}$ và $O\overline{A}\overline{B}$. Như vậy $P(\overline{B}) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,6 = 0,64.$
Vận dụng	Vận dụng công thức xác suất toàn phần để giải một bài toán di truyền.	GV triển khai theo Hướng dẫn trong SGK.
Luyện tập 3	Vận dụng công thức xác suất toàn phần, tiếp tục triển khai bài toán di truyền nêu trong vận dụng.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút), GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Giải.* Gọi K là biến cố: "Cây con nhận gene B từ bố"; H là biến cố: "Cây con nhận gene B từ mẹ"; F là biến cố: "Cây con có kiểu gene BB". Theo giả thiết, K và H độc lập nên $P(F) = P(K) \cdot P(H).$ + Tính $P(K)$: Theo công thức xác suất toàn phần $P(K)=P(A)\cdot P(K\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(K\mid \overline{A}).$ (1) $P(K\|A)$ là xác suất để cây con nhận gene B từ bố với điều kiện bố có kiểu gene bb. Vậy $P(K \mid A) = 0.$

		$P(K \mid \overline{A})$ là xác suất để cây con nhận gene B từ bố với điều kiện bố có kiểu gene Bb. Vậy $P(K \mid \overline{A}) = \frac{1}{2}$. Thay vào (1) ta được $P(K) = 0,3$. + Tính $P(H)$: Tương tự $P(H) = 0,3$. Vậy $P(F) = P(K) \cdot P(H) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$. Vậy tỉ lệ cây con có kiểu gene BB là khoảng 9%. b) Gọi G là biến cố: "Cây con có kiểu gene Bb". Vì $\overline{G} = E \cup F$ và hai biến cố E, F xung khắc nên: $P(\overline{G}) = P(E) + P(F) = 0,49 + 0,09 = 0,58$. Vậy $P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - 0,58 = 0,42$. Vậy tỉ lệ cây con có kiểu gene Bb là khoảng 42%.

Tiết 3, 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. CÔNG THỨC BAYES		
Nêu vấn đề	Khởi động cho nhu cầu cần có công thức Bayes.	GV triển khai theo SGK.
HĐ2	Phân biệt $P(A \mid B)$ và $P(B \mid A)$.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 5 phút rồi chỉ định một HS trả lời. *Trả lời:* a) • $P(A \mid B)$ là xác suất để *ông M mắc bệnh hiểm nghèo X* với điều kiện *xét nghiệm cho kết quả là dương tính.* • $P(B \mid A)$ là xác suất để *xét nghiệm cho kết quả dương tính* với điều kiện *ông M mắc bệnh hiểm nghèo X.* b) $P(B \mid A) = 0,95$. Kết luận ông M có xác suất 0,95 mắc bệnh hiểm nghèo X là không đúng.

Khung kiến thức	Trình bày công thức Bayes và ý nghĩa của nó.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 2	Minh hoạ cách vận dụng công thức Bayes.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 4	Vận dụng công thức Bayes. Ví dụ 1 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Giải.* Gọi A là biến cố: "Chai rượu là rượu loại I". B là biến cố: "Ông Tùng xác nhận đây là rượu loại I". Bài toán yêu cầu tính $P(A \mid B)$. Áp dụng công thức Bayes ta có $P(A\mid B)=\dfrac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})}$. Ta cần xác định $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B\mid A)$ và $P(B\mid \overline{A})$. Ta có $P(A) = 0,3$; $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,3=0,7.$ $P(B \mid A)$ là xác suất để một chai rượu loại I được ông Tùng xác nhận là rượu loại I. Theo bài ra ta có $P(B \mid A) = 0,9$. $P(B\mid \overline{A})$ là xác suất để một chai rượu không phải loại I được ông Tùng xác nhận nhầm là rượu loại I. Theo bài ra ta có $P(B\mid \overline{A}) = 1 - 0,95 = 0,05$. Thay vào công thức Bayes ta được : $P(A\mid B)=\dfrac{0,3\cdot 0,9}{0,3\cdot 0,9+0,7\cdot 0,05}\approx 0,8852.$
Ví dụ 3	Giải quyết tình huống mở đầu Mục 2. Tính $P(A \mid B)$.	GV triển khai theo SGK.

Luyện tập 5	Tiếp tục để hoàn thành Ví dụ 3.	HS tự làm (trong 5 – 10 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Đáp số:* a) $p = 0{,}002$; b) $P(A\mid B) = \dfrac{0{,}002 \cdot 0{,}95}{0{,}002 \cdot 0{,}95 + 0{,}998 \cdot 0{,}01} \approx 0{,}16.$
Ví dụ 4	Vận dụng công thức Bayes trong chẩn đoán bệnh.	GV triển khai theo SGK.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập áp dụng công thức xác suất toàn phần: Bài tập 6.7, 6.8, 6.9, 6.10a.
- Bài tập áp dụng công thức Bayes: Bài tập 6.10b, 6.11.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.7. Gọi A là biến cố: "Máy bay xuất hiện ở vị trí X"; B là biến cố: "Máy bay bị bắn rơi".

Ta có $P(A) = 0{,}55$ và $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

Nếu máy bay xuất hiện tại X thì có hai quả tên lửa bắn lên. $P(B \mid A)$ là xác suất để máy bay rơi khi có hai quả tên lửa bắn lên.

Ta tính xác suất của biến cố đối $P(\overline{B}\mid A)$: "Máy bay không rơi khi có hai quả tên lửa bắn lên". $P(\overline{B}\mid A) = (1-0{,}8)\cdot(1-0{,}8) = 0{,}2^2 = 0{,}04$.

Vậy $P(B \mid A) = 1 - P(\overline{B}\mid A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

$P(B\mid\overline{A})$: Nếu máy bay xuất hiện tại Y thì có một quả tên lửa bắn lên. Máy bay rơi khi bị quả tên lửa này bắn trúng. Do đó $P(B\mid\overline{A}) = 0{,}8$.

Theo công thức xác suất toàn phần

$$P(B) = P(A)\cdot P(B\mid A) + P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A}) = 0{,}55\cdot 0{,}96 + 0{,}45\cdot 0{,}8 = 0{,}888.$$

6.8. Gọi A là biến cố: "Bắt được thỏ trắng từ chuồng II";

B là biến cố: "Sau đó bắt được thỏ trắng từ chuồng I".

Theo công thức xác suất toàn phần $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B\mid\overline{A}\right)$.

Ta có $P(A)=\dfrac{3}{10}$; $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$.

Nếu A xảy ra thì chuồng I có 5 thỏ đen và 11 thỏ trắng. Vậy $P(B\mid A)=\dfrac{11}{16}$.

Nếu A không xảy ra thì chuồng I có 6 thỏ đen và 10 thỏ trắng. Vậy $P\left(B\mid\overline{A}\right)=\dfrac{10}{16}$.

Vậy $\mathrm{P(B)}=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{11}{16}+\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{10}{16}=\dfrac{103}{160}$.

6.9. a) Gọi A là biến cố: "Linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn"; B là biến cố: "Linh kiện điện tử có dấu OTK". Ta cần tính P(B). Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})$.

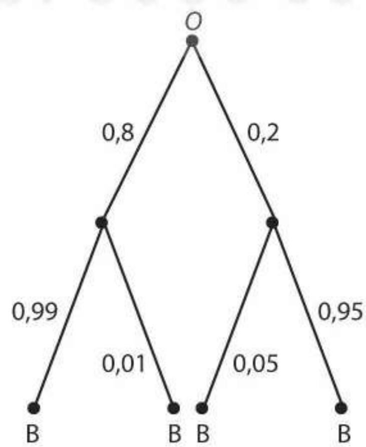
Theo giả thiết $P(A)=0{,}8$, do đó $P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}8=0{,}2$.

Tính $P(B\mid A)$: Đây là xác suất để linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn có dấu OTK. Theo giả thiết ta có $P(B\mid A)=0{,}99$.

Tính $P(B\mid\overline{A})$: Đây là xác suất để linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn có dấu OTK. Theo giả thiết nếu linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó không có dấu OTK với xác suất 0,95. Vậy nếu linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có dấu OTK với xác suất là $1-0{,}95=0{,}05$, suy ra $P(B\mid\overline{A})=0{,}05$.

Vậy $P(B)=0{,}8\cdot 0{,}99+0{,}2\cdot 0{,}05=0{,}802$.

b)



$P\left(\overline{B}\right)=0{,}8\cdot 0{,}01+0{,}2\cdot 0{,}95=0{,}198$.

6.10. a) Gọi A là biến cố: "Vận động viên thuộc đội I"; B là biến cố: "Vận động viên thuộc đội II"; E là biến cố: "Vận động viên đạt huy chương vàng". Ta có $B = \overline{A}$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(E) = P(A)\cdot P(E \mid A) + P(\overline{A})\cdot P(E \mid \overline{A}).$$

$$P(A) = \frac{5}{12},\ P(\overline{A}) = P(B) = \frac{7}{12}.$$

$P(E \mid A)$ à xác suất để vận động viên thuộc đội I đạt huy chương vàng. Theo bài ra ta có $P(E \mid A) = 0{,}65$.

$P(E \mid \overline{A})$ là xác suất để vận động viên thuộc đội II đạt huy chương vàng. Theo bài ra ta có $P(E \mid \overline{A}) = 0{,}55$.

Thay vào ta được $P(E) = \dfrac{5}{12}\cdot 0{,}65 + \dfrac{7}{12}\cdot 0{,}55 \approx 0{,}5917$.

b) Theo công thức Bayes và câu a, ta có

$$P(A \mid E) = \frac{P(A)\cdot P(E \mid A)}{P(E)} \approx \frac{\frac{5}{12}\cdot 0{,}65}{0{,}5917} \approx 0{,}4577.$$

6.11. a) Gọi A là biến cố: "Thư đó là thư rác"; B là biến cố: "Thư đó bị chặn".

Ta có $P(A) = 0{,}03$; $P(\overline{A}) = 0{,}97$; $P(B \mid A) = 0{,}95$; $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}01$.

Ta phải tính $P(A \mid B)$. Công thức Bayes cho ta

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)\cdot P(B \mid A)}{P(A)\cdot P(B \mid A) + P(\overline{A})\cdot P(B \mid \overline{A})} = \frac{0{,}03\cdot 0{,}95}{0{,}03\cdot 0{,}95 + 0{,}97\cdot 0{,}01} \approx 0{,}746.$$

b) Ta phải tính $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

Ta có $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}1 \Rightarrow P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}9$; $P(B \mid A) = 0{,}95 \Rightarrow P(\overline{B} \mid A) = 0{,}05$.

Công thức Bayes cho ta

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A})\cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})}{P(\overline{A})\cdot P(\overline{B} \mid \overline{A}) + P(A)\cdot P(\overline{B} \mid A)} = \frac{0{,}97\cdot 0{,}9}{0{,}97\cdot 0{,}9 + 0{,}03\cdot 0{,}05} \approx 0{,}998.$$

c) Từ câu a, ta thấy xác suất một thư là thư rác nếu biết rằng thư đó bị chặn là 0,746. Nghĩa là trong số các thư bị chặn có khoảng 74,6% thư rác. Vậy trong số các thư bị chặn có 100% – 74,6% = 25,4% là thư đúng.

Từ câu b, ta thấy xác suất để đó là thư đúng nếu biết rằng thư đó không bị chặn là 0,998. Nghĩa là trong số các thư không bị chặn có khoảng 99,8% thư đúng. Vậy trong số các thư không bị chặn có 100% – 99,8% = 0,02% là thư rác.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

– GV hệ thống lại kiến thức lí thuyết (có thể chuẩn bị slide tổng kết kiến thức).

– Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở Bài tập cuối chương VI theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

A. Trắc nghiệm

6.12. Đáp án A. $P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

6.13. Đáp án D. $P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. $P(B\overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$.

6.14. Đáp án B. $P(B) = P(BA) + P(B\overline{A}) = \frac{2}{15} + \frac{3}{20} = \frac{17}{60}$.

6.15. Đáp án A. Gọi E là biến cố: "Chiếc kẹo thứ nhất là sô cô la đen"; F là biến cố: "Chiếc kẹo thứ hai là sô cô la đen".

Ta có $P(EF) = P(E) \cdot P(F \mid E)$;

$P(E) = \frac{6}{10}$; $P(F \mid E) = \frac{5}{9} \Rightarrow P(EF) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

6.16. Đáp án B. Gọi E là biến cố: "Chiếc kẹo thứ nhất là sô cô la trắng"; F là biến cố: "Chiếc kẹo thứ hai là sô cô la trắng".

Ta có $P(E) = \frac{4}{10}$; $P(F \mid E) = \frac{3}{9}$.

Vậy $P(EF) = P(E) \cdot P(F \mid E) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

6.17. Đáp án D.

Gọi E là biến cố: "Chiếc kẹo thứ nhất là sô cô la đen"; F là biến cố: "Chiếc kẹo thứ hai là sô cô la trắng".

Ta có $P(E)=\frac{6}{10}$; $P(F\mid E)=\frac{4}{9}$.

Vậy $P(EF)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$.

B. Tự luận

6.18. Gọi E là biến cố: "Người đó dùng thuốc X", F là biến cố: "Người đó khỏi bệnh".

$P(E)=\frac{2\,400}{4\,000}$; $P(F)=\frac{2\,800}{4\,000}$.

$P(EF)=\frac{1\,600}{4\,000}$; $P(\overline{E}F)=\frac{1\,200}{4\,000}$.

a) $P(F\mid E)=\frac{P(EF)}{P(E)}=\frac{1\,600}{2\,400}=\frac{2}{3}$.

b) $P(\overline{E}\mid F)=\frac{P(\overline{E}F)}{P(F)}=\frac{1\,200}{2\,800}=\frac{3}{7}$.

6.19. Gọi A là biến cố: "Học sinh đó học khá môn Toán",

B là biến cố: "Học sinh đó học khá môn Vật lí".

Từ bài ra ta có $P(A)=\frac{14}{25}$; $P(B)=\frac{16}{25}$; $P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{25}$.

a) Ta cần tính $P(AB)$. Ta có $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

Lại có $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$.

Vậy $P(AB)=\frac{14}{25}+\frac{16}{25}-\frac{24}{25}=\frac{6}{25}$.

b) Cần tính $P(A\overline{B})$. Ta có $A=AB\cup A\overline{B}\Rightarrow P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

$\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{14}{25}-\frac{6}{25}=\frac{8}{25}$.

c) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$.

6.20. Gọi A là biến cố: "Người chơi chọn chuồng I",

B là biến cố: "Người chơi bắt được con gà mái".

$P(A)=\dfrac{1}{3}$; $P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{2}{3}$; $P(B|A)=\dfrac{5}{7}$; $P(B|\overline{A})=\dfrac{3}{8}$.

$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{55}{84}\approx 0,6548$.

6.21. Gọi A là biến cố: "Người đó có bệnh nền",

B là biến cố: "Người đó có phản ứng phụ sau tiêm".

Ta có $P(A)=0,18$; $P(\overline{A})=0,82$;

$P(B|A)=0,35$; $P(B|\overline{A})=0,16$.

Ta cần tính $P(A|B)$. Theo công thức Bayes ta có:

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})}=\frac{0,063}{0,1942}\approx 0,3244.$$

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Sử dụng được phần mềm GeoGebra để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số, đặc biệt đối với những hàm số phức tạp.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Phần mềm GeoGebra cung cấp chức năng tính toán hiệu quả trên các hàm số: tính đạo hàm (cả cấp một và cấp cao); tìm cực trị; tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có); tìm các đường tiệm cận (nếu có) và vẽ đồ thị của hàm số. Do đó, có thể sử dụng GeoGebra để khảo sát các tính chất của hàm số, tính toán và vẽ đồ thị của hàm số, nhất là trong những trường hợp phức tạp.
- Vì câu lệnh Tiếng Việt không nhất quán ở từng phiên bản của GeoGebra nên trong SGK Toán 12 chúng tôi trình bày các câu lệnh Tiếng Anh. GV cũng nên khuyến khích HS sử dụng câu lệnh Tiếng Anh vì vừa ngắn gọn, gợi nghĩa, lại nhất quán. Tuy nhiên, để thuận lợi cho những HS chưa thành thạo Tiếng Anh, SGK có đưa ra chú ý về các câu lệnh Tiếng Việt tương ứng (nhưng GV cần lưu ý cho HS là cú pháp lệnh Tiếng Việt có thể khác nhau tuỳ phiên bản GeoGebra và hỗ trợ các em khi cần).
- Chuẩn bị: Chuẩn bị máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

- Phân bổ thời gian: 2 tiết.

– Thực hiện:

+ HS thực hành trên máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet để dùng phiên bản GeoGebra online. Ở những trường có điều kiện, nên thực hành tại phòng máy tính.

+ HS thực hiện lại theo gợi ý ở các ví dụ mẫu trong sách, sau đó có thể thực hiện yêu cầu tương ứng trong phần thực hành hoặc tự thực hành.

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN, ĐÁP ÁN
1. Tính đạo hàm của hàm số	Giới thiệu các câu lệnh tính đạo hàm của hàm số.	GV lưu ý HS cách nhập lệnh và trợ giúp các em khi cần.
2. Tìm cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số	Giới thiệu các câu lệnh tìm cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.	GV lưu ý HS cách nhập lệnh và trợ giúp các em khi cần.
3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số	Giới thiệu câu lệnh tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.	GV lưu ý cho HS cách đọc kết quả.
4. Vẽ đồ thị hàm số	Giới thiệu câu lệnh vẽ đồ thị hàm số.	Để vẽ đồ thị hàm số, ta chỉ cần nhập hàm số vào ô lệnh, phần mềm sẽ tự động vẽ. Tuy nhiên, lưu ý cho HS là đối với hàm phân thức, cần dùng câu lệnh tìm và vẽ thêm các tiệm cận để có hình ảnh trực quan, chính xác hơn về đồ thị hàm số. Cũng lưu ý là chương trình chỉ yêu cầu vẽ đồ thị của hàm số bậc ba và hàm phân thức đơn giản. Vì thế trong SGK phần lớn chỉ trình bày các ví dụ loại này, mặc dù phần mềm GeoGebra có thể hỗ trợ hiệu quả việc vẽ đồ thị của các hàm số phức tạp hơn.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

VẼ VECTƠ TỔNG CỦA BA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN BẰNG PHẦN MỀM GEOGEBRA (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Sử dụng được phần mềm GeoGebra để vẽ hình ba chiều.
- Nắm được quy tắc hình bình hành và quy tắc hình hộp trong phép cộng vectơ.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Chuẩn bị máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet;
- SGK hướng dẫn HS vẽ theo phiên bản GeoGebra Classic. GV chủ động có những điều chỉnh phù hợp nếu dùng các phiên bản khác.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

- Phân bổ thời gian: 1 tiết.
- Thực hiện: HS thực hành trên máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet để dùng phiên bản GeoGebra online. Ở những trường có điều kiện, nên thực hành tại phòng máy tính.

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN, ĐÁP ÁN
Vẽ vectơ tổng của ba vectơ có chung gốc cho trước	Với bốn điểm A, B, C, D cho trước trong không gian $Oxyz$, HS cần xác định điểm F sao cho: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.	GV lưu ý HS cách nhập lệnh theo hướng dẫn trong SGK và trợ giúp các em khi cần.

ĐỘ DÀI GANG TAY (GANG TAY CỦA BẠN DÀI BAO NHIÊU?) (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Thực hiện được hoạt động thu thập số liệu ghép nhóm khi việc thu thập chính xác số liệu có thể gặp khó khăn.

– So sánh số trung bình, độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu ghép nhóm để rút ra một số kết luận.

2. Về năng lực, phẩm chất

– Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ thống kê để giải quyết bài toán thực tiễn.

– Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Bài này tiếp tục nội dung phần hoạt động thực hành trải nghiệm với số liệu ghép nhóm ở lớp 11. Việc đo độ dài gang tay như đã mô tả ở mục 1. có thể khó để xác định chính xác số đo, việc đưa ra các khoảng có sẵn trong phiếu giúp việc thu thập dữ liệu nhanh chóng và tiện lợi.

– Trường hợp có những số đo nằm ngoài phạm vi các nhóm trong phiếu, GV có thể bổ sung thêm các nhóm cho thích hợp.

– GV cũng có thể thay đổi độ rộng của các nhóm, chẳng hạn sử dụng các nhóm: [16; 18), [18; 20),...; lưu ý rằng số nhóm không nên quá ít hay quá nhiều.

– GV có thể lựa chọn một đặc điểm khác để thu thập dữ liệu, chẳng hạn: độ dài sải tay, độ dài bàn chân, độ rộng bước chân, thành tích nhảy xa,...

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài học có thể được tiến hành trong 2 tiết, cụ thể như sau:

– Tiết 1: Thực hiện HĐ1, HĐ2, HĐ3;

– Tiết 2: Thực hiện HĐ4, HĐ5.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Đưa ra bài toán thực tế cho HS.	Phụ nữ, trẻ em, những người có gang tay nhỏ gặp khó khăn hơn khi chơi đàn piano với bàn phím kích thước tiêu chuẩn.
HĐ1. Thu thập dữ liệu	Thu thập dữ liệu về độ dài gang tay trên hai nhóm HS nam và nữ.	GV phát phiếu khảo sát và hướng dẫn HS đo độ dài gang tay. GV hướng dẫn HS lưu dữ liệu vào bảng 1 dựa trên kết quả đo của từng em trong mỗi nhóm.
HĐ2, HĐ3	Tóm tắt và trình bày dữ liệu bằng bảng thống kê, biểu đồ, và các số đo: số trung bình, phương sai.	GV yêu cầu HS lập bảng tần số ghép nhóm, vẽ biểu đồ tần số minh hoạ và tính số đo số trung bình, phương sai của dữ liệu thu được trên hai nhóm HS nam và nữ đã thu được hoặc thực hiện trên số liệu đã cho trong HĐ4.
HĐ4	Thực hiện HĐ3 trên số liệu có sẵn. Thay thế HĐ3 nếu cần thiết.	Tương tự HĐ3.

Kết quả thực hiện HĐ4 như sau:

1. Bảng tần số

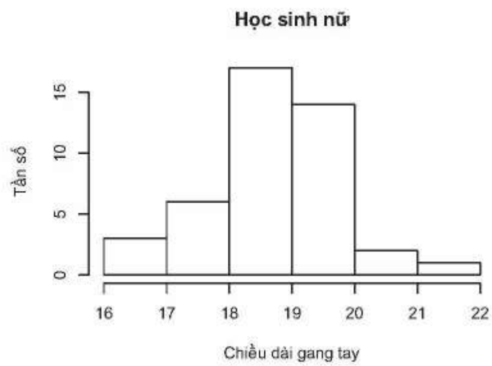
Chiều dài gang tay	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)	[21; 22)
Tần số	3	6	17	14	2	1

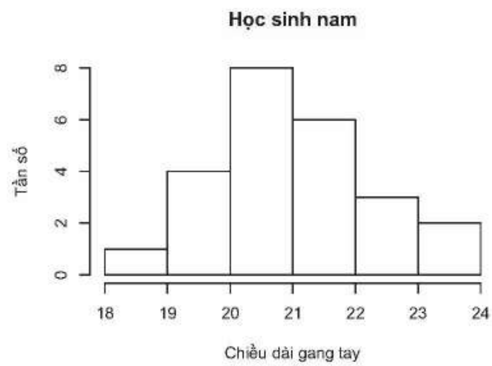
Bảng 1. Bảng tần số thống kê chiều dài gang tay của HS nữ

Chiều dài gang tay	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)	[21; 22)	[22; 23)	[23; 24)
Tần số	1	4	8	6	3	2

Bảng 2. Bảng tần số thống kê chiều dài gang tay của HS nam

2. Biểu đồ





3. Số trung bình, phương sai

	Trung bình	Phương sai	Hệ số biến thiên
Học sinh nữ	18,71	1,10	17,84
Học sinh nam	21,00	1,58	16,71

Nhận xét: Trong số các HS được khảo sát ta thấy độ dài gang tay của HS nam lớn hơn so với HS nữ nhưng biến động ít hơn.

Tiết 2

GV hướng dẫn HS thực hành trên phần mềm bảng tính, sử dụng số liệu đã cho ở HĐ4 hoặc trên một tập số liệu đã được chuẩn bị trước.

3. Gợi ý khác

- GV có thể chia lớp học ra các nhóm, gợi ý cho mỗi nhóm HS chọn một đặc điểm trên đối tượng nhất định, thu thập dữ liệu và thực hiện những phân tích tương tự, sau đó yêu cầu HS trình bày kết quả.
- Phân bổ thời gian: 2 tiết

  +Tiết 1: Nêu các gợi ý cho HS tự thu thập hoặc lấy dữ liệu từ nguồn có sẵn, hướng dẫn thực hành trên phần mềm bảng tính.

  +Tiết 2: Các nhóm HS trình bày các nội dung sau:

1. Mô tả dữ liệu, nguồn lấy dữ liệu.
2. Bảng tần số .
3. Biểu đồ.
4. Các số đo và nhận xét, đề xuất nếu có.

TÍNH NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH THANG (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Sử dụng được phần mềm GeoGebra để tính nguyên hàm và tích phân.
- Biết dùng phương pháp hình thang để tính gần đúng tích phân trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân cho dưới dạng bảng hoặc không có nguyên hàm dưới dạng hàm số sơ cấp.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Phần mềm GeoGebra cung cấp chức năng tính toán hiệu quả nguyên hàm và tích phân.
- Có nhiều phương pháp để tính gần đúng tích phân, nhưng ở trong SGK Toán 12 chúng tôi chọn phương pháp hình thang vì nó đơn giản, phù hợp với nhận thức của HS phổ thông và thể hiện rõ ý nghĩa hình học của tích phân.
- Vì câu lệnh tiếng Việt không nhất quán ở từng phiên bản của GeoGebra nên trong SGK Toán 12 chúng tôi trình bày các câu lệnh tiếng Anh. GV cũng nên khuyến khích HS sử dụng câu lệnh tiếng Anh vì vừa ngắn gọn, gợi nghĩa và nhất quán. Tuy nhiên, để thuận lợi cho những HS không dùng được tiếng Anh, SGK có đưa ra chú ý về các câu lệnh tiếng Việt tương ứng (nhưng GV cần lưu ý cho HS là cú pháp lệnh tiếng Việt có thể khác nhau tuỳ phiên bản GeoGebra và hỗ trợ các em khi cần).
- Chuẩn bị:

  + Máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

  + Máy tính cầm tay.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

- Phân bổ thời gian: 01 tiết.
- Thực hiện: HS thực hành trên máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet để dùng phiên bản GeoGebra online. Ở những trường có điều kiện, nên thực hành tại phòng máy tính.

CẤU PHẦN	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN, ĐÁP ÁN
1. TÍNH NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA		
Các câu lệnh	Giới thiệu các câu lệnh tính nguyên hàm và tích phân của hàm số.	– GV lưu ý HS cách nhập lệnh và trợ giúp các em khi cần. – HS thực hiện lại theo gợi ý ở ví dụ mẫu trong sách, sau đó có thể thực hiện yêu cầu tương ứng trong phần Thực hành 1 hoặc tự thực hành.
2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH THANG		
Phương pháp hình thang	Giới thiệu phương pháp hình thang tính gần đúng tích phân.	GV trình bày nội dung của phương pháp, ý nghĩa hình học của phương pháp, đánh giá sai số và thuật toán.
Ví dụ	Rèn luyện kĩ năng tính gần đúng tích phân với độ chính xác cho trước bằng phương pháp hình thang.	GV trình bày mẫu cho HS và làm rõ các bước làm để HS nắm được thuật toán.
Thực hành 2	Củng cố kĩ năng tính gần đúng tích phân với độ chính xác cho trước bằng phương pháp hình thang.	– HS làm việc tại lớp. – GV trợ giúp HS nếu cần. *HD.* Cách giải tương tự Ví dụ. 1. Ta có: $f(x)=\frac{e^x}{x}, f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x$, $f''(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x$. Có thể thấy rằng (chẳng hạn, dùng GeoGebra để vẽ đồ thị của hàm số $y=f''(x)$): $M=\max\limits_{x\in[1;2]}\lvert f''(x)\rvert \le e$. 2. Ta cần tìm n sao cho: $\frac{(2-1)^3\cdot e}{12n^2}<0{,}01\cdot\frac{1}{n^2}<\frac{12}{100e}\Leftrightarrow n>4$.

		Do đó ta chọn $n = 5$. 3. Chia đoạn [1; 2] thành 5 đoạn có độ dài bằng nhau là: $[1;1,2],[1,2;1,4],[1,4;1,6],[1,6;1,8],[1,8;2]$. Áp dụng công thức hình thang, ta có: $\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx \approx \frac{2-1}{10}\left[e+\frac{10e^{\frac{6}{5}}}{6}+\frac{10e^{\frac{7}{5}}}{7}+\frac{10e^{\frac{8}{5}}}{8}+\frac{10e^{\frac{9}{5}}}{9}+e^2\right]$ $\approx 3,063.$
Vận dụng	Vận dụng cách tính gần đúng tích phân để giải quyết một vấn đề thực tiễn.	Nếu không đủ thời gian trên lớp, có thể giao cho HS làm ở nhà. *HD.* Thể tích cần tính là $V = \int_0^{480} S(x)dx$, ở đó $S(x)$ là diện tích mặt cắt ngang tại vị trí cách đỉnh thân cây một khoảng x (cm). Sử dụng phương pháp hình thang để tính gần đúng tích phân này. Ta chia đoạn $[0;480]$ thành $n = 8$ đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài là 60. Do đó: $V \approx \frac{480-0}{2\cdot 8}\left[S(0)+2S(60)+2S(120)+2S(180)+2S(240)\right.$ $\left.+2S(300)+2S(360)+2S(420)+2S(480)\right]$ $=30\cdot 240+2\cdot 248+2\cdot 256$ $+2\cdot 260+2\cdot 264+2\cdot 272+2\cdot 298+2\cdot 316+2\cdot 320]$ $=125\,400\ (cm^3)=0,1254\ (m^3).$
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

VẼ ĐỒ HOẠ 3D VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Sử dụng được phần mềm GeoGebra để vẽ hình ba chiều.
- Mở rộng hiểu biết về các mặt trong không gian ba chiều, cầu thang bất khả, tam giác Penrose.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Chuẩn bị máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.
- SGK hướng dẫn HS vẽ theo phiên bản GeoGebra Classic. GV chủ động có những điều chỉnh phù hợp nếu dùng các phiên bản khác.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

- Phân bổ thời gian: 01 tiết.
- Thực hiện: HS thực hành trên máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet để dùng phiên bản GeoGebra online. Ở những trường có điều kiện, nên thực hành tại phòng máy tính.

CẤU PHẦN	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. Vẽ tam giác Penrose	Biết dùng phần mềm GeoGebra để vẽ hình 3D.	GV lưu ý HS cách nhập lệnh theo hướng dẫn trong SGK và trợ giúp các em khi cần.
2. Vẽ mặt Mobius	Biết dùng phần mềm GeoGebra để vẽ hình 3D.	– GV lưu ý HS cách nhập lệnh theo hướng dẫn trong SGK và trợ giúp các em khi cần. – GV có thể cho HS tạo dựng mặt Mobius từ một mảnh giấy hình chữ nhật theo cách đã được nêu trong SGK.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM (2 TIẾT)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống hoá kiến thức lí thuyết (có thể chuẩn bị slide tổng kết kiến thức).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở Bài tập cuối năm theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

A. Trắc nghiệm

1. D	**2.** B	**3.** D	**4.** B	**5.** D	**6.** A
7. B	**8.** B	**9.** B	**10.** C	**11.** A	**12.** B
13a. B	**13b.** A	**14.** A	**15.** B		

Hướng dẫn giải

2. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Ta có $y(2) = 7$, $y(3) = 6$, $y(4) = \dfrac{19}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn [2; 4] là 7, đạt được khi $x = 2$.

3. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 0$ và 2 tiệm cận ngang là $y = 1$, $y = -1$. Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

6. Ta có $f(x) = \int (2\sin x + 1)\mathrm{d}x = -2\cos x + x + C$.

Mà $f(0) = 1$ nên $C = 3$. Khi đó $f(x) = -2\cos x + x + 3$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\cos x + x + 3)\mathrm{d}x = \left(-2\sin x + \dfrac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2 + 12\pi - 16}{8}$.

8. Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là: $V = \pi\int_0^4 \left(2\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = 4\pi\int_0^4 x\mathrm{d}x = 2\pi x^2 \Big|_0^4 = 32\pi.$

14. Gọi A là biến cố: "Người đó thích uống trà"; B là biến cố: "Người đó thích uống cà phê".

$n(B) = 17$ nên $P(B) = \dfrac{17}{25}$.

AB là biến cố: "Ông đó thích cả cà phê và trà" nên $n(AB) = 9$. Suy ra $P(AB) = \dfrac{9}{25}$.

Vậy $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{9}{17}$.

15. Gọi A là biến cố "Em đó đăng kí thi ngành Kinh tế"; B là biến cố "Em đó đăng kí thi ngành Luật". Ta có $P(A) = \dfrac{22}{40}$; $P(B) = \dfrac{25}{40}$; $P\left(\overline{AB}\right) = \dfrac{3}{40}$.

Biến cố $A \cup B$: "Em đó thi ngành Luật hoặc ngành Kinh tế" là biến cố đối của biến cố: "Em đó không đăng kí thi cả hai ngành Luật và Kinh tế".

Từ đó $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{AB}\right) = 1 - \dfrac{3}{40} = \dfrac{37}{40}$.

Suy ra $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{22}{40} + \dfrac{25}{40} - \dfrac{37}{40} = \dfrac{10}{40}$.

Từ đó $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$.

B. Tự luận

16. a) Ta có $y = x^3 - 3x^2$.

+ Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

+ Sự biến thiên:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $f'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(0; 2)$, $f'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại của hàm số $y_{CĐ} = 0$.

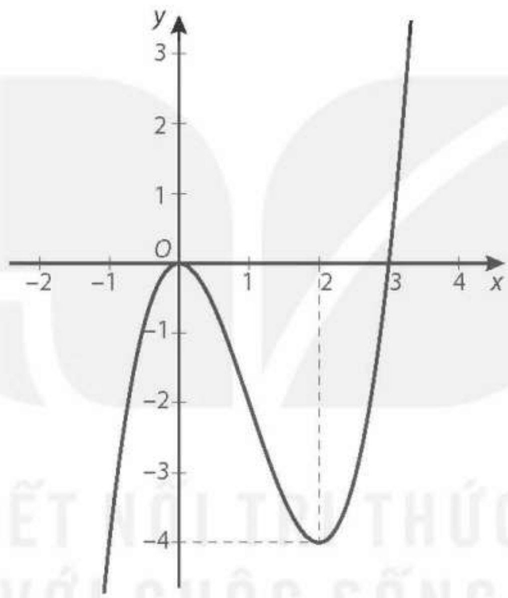
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu của hàm số $y_{CT} = -4$.

Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right)=-\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

+ Đồ thị: Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 0) và cắt trục hoành tại các điểm (0; 0) và (3; 0). Đồ thị có tâm đối xứng là điểm (1; –2).



b) Ta có $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

+ Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

+ Sự biến thiên:

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq-2$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

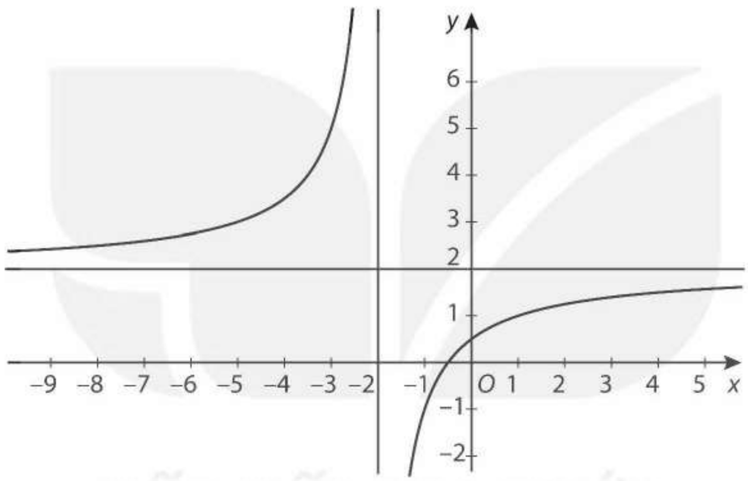
Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=2$; $\lim\limits_{x\to-2^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} y=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

+ Đồ thị: Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, cắt trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(-2;2)$.



c) Ta có $y=\frac{2x^2+x-2}{x-1}=2x+3+\frac{1}{x-1}$.

+ Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

+ Sự biến thiên:

Ta có $y'=\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};1\right)$ và $\left(1;\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $y_{CĐ}=5-2\sqrt{2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, $y_{CT}=5+2\sqrt{2}$.

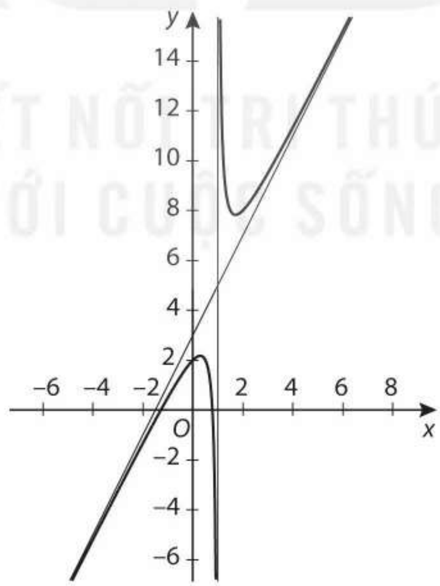
Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$; tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$5-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

+ Đồ thị: Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;8)$, $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $I(1;5)$.



17. a) Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}.\left(x^2+1\right)}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $y(1)=\sqrt{2};\ y(-1)=0; y(2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [−1; 2] là 0 đạt được khi $x=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn [−1; 2] là $\sqrt{2}$ đạt được khi $x=1$.

b) Tập xác định của hàm số là [−1; 1].

Ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1);\ y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $y(-1)=-1;\ y(1)=1;\ y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}.$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$ đạt được khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 đạt được khi $x=-1$.

18. a) Đổi 54 km/h = 15 m/s.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc là $v(t)=15-10t\ (\text{m/s})$.

Khi ô tô dừng lại thì $v=0$, khi đó $15-10t=0\Leftrightarrow t=1{,}5\ (\text{s})$.

Vậy sau khi đạp phanh 1,5 giây thì ô tô dừng lại.

b) Giả sử $v_0\ (\text{m/s})$ là vận tốc của ô tô ngay trước khi đạp phanh. Khi đó vận tốc của ô tô sau khi đạp phanh là $v(t)=v_0-10t$. Ô tô sẽ dừng lại khi $v(t)=0$, tức là khi $t=\dfrac{v_0}{10}$.

Quãng đường ô tô đi được kể từ khi đạp phanh đến khi dừng lại là $s=\displaystyle\int_0^{\frac{v_0}{10}} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Theo đề bài ta có:

$$20\ge\int_0^{\frac{v_0}{10}} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{v_0}{10}}(v_0-10t)\,\mathrm{d}t=\left(v_0t-5t^2\right)\Big|_0^{\frac{v_0}{10}}=\frac{v_0^2}{20}\Rightarrow v_0\le 20.$$

Vậy nếu ô tô dừng lại 20m sau khi đạp phanh thì vận tốc lớn nhất của ô tô ngay trước lúc đạp phanh là 20 m/s, tức là 72 km/h.

19. Ta có $f(x)=\int\left(x-\dfrac{1}{x^2}+2\right)dx=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}+2x+C$.

Mà $f(1)=2$ nên $\dfrac{1}{2}+1+2+C=2 \Leftrightarrow C=-\dfrac{3}{2}$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}+2x-\dfrac{3}{2}$.

20. a) $I=\int\limits_0^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}=1.$

b) $I=\int\limits_0^1(2x-1)^3\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(8x^3-12x^2+6x-1\right)\mathrm{d}x=\left(2x^4-4x^3+3x^2-x\right)\Big|_0^1=0.$

c) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(3\sin x-\dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\left(-3\cos x-2\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}.$

d) $I=\int\limits_1^2\left(2e^x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(2e^x-\ln x\right)\Big|_1^2=2e^2-2e-\ln 2.$

21. Diện tích hình phẳng cần tìm là

$\int_{-2}^3\left|\left(x^2-1\right)-(x+5)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^3\left|x^2-x-6\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-2}^3\left(x^2-x-6\right)\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_{-2}^3=\dfrac{125}{6}.$

22. Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$V=\pi\int\limits_0^2\left(-x^2+2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{x^5}{5}-x^4+\dfrac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\dfrac{\pi}{15}.$

23. a) Ta có

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

b) Theo câu a và theo giả thiết thì $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ nên

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow AD\perp BC.$

24. a) Ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).$

b) Theo câu a ta có: $AG^2=\frac{4}{9}\left(AB^2+AD^2+AA'^2\right)=\frac{4}{3}a^2\Rightarrow AG=\frac{2\sqrt{3}a}{3}.$

25. Mặt phẳng (*P*) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(2;-2;-1)$ và cũng là một VTCP của đường thẳng *d* nên phương trình đường thẳng *d* là: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-2t\\z=1-t.\end{cases}$

26. a) Vì *d'* đi qua *A* và song song với *d* và *d* có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;2)$ nên phương trình đường thẳng *d'* là: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}.$

b) Đường thẳng *d* đi qua $B(2;3;-1)$, ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;-3)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;2)$ nên một VTPT của mặt phẳng (*P*) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=-(2;9;8)$. Phương trình mặt phẳng (*P*) là:

$2(x+1)+9(y-1)+8(z-2)=0\Leftrightarrow 2x+9y+8z-23=0.$

27. a) Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;-2;3),\overrightarrow{OB}=(3;0;-1)$ nên một VTPT của mặt phẳng (*OAB*) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=2(1;5;3)$. Phương trình mặt phẳng (*OAB*) là $x+5y+3z=0.$

b) Ta tìm được toạ độ trung điểm là $I=(2;-1;1)$.

c) Ta có: *I* là trung điểm của *AB* nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}\right|=2MI.$

Vì *M* thuộc mặt phẳng (*Oxy*) nên để MI nhỏ nhất thì *M* là hình chiếu vuông góc của *I* trên mặt phẳng (*Oxy*) $\Rightarrow M=(2;-1;0)$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi $M=(2;-1;0)$.

28. Ta có $\overrightarrow{AS}=(1;1;4),\overrightarrow{BS}=(-1;2;3)$.

Phương trình đường thẳng AS là $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1+4t\end{cases}$.

Phương trình đường thẳng BS là $\begin{cases}x=3-u\\y=1+2u\\z=2+3u\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z=0$

$$\Rightarrow A'=\left(\frac{3}{4};\frac{7}{4};0\right),B'=\left(\frac{11}{3};-\frac{1}{3};0\right)\Rightarrow A'B'=\frac{5\sqrt{74}}{12}\approx 3,6.$$

29. Cỡ mẫu là $n=2+30+120+50+1=203$. Ta có $\frac{n}{4}=50,75$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm [10; 12). Ta có: $Q_1=10+\left[\frac{50,75-2}{60}\right]\cdot 2=11,625$.

Ta có $\frac{3n}{4}=152,25$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ hai là nhóm [14; 16).

Ta có: $Q_1=14+\left[\frac{152,25-152}{50}\right]\cdot 2=14,01$.

Do đó, khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q=14,01-11,625=2,385$.

30. Gọi B là biến cố: "Bình bắt được gà mái của chuồng I"; C là biến cố: "Bình bắt được gà mái". Ta cần tính $P(B|C)$.

Ta có $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}$.

Vì B là biến cố: "Bình bắt được gà mái của chuồng I" nên $P(C|B)=1$.

Suy ra $P(B|C)=\frac{P(B)}{P(C)}$.

+ Tính $P(B)$. Khi Bình bắt ngẫu nhiên một con gà từ chuồng I thì chuồng I có 22 con gà với 13 gà mái của chuồng I. Vậy $P(B)=\frac{13}{22}$.

+ Tính $P(C)$. Gọi A là biến cố: "An bắt được gà mái ". Theo công thức xác suất toàn phần ta có $P(C)=P(A)P(C\mid A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(C\mid\overline{A}\right)$.

Ta có $P(A)=\frac{6}{16}$; $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$.

Nếu A xảy ra thì chuồng I có 22 con gà với 8 gà trống, 14 gà mái.

Vậy $P(C\mid A)=\frac{14}{22}$.

Nếu A không xảy ra thì thì chuồng I có 22 con gà với gà trống và 13 gà mái.

Vậy $P\left(C\mid\overline{A}\right)=\frac{13}{22}$.

Thay vào ta được $P(C)=P(A)P(C\mid A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(C\mid\overline{A}\right)=\frac{6}{16}\cdot\frac{14}{22}+\frac{10}{16}\cdot\frac{13}{22}=\frac{214}{352}$.

Vậy $P(B\mid C)=\frac{P(B)}{P(C)}=\frac{13\cdot 352}{22\cdot 214}=\frac{208}{214}=\frac{104}{107}$.

31. Gọi A là biến cố: "Sơn chạy bộ buổi sáng"; B là biến cố: "Sơn ăn thêm một quả trứng trong bữa sáng".

Ta có $P(A)=\frac{3}{7}$, $P\left(\overline{A}\right)=\frac{4}{7}$, $P(B\mid A)=0{,}7$, $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0{,}25$.

Ta cần tính $P(A\mid B)$. Theo công thức Bayes ta có

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B\mid\overline{A}\right)}=\frac{2{,}1}{3{,}1}\approx 0{,}6774.$$

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn
các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG THỊ THANH – ĐỖ CHÂU GIANG – VŨ THỊ VÂN – LƯU THẾ SƠN
Thiết kế sách: TRẦN NGỌC LÊ
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: VŨ THỊ THANH TÂM – TẠ THỊ HƯỜNG – NGUYỄN DUY LONG
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

TOÁN 12 – SÁCH GIÁO VIÊN

Mã số: G1HGZT001H24

In .... cuốn (QĐ .... SLK), khổ 19 x 26,5cm.
In tại Công ty cổ phần in ....
Số ĐKXB: 02-2024/CXBIPH/76-2316/GD
Số QĐXB: .... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm 2024
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 2024.
Mã số ISBN: 978-604-0-39211-4

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO VIÊN LỚP 12 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 12, tập một – SGV
2. Ngữ văn 12, tập hai – SGV
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12 – SGV
4. Toán 12 – SGV
5. Chuyên đề học tập Toán 12 – SGV
6. Lịch sử 12 – SGV
7. Chuyên đề học tập Lịch sử 12 – SGV
8. Địa lí 12 – SGV
9. Chuyên đề học tập Địa lí 12 – SGV
10. Giáo dục kinh tế và pháp luật 12 – SGV
11. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12 – SGV
12. Vật lí 12 – SGV
13. Chuyên đề học tập Vật lí 12 – SGV
14. Hoá học 12 – SGV
15. Chuyên đề học tập Hoá học 12 – SGV
16. Sinh học 12 – SGV
17. Chuyên đề học tập Sinh học 12 – SGV
18. Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử – SGV
19. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử – SGV
20. Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản – SGV
21. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản – SGV
22. Tin học 12 – SGV
23. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng – SGV
24. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính – SGV
25. Mĩ thuật 12 – SGV
26. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 12 – SGV
27. Âm nhạc 12 – SGV
28. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12 – SGV
29. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 – SGV
30. Giáo dục thể chất 12 – Bóng chuyền – SGV
31. Giáo dục thể chất 12 – Bóng đá – SGV
32. Giáo dục thể chất 12 – Cầu lông – SGV
33. Giáo dục thể chất 12 – Bóng rổ – SGV
34. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12 – SGV
35. Tiếng Anh 12 – Global Success – SGV

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

ISBN 978-604-0-39211-4

9 786040 392114

Giá : 53.000 đ