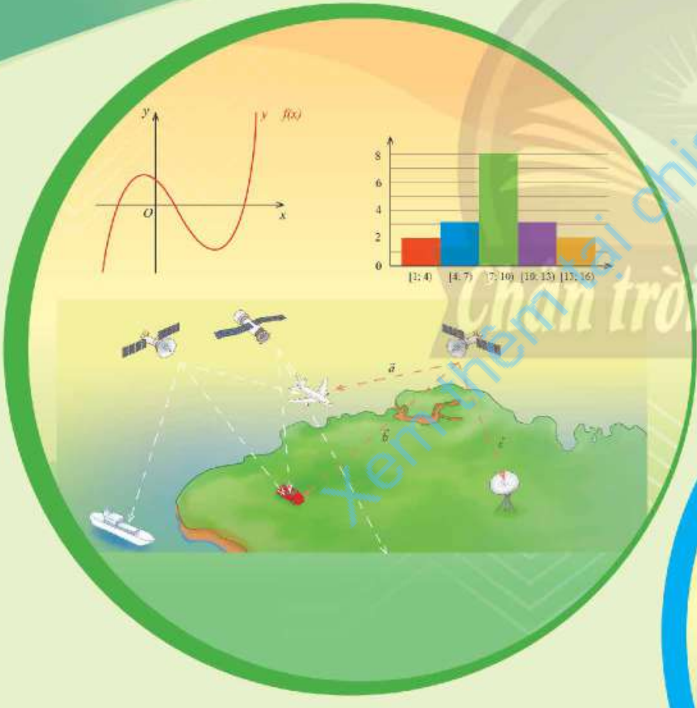
TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

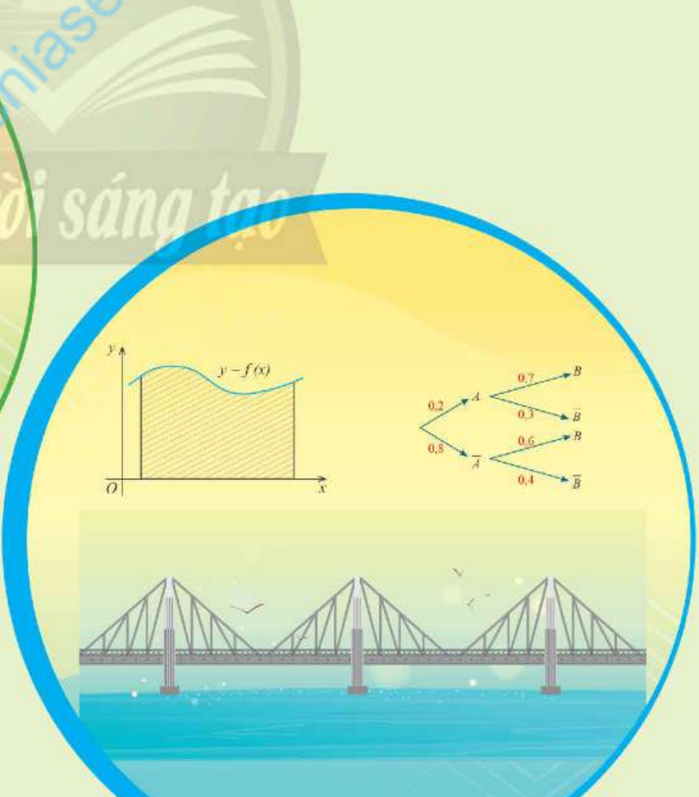
TOÁN

SÁCH GIÁO VIÊN

12

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG – NGÔ HOÀNG LONG
PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

TOÁN

SÁCH GIÁO VIÊN

12

Chân trời sáng tạo

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Lời nói đầu

Nhằm mục đích chia sẻ những ý tưởng cốt lõi và phương pháp giảng dạy hiệu quả với các đồng nghiệp sẽ giảng dạy môn Toán lớp 12 theo Chương trình Giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, các tác giả sách giáo khoa Toán 12 đã biên soạn cuốn **Sách giáo viên Toán 12 (Chân trời sáng tạo)**.

Sách gồm hai phần:

Phần một giới thiệu về chương trình môn Toán lớp 12 và sách giáo khoa Toán 12 thuộc bộ sách Chân trời sáng tạo.

Phần hai trình bày các gợi ý và hướng dẫn dạy học từng bài theo sách giáo khoa.

Nếu như trong phần thứ nhất, chúng tôi trình bày thật cô đọng về chương trình để giúp quý thầy, cô nhanh chóng nắm bắt nội dung chương trình và các yêu cầu cần đạt, thì trong phần thứ hai, chúng tôi lại trình bày rất chi tiết các gợi ý và hướng dẫn cụ thể về cách dạy từng bài trong sách giáo khoa để quý thầy, cô có thêm thông tin tham khảo khi chuẩn bị bài giảng.

Để sử dụng sách giáo viên được hiệu quả, rất mong quý thầy, cô lưu ý một số điểm quan trọng sau:

1. Sách giáo viên là tài liệu tham khảo mang tính chất gợi ý cho giáo viên trong quá trình dạy học, giáo viên không nhất thiết phải theo các gợi ý này.

2. Nhiều gợi ý trong các hoạt động chỉ mang tính chỉ báo về mặt nội dung cần đạt được, giáo viên nên chủ động lựa chọn phương pháp và hình thức tổ chức học tập nhằm đạt hiệu quả.

3. Số tiết đối với mỗi bài chỉ là dự kiến, tuỳ tình hình cụ thể của lớp học, giáo viên có thể điều chỉnh cho phù hợp.

4. Mỗi tiết Toán thường phát triển đầy đủ các năng lực đặc thù, tuy nhiên mức độ đối với từng năng lực có khác nhau. Tuỳ bài học, ta nên chú trọng những năng lực có điều kiện phát huy ở bài học đó.

5. Dựa vào sách giáo viên, người dạy nên sáng tạo, lựa chọn các giải pháp phù hợp với học sinh, điều kiện vật chất cũng như văn hoá vùng miền để hoạt động dạy học thực sự mang lại kết quả tốt đẹp.

Rất mong nhận được các ý kiến đóng góp, xây dựng để cuốn sách được sử dụng hiệu quả. Kính chúc quý thầy, cô thành công trong việc triển khai chương trình mới với sách giáo khoa Toán 12 thuộc bộ sách Chân trời sáng tạo.

Các tác giả

MỤC LỤC

Phần một

GIỚI THIỆU VỀ CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA MÔN TOÁN LỚP 12

Phần hai

HƯỚNG DẪN DẠY HỌC THEO SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 12 (Chân trời sáng tạo)

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

TẬP HAI

Phần Một số yếu tố Giải tích

Phần Hình học và Đo lường

Phần Thống kê và Xác suất

Hoạt động thực hành và trải nghiệm

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Phần một

GIỚI THIỆU VỀ CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA MÔN TOÁN LỚP 12

A. GIỚI THIỆU VỀ CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN LỚP 12

1. Mục tiêu dạy học

Môn Toán lớp 12 nhằm giúp học sinh (HS) đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

a) Góp phần hình thành và phát triển năng lực toán học với yêu cầu cần đạt:

– Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề;

– Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để hiểu được những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề;

– Thiết lập được mô hình toán học để mô tả tình huống, từ đó đưa ra cách giải quyết vấn đề toán học đặt ra trong mô hình được thiết lập;

– Thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề và đánh giá được giải pháp đã thực hiện, phản ánh được giá trị của giải pháp, khái quát hoá được cho vấn đề tương tự;

– Sử dụng được công cụ, phương tiện học toán trong học tập, khám phá và giải quyết vấn đề toán học.

b) Có những kiến thức và kĩ năng toán học cơ bản, thiết yếu về:

– *Một số yếu tố Giải tích:* Ứng dụng được đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số. Nhận biết được định nghĩa và các tính chất của nguyên hàm và tích phân. Tính được nguyên hàm và tích phân trong những trường hợp đơn giản. Sử dụng được tích phân để tính diện tích của một số hình phẳng, thể tích của một số hình khối. Vận dụng được nguyên hàm và tích phân để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

– *Hình học và Đo lường:* Cung cấp những kiến thức và kĩ năng về các quan hệ hình học vectơ và hệ tọa độ trong không gian; giải quyết một số vấn đề thực tiễn liên quan đến phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu trong không gian.

– *Thống kê và Xác suất:* Giúp HS tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm như khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn. Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn. Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện. Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc. Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê, xác suất với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.

c) Góp phần giúp HS có những hiểu biết tương đối tổng quát về các ngành nghề gắn với môn Toán và giá trị của nó; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau Trung học phổ thông; có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong suốt cuộc đời.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. Nội dung cụ thể và yêu cầu cần đạt

CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN LỚP 12

Nội dung		Yêu cầu cần đạt
MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH		
Một số yếu tố giải tích		
Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số	*Tính đơn điệu của hàm số*	– Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu của đạo hàm cấp một của nó. – Thể hiện được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên. – Nhận biết được tính đơn điệu, điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.
	Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	– Nhận biết được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước. – Xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.
	Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số	– Nhận biết được hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. – Mô tả được sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị). – Khảo sát được tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$; $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0$, $ad - bc \neq 0)$; $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu). – Nhận biết được tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

	Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn	Vận dụng được đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn.
Nguyên hàm. Tích phân	*Nguyên hàm. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp*	– Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số. – Giải thích được tính chất cơ bản của nguyên hàm. – Xác định được nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp như: $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \neq -1)$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; $y = a^x$; $y = e^x$ – Tính được nguyên hàm trong những trường hợp đơn giản.
	Tích phân. Ứng dụng hình học của tích phân	– Nhận biết được định nghĩa và các tính chất của tích phân. – Tính được tích phân trong những trường hợp đơn giản. – Sử dụng được tích phân để tính diện tích của một số hình phẳng, thể tích của một số hình khối. – Vận dụng được tích phân để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.
Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)		
– Sử dụng phần mềm để hỗ trợ việc học các kiến thức đại số và giải tích. – Thực hành sử dụng phần mềm để vẽ các đồ thị; minh hoạ sự tương giao của các đồ thị; thực hiện các phép biến đổi đồ thị; tạo hoa văn, hình khối. – Thực hành sử dụng phần mềm để tạo mô hình khối tròn xoay trong một số bài toán ứng dụng tích phân xác định.		
HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG		
Hình học không gian		
Phương pháp toạ độ trong không gian	*Toạ độ của vectơ đối với một hệ trục toạ độ. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ*	– Nhận biết được vectơ và các phép toán vectơ trong không gian (tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ).

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

		– Nhận biết được toạ độ của một vectơ đối với hệ trục toạ độ. – Xác định được độ dài của một vectơ khi biết toạ độ hai đầu mút của nó và biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ. – Xác định được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ. – Vận dụng được toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.
	Phương trình mặt phẳng	– Nhận biết được phương trình tổng quát của mặt phẳng. – Thiết lập được phương trình tổng quát của mặt phẳng trong hệ trục toạ độ *Oxyz* theo một trong ba cách cơ bản: qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến; qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương (suy ra vectơ pháp tuyến nhờ vào việc tìm vectơ vuông góc với cặp vectơ chỉ phương); qua ba điểm không thẳng hàng. – Thiết lập được điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc với nhau. – Tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ. – Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt phẳng để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.
	Phương trình đường thẳng trong không gian	– Nhận biết được phương trình chính tắc, phương trình tham số, vectơ chỉ phương của đường thẳng trong không gian. – Thiết lập được phương trình của đường thẳng trong hệ trục toạ độ theo một trong hai cách cơ bản: qua một điểm và biết một vectơ chỉ phương, qua hai điểm. – Xác định được điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau. – Thiết lập được công thức tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng. – Vận dụng được kiến thức về phương trình đường thẳng trong không gian để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Xem thêm tại chinsetailieuhay.com

<table>
<tr><td></td><td>Phương trình mặt cầu</td><td>– Nhận biết được phương trình mặt cầu.
– Xác định được tâm, bán kính của mặt cầu khi biết phương trình của nó.
– Thiết lập được phương trình của mặt cầu khi biết tâm và bán kính.
– Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt cầu để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)</td></tr>
<tr><td colspan="3">– Sử dụng phần mềm để hỗ trợ việc học các kiến thức hình học.
– Thực hành sử dụng phần mềm để biểu thị điểm, vectơ, các phép toán vectơ trong hệ trục toạ độ Oxyz.
– Thực hành sử dụng phần mềm để vẽ đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong hệ trục toạ độ Oxyz; xem xét sự thay đổi hình dạng khi thay đổi các yếu tố trong phương trình của chúng.</td></tr>
<tr><td colspan="3">THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT</td></tr>
<tr><td colspan="3">Thống kê</td></tr>
<tr><td>Phân tích và xử lí dữ liệu</td><td>Các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm</td><td>– Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn.
– Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
– Chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.
– Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Xác suất</td></tr>
<tr><td>Khái niệm về xác suất có điều kiện</td><td>Xác suất có điều kiện</td><td>– Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện.
– Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.</td></tr>
</table>

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Các quy tắc tính xác suất	*Các quy tắc tính xác suất*	– Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ hình cây. – Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn. – Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.
Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)		
– Sử dụng phần mềm để hỗ trợ việc học các kiến thức thống kê và xác suất. – Thực hành sử dụng phần mềm để tính phân bố nhị thức, tính toán thống kê.		
HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM		
Nhà trường tổ chức cho học sinh một số hoạt động sau và có thể bổ sung các hoạt động khác tuỳ vào điều kiện cụ thể. *Hoạt động 1:* Thực hành ứng dụng các kiến thức toán học vào thực tiễn và các chủ đề liên môn, chẳng hạn: – Thực hành tổng hợp các hoạt động liên quan đến tính toán, đo lường, ước lượng và tạo lập hình. – Vận dụng kiến thức về phương pháp toạ độ trong hình học không gian để tìm hiểu hệ thống GPS, tìm hiểu về đồ hoạ, vẽ kĩ thuật và thiết kế trong Công nghệ. – Vận dụng kiến thức về đạo hàm để giải thích các quy luật của Vật lí (quy luật âm học, quang học), Hoá học và giải quyết bài toán tối ưu về kinh tế, thời gian, quãng đường, ... *Hoạt động 2:* Vận dụng các kiến thức toán học vào một số vấn đề liên quan đến tài chính. *Hoạt động 3:* Tổ chức các hoạt động ngoài giờ chính khoá: câu lạc bộ toán học; cuộc thi về Toán; dự án học tập; ra báo tường (hoặc nội san) về Toán, chẳng hạn: câu lạc bộ về ứng dụng toán học trong khoa học máy tính và công nghệ thông tin. *Hoạt động 4 (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện):* Tổ chức giao lưu học sinh giỏi Toán trong trường và trường bạn, giao lưu với các chuyên gia nhằm hiểu vai trò của Toán học trong thực tiễn và trong các ngành nghề, ...		

3. Thời lượng thực hiện chương trình và thời lượng dành cho các nội dung giáo dục

Theo quy định của chương trình, thời lượng cho môn Toán lớp 12 (không bao gồm chuyên đề học tập) là:

3 tiết/tuần × 35 tuần = 105 tiết.

Ước lượng thời gian (tính theo %) cho các mạch nội dung môn Toán lớp 12 như sau:

Mạch kiến thức	Một số yếu tố Giải tích	Hình học và Đo lường	Thống kê và Xác suất	Hoạt động thực hành và trải nghiệm
Ước lượng thời gian	44%	33%	14%	9%
Số tiết dự kiến	46	35	15	9

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

4. Phương pháp dạy học

Cần đổi mới phương pháp dạy học môn Toán theo các chú ý sau:

– Tổ chức quá trình dạy học theo hướng kiến tạo phù hợp với tiến trình nhận thức, năng lực nhận thức, cách thức học tập khác nhau của từng cá nhân HS, tạo điều kiện giúp người học phát huy tính tích cực, độc lập, phát triển các năng lực chung và năng lực toán học.

– Vận dụng một cách linh hoạt các phương pháp, kĩ thuật dạy học tích cực.

– Kết hợp các hoạt động dạy học trong lớp và các hoạt động thực hành trải nghiệm.

– Khuyến khích sử dụng các phương tiện nghe nhìn, phương tiện kĩ thuật hiện đại hỗ trợ quá trình dạy học, đồng thời coi trọng việc sử dụng các phương pháp truyền thống.

– Sử dụng đa dạng các phương pháp dạy học theo tiến trình tổ chức cho HS hoạt động trải nghiệm, khám phá, phát hiện. Tiến trình đó bao gồm các bước chủ yếu:

Trải nghiệm – Hình thành kiến thức mới – Thực hành, luyện tập – Vận dụng.

– Cần tổ chức cho HS được tham gia các hoạt động thực hành, ứng dụng các kiến thức toán học vào thực tiễn và các hoạt động ngoài giờ chính khoá liên quan đến ôn tập, củng cố các kiến thức cơ bản.

– GV cần căn cứ vào đặc điểm của HS, điều kiện, hoàn cảnh cụ thể khi dạy học để tiến hành những điều chỉnh hoặc bổ sung cụ thể về nội dung, phương pháp và hình thức tổ chức dạy học. Tuy nhiên việc điều chỉnh phải trên cơ sở đảm bảo yêu cầu cần đạt của chương trình môn Toán.

5. Đánh giá kết quả học tập

Đánh giá năng lực HS thông qua các bằng chứng thể hiện kết quả đạt được trong quá trình thực hiện các hoạt động học.

– Cần vận dụng kết hợp một cách đa dạng nhiều hình thức đánh giá (đánh giá thường xuyên, đánh giá định kì) nhiều phương pháp đánh giá (quan sát, ghi lại quá trình thực hiện, vấn đáp, trắc nghiệm khách quan, tự luận, bài thực hành, các dự án/sản phẩm học tập, …).

– GV nên giao cho HS những mục tiêu và nhiệm vụ học tập cụ thể được điều chỉnh từ yêu cầu của sách giáo khoa (SGK) để hoạt động học phù hợp với nhịp độ tiếp thu và trình độ nhận thức của HS.

– GV nên thiết lập một bảng các yêu cầu cần đạt sau khi học mỗi đơn vị kiến thức để HS có thể biết và tự đánh giá kết quả học tập.

– Khi kết thúc một chủ đề hoặc một chương, GV có thể tổ chức kiểm tra, đánh giá kết quả học tập của HS và điều chỉnh cách dạy của mình.

B. GIỚI THIỆU VỀ SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 12 (CHÂN TRỜI SÁNG TẠO)

1. Một số đặc điểm chung

Sách giáo khoa Toán 12 thuộc bộ sách Chân trời sáng tạo được Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xuất bản theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Trong cuốn sách này, ba mạch kiến thức: **Một số yếu tố Giải tích, Hình học và Đo lường, Thống kê và Xác suất** được trình bày thành 6 chương, mỗi chương gồm nhiều bài học. Mỗi đơn vị bài học được thiết kế dựa trên các hoạt động: Khởi động, Khám phá, Thực hành, Vận dụng. Dưới sự hướng dẫn của sách, HS tự giải quyết các nhiệm vụ, yêu cầu bài học đòi hỏi. Các hoạt động trong bài học nhằm giúp HS tìm tòi, khám phá, thực hành, luyện tập và có cơ hội vận dụng các kiến thức để giải quyết một số vấn đề trong thực tế cuộc sống.

Theo yêu cầu của chương trình, cuối mỗi tập đều có các bài **Hoạt động thực hành và trải nghiệm** sẽ giúp HS thêm yêu thích môn Toán, đồng thời tăng cường phát triển năng lực sử dụng toán học để giải quyết vấn đề trong cuộc sống thực tiễn và ứng dụng công nghệ thông tin trong việc học tập môn Toán.

2. Cấu trúc sách

Sách giáo khoa Toán 12 gồm hai tập. Dưới đây là cấu trúc sách, gồm phần/chương/bài và gợi ý về số tiết cho mỗi bài. Tuỳ theo điều kiện của địa phương, nhà trường mà GV có thể điều chỉnh cho phù hợp.

TẬP MỘT

<table>
<tr><th>STT</th><th colspan="2">TÊN PHẦN/CHƯƠNG/BÀI</th><th colspan="2">SỐ TIẾT</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Phần MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">Chương I. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số</td><td>Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số</td><td>6</td><td rowspan="5">24</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Bài tập cuối chương I</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">Chương II. Vectơ và hệ toạ độ trong không gian</td><td>Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian</td><td>4</td><td rowspan="4">16</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Bài 2. Toạ độ của vectơ trong không gian</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Bài 3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Bài tập cuối chương II</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="3">Chương III. Các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm</td><td>Bài 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm</td><td>3</td><td rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Bài tập cuối chương III</td><td>2</td></tr>
</table>

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

	HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM			
1		Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số bằng phần mềm Geogebra	4	**6**
2		Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng máy tính cầm tay	2	

TẬP HAI

STT	TÊN PHẦN/CHƯƠNG/BÀI		SỐ TIẾT	
	Phần MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH			
1	Chương IV. Nguyên hàm. Tích phân	Bài 1. Nguyên hàm	6	**22**
2		Bài 2. Tích phân	6	
3		Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân	6	
4		Bài tập cuối chương IV	4	
	Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG			
1	Chương V. Phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu	Bài 1. Phương trình mặt phẳng	6	**19**
2		Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian	6	
3		Bài 3. Phương trình mặt cầu	3	
4		Bài tập cuối chương V	4	
	Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT			
1	Chương VI. Xác suất có điều kiện	Bài 1. Xác suất có điều kiện	2	**7**
2		Bài 2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes	3	
3		Bài tập cuối chương VI	2	

Xem thêm tài liệu tại chiasetailieuhay.com

	HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM			
1		Bài 1. Tính giá trị gần đúng tích phân bằng máy tính cầm tay	1	
2		Bài 2. Minh hoạ và tính tích phân bằng phần mềm GeoGebra	1	**3**
3		Bài 3. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian	1	

Lưu ý: Các tiết kiểm tra được tính vào phần ôn tập chương.

3. Một số điểm mới trong cấu trúc sách giáo khoa Toán 12

Mỗi bài học luôn có phần mở đầu nhằm giới thiệu vấn đề HS cần thảo luận hoặc các hoạt động cụ thể mà HS phải thực hiện để kiến tạo kiến thức.

Mỗi chủ điểm kiến thức trong bài học thường được giới thiệu theo trình tự:

Hoạt động khởi động	Hoạt động khám phá	Hoạt động thực hành	Hoạt động vận dụng
Gợi mở, kết nối vào chủ đề bài học.	Gợi ý để tìm ra kiến thức mới.	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.	Ứng dụng kiến thức đã biết vào một tình huống hay giải quyết bài toán thực tiễn.

Nhóm tác giả đã tập trung thiết kế các hoạt động cho HS dựa trên các nguyên tắc sau:

– Hoạt động phải đi trước sự phát triển, kéo theo sự phát triển của HS.

– Xây dựng hoạt động dựa trên vùng phát triển hiện tại và vùng phát triển gần nhất của người học (HS lớp 11 chuẩn bị lên lớp 12).

– Tích cực hoá quá trình nhận thức của HS.

– Nâng cao sự tương tác giữa SGK và HS.

– Khởi động tư duy, gây hứng thú học tập cho HS.

– Tạo thuận lợi cho GV khi tiến hành các phương pháp dạy học tích cực.

4. Dự kiến khung phân phối chương trình

Lưu ý về cách vận dụng khung phân phối chương trình dự kiến

– Nên bố trí sao trong mỗi học kì có đủ 3 mạch nội dung và hoạt động trải nghiệm theo chương trình Toán lớp 12: Một số yếu tố Giải tích; Hình học và Đo lường; Thống kê và Xác suất.

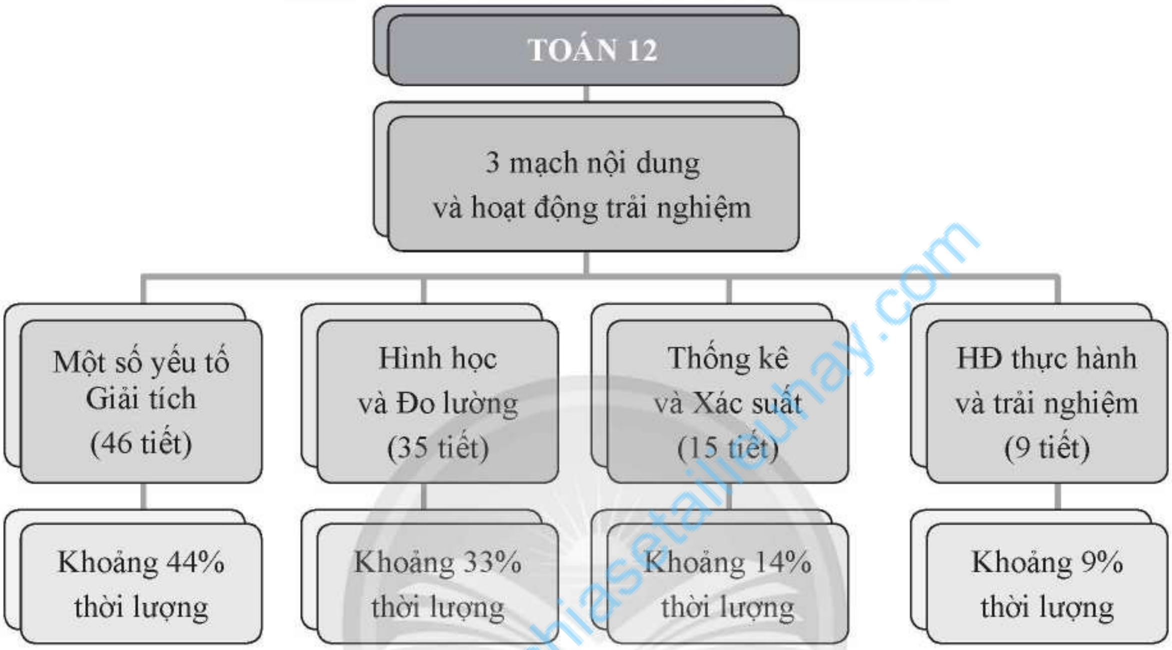
Xem thêm tại chiasetailieuthay.com

Một số lưu ý khi phân tiết

– Tổ chuyên môn có thể thống nhất số tiết của mỗi bài sao cho phù hợp với tình hình thực tế của từng trường, đảm bảo được mục tiêu và yêu cầu cần đạt.

– Nên bố trí một số tiết dự phòng (so với tổng số tiết quy định cả năm để GV có thể sử dụng cho giờ kiểm tra, bổ sung tiết cho những bài khó, bài dài hoặc dự phòng để bù giờ).

PHÂN PHỐI TIẾT THEO SÁCH GIÁO KHOA



Gợi ý một cách lập kế hoạch giảng dạy môn Toán lớp 12 (dành cho các lớp không học Chuyên đề học tập Toán 12) để tổ chuyên môn tham khảo

HỌC KÌ I (54 TIẾT)

Một số yếu tố Giải tích: 24 tiết – Hình học và Đo lường: 16 tiết
Thống kê và Xác suất: 8 tiết – Hoạt động thực hành và trải nghiệm: 6 tiết

Tuần	Tiết	Tên bài học	Tuần	Tiết	Tên bài học
1	1	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số	**2**	4	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số
	2	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số		5	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số
	3	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số		6	Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số
3	7	Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	**4**	10	Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số
	8	Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số		11	Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số
	9	Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số		12	Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

5	13	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
	14	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
	15	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
7	19	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
	20	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
	21	Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số bằng phần mềm Geogebra
9	25	Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng máy tính cầm tay
	26	Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng máy tính cầm tay
	27	Bài tập cuối chương I
11	31	Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian
	32	Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian
	33	Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian
13	37	Bài 2. Toạ độ của vectơ trong không gian
	38	Bài 2. Toạ độ của vectơ trong không gian
	39	Bài 3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ
15	43	Bài tập cuối chương II
	44	Bài tập cuối chương II
	45	Bài tập cuối chương II

6	16	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
	17	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
	18	Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản
8	22	Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số bằng phần mềm Geogebra
	23	Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số bằng phần mềm Geogebra
	24	Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số bằng phần mềm Geogebra
10	28	Bài tập cuối chương I
	29	Bài tập cuối chương I
	30	Bài tập cuối chương I
12	34	Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian
	35	Bài 2. Toạ độ của vectơ trong không gian
	36	Bài 2. Toạ độ của vectơ trong không gian
14	40	Bài 3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ
	41	Bài 3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ
	42	Bài 3. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ
16	46	Bài 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm
	47	Bài 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm
	48	Bài 1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

17	49	Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	**18**	52	Bài tập cuối chương III
	50	Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm		53	**KIỂM TRA HỌC KÌ I**
	51	Bài 2. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm		54	

HỌC KÌ II (51 TIẾT)

Một số yếu tố Giải tích: 22 tiết – Hình học và Đo lường: 19 tiết
Thống kê và Xác suất: 7 tiết – Hoạt động thực hành và trải nghiệm: 3 tiết

Tuần	Tiết	Tên bài học	Tuần	Tiết	Tên bài học
19	55	Bài 1. Nguyên hàm	**20**	58	Bài 1. Nguyên hàm
	56	Bài 1. Nguyên hàm		59	Bài 1. Nguyên hàm
	57	Bài 1. Nguyên hàm		60	Bài 1. Nguyên hàm
21	61	Bài 2. Tích phân	**22**	64	Bài 2. Tích phân
	62	Bài 2. Tích phân		65	Bài 2. Tích phân
	63	Bài 2. Tích phân		66	Bài 2. Tích phân
23	67	Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân	**24**	70	Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân
	68	Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân		71	Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân
	69	Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân		72	Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân
25	73	Bài 1. Tính giá trị gần đúng tích phân bằng máy tính cầm tay	**26**	76	Bài tập cuối chương IV
	74	Bài 2. Minh hoạ và tính tích phân bằng phần mềm GeoGebra		77	Bài tập cuối chương IV
	75	Bài tập cuối chương IV		78	Bài tập cuối chương IV

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

27	79	Bài 1. Phương trình mặt phẳng	**28**	82	Bài 1. Phương trình mặt phẳng
	80	Bài 1. Phương trình mặt phẳng		83	Bài 1. Phương trình mặt phẳng
	81	Bài 1. Phương trình mặt phẳng		84	Bài 1. Phương trình mặt phẳng
29	85	Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian	**30**	88	Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian
	86	Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian		89	Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian
	87	Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian		90	Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian
31	91	Bài 3. Phương trình mặt cầu	**32**	94	Bài tập cuối chương V
	92	Bài 3. Phương trình mặt cầu		95	Bài tập cuối chương V
	93	Bài 3. Phương trình mặt cầu		96	Bài tập cuối chương V
33	97	Bài 3. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian	**34**	100	Bài 2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes
	98	Bài 1. Xác suất có điều kiện		101	Bài 2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes
	99	Bài 1. Xác suất có điều kiện		102	Bài 2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes
35	103	Bài tập cuối chương VI			
	104	**KIỂM TRA HỌC KÌ II**			
	105				

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Chân trời sáng tạo

Phần hai

HƯỚNG DẪN DẠY HỌC THEO SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 12

(Chân trời sáng tạo)

Phần MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

A. MỤC TIÊU

1. Năng lực toán học

Phát triển cho HS một số năng lực toán học qua các yêu cầu cần đạt:

– Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu của đạo hàm cấp một của nó.

– Thể hiện được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.

– Nhận biết được tính đơn điệu, điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

– Nhận biết được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.

– Xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.

– Khảo sát được tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$; $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$; $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0$, $m \neq 0$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu).

– Nhận biết được tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

– Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn.

2. Phát triển năng lực chung

– Năng lực tự chủ và tự học trong tìm tòi, khám phá kiến thức mới.

– Năng lực giao tiếp và hợp tác trong trình bày, thảo luận và làm việc nhóm.

– Năng lực giải quyết vấn đề trong thực hành và vận dụng.

3. Hình thành các phẩm chất

– Chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm.

B. HƯỚNG DẪN DẠY HỌC

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu của đạo hàm cấp một của nó.

– Thể hiện được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.

– Nhận biết được tính đơn điệu, điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, Toán học và Vật lí.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

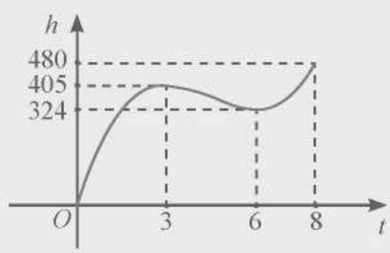
– Khái niệm đồng biến, nghịch biến đã được học ở lớp 10, tuy nhiên thuật ngữ "tính đơn điệu" chỉ được giới thiệu ở lớp 12.

– GV nên nhắc lại công thức tính đạo hàm của các hàm số cơ bản (hàm số mũ x^n, hàm số lượng giác, ...) cũng như ý nghĩa hình học của đạo hàm.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Hoạt động khởi động (HĐKĐ)

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

– *Mục đích:* Hoạt động đưa ra bài toán thực tế về việc tăng giảm độ cao của khinh khí cầu giúp khơi gợi sự hứng thú của HS đối với việc xác định tính đơn điệu của một hàm số. Đồ thị hàm số được cho sẵn giúp HS có thể dựa vào quan sát trực quan để có thể trả lời câu hỏi đặt ra.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt câu hỏi, HS trả lời.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Khinh khí cầu tăng độ cao trong khoảng thời gian 0 đến 3 phút và 6 đến 8 phút, giảm độ cao trong khoảng thời gian từ 3 đến 6 phút.

Vào thời điểm 3 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu ở vị trí cao nhất so với các thời điểm xung quanh (ví dụ trong khoảng từ 2 đến 4 phút).

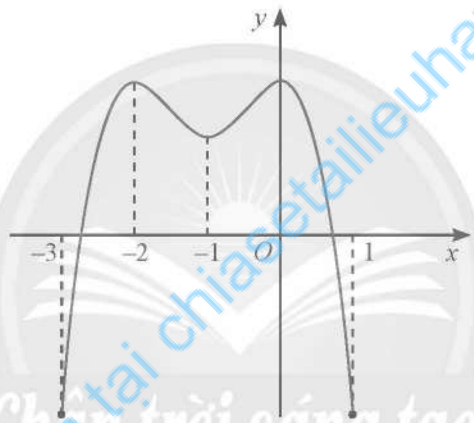
Vào thời điểm 6 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu ở vị trí thấp nhất so với các thời điểm xung quanh (ví dụ trong khoảng từ 5 đến 7 phút).

1. Tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Hoạt động thực hành 1 (HĐTH 1)

1 Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 3.



Hình 3

– *Mục đích:* Củng cố định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời cá nhân, GV nhận xét.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-1; 0)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.

Tính đơn điệu của hàm số

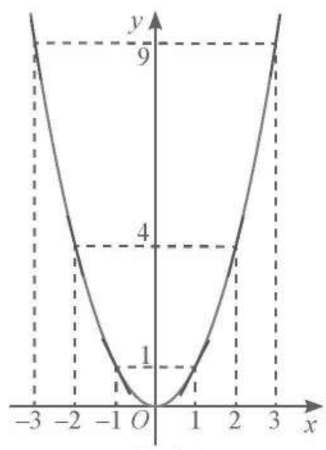
Hoạt động khám phá 1 (HĐKP 1)

1 Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (Hình 4), hãy chỉ ra các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và xét dấu $f'(x)$.

c) Từ đó, nhận xét về mối liên hệ giữa các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số với dấu của $f'(x)$.



Hình 4

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá được mối liên hệ giữa các khoảng đơn điệu và dấu của đạo hàm hàm số, từ đó rút ra được cách xác định tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm bốn và trình bày trước lớp. GV nhận xét, rút ra kết luận và đưa ra các bước xác định tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

b) $f'(x) = 2x$; $f'(x)$ dương khi $x > 0$ và $f'(x)$ âm khi $x < 0$.

c) Hàm số đồng biến khi $f'(x) > 0$ và nghịch biến khi $f'(x) < 0$.

HĐTH 2

Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng xác định tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

HĐTH 3

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng chứng minh tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3 - \cos x$.

Vì $\cos x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Hoạt động vận dụng (HĐVD1)

1 Hãy trả lời câu hỏi trong ▶ (trang 6) bằng cách xét dấu đạo hàm của hàm số $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ với $0 \le t \le 8$.

– *Mục đích:* Vận dụng kĩ năng xác định tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm để quay lại giải quyết bài toán đặt ra trong phần ***HĐKĐ***.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $h'(t) = 18t^2 - 162t + 324$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = 6$.

t	0		3		6		8
$h'(t)$		+	0	–	0	+	
$h(t)$	0	↗	405	↘	324	↗	480

Hàm số đồng biến trên các khoảng (0; 3) và (6; 8), nghịch biến trên khoảng (3; 6).

Do đó, khinh khí cầu tăng độ cao trong các khoảng thời gian từ 0 đến 3 phút và 6 đến 8 phút, giảm độ cao trong khoảng từ 3 đến 6 phút.

Hàm số độ cao của khinh khí cầu đạt cực đại tại $t = 3$ và cực tiểu tại $t = 6$.

Lưu ý: GV nên cho HS quay lại và đối chiếu với kết quả của ***HĐKĐ*** có được bằng cách đọc đồ thị.

2. Cực trị của hàm số

Khái niệm cực trị của hàm số

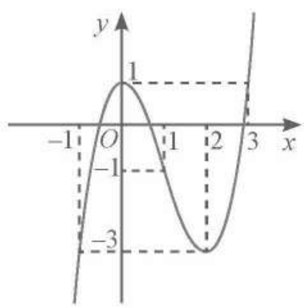
HĐKP 2

2 Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trong Hình 5.

a) Tìm khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 0$ mà trên đó $f(x) < f(0)$ với mọi $x \neq 0$.

b) Tìm khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 2$ mà trên đó $f(x) > f(2)$ với mọi $x \neq 2$.

c) Tồn tại hay không khoảng $(a; b)$ chứa điểm $x = 1$ mà trên đó $f(x) > f(1)$ với mọi $x \neq 1$ hoặc $f(x) < f(1)$ với mọi $x \neq 1$?



Hình 5

– *Mục đích:* HS khám phá định nghĩa cực trị của hàm số thông qua việc quan sát và phân tích đồ thị hàm số.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm và trình bày trước lớp. GV nhận xét và đưa ra định nghĩa cực trị của hàm số.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $f(x) < f(0)$ với mọi $x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$.

b) $f(x) > f(2)$ với mọi $x \in (1; 3) \setminus \{2\}$.

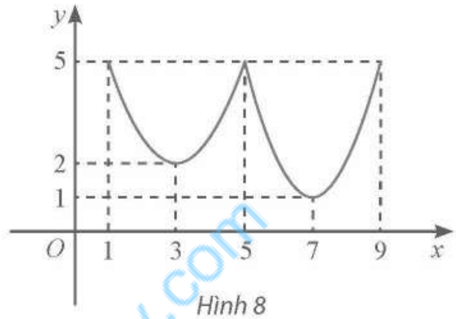
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

c) Không tồn tại khoảng $(a; b)$ nào chứa điểm $x = 1$ mà trên đó $f(x) > f(1)$ với mọi $x \neq 1$ hoặc $f(x) < f(1)$ với mọi $x \neq 1$.

Lưu ý: Trong câu a và b, có nhiều khoảng đáp ứng yêu cầu. Chẳng hạn ở câu a, có thể chọn khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ hay $(-1; 2)$.

HĐTH 4

Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho ở Hình 8.



Hình 8

– *Mục đích:* Giúp HS củng cố khái niệm cực trị của hàm số và kĩ năng xác định cực trị dựa vào đồ thị của hàm số.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $x = 5$ là điểm cực đại của hàm số; $x = 3$ và $x = 7$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

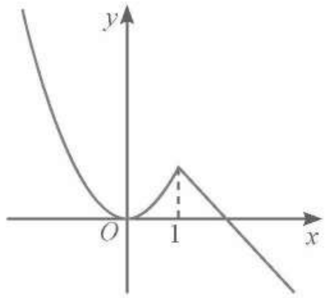
Tìm cực trị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ được cho ở Hình 9.

a) Tìm điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số.

b) Tại $x = 1$, hàm số có đạo hàm không?

c) Thay mỗi dấu ? bằng kí hiệu (+, –) thích hợp để hoàn thành bảng biến thiên dưới đây. Nhận xét về dấu của y' khi x đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.



Hình 9

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		?	0	?	||	?	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

– *Mục đích:* HS khám phá cách tìm cực trị bằng bảng biến thiên, từ đó rút ra cách tìm cực trị bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Điểm cực đại của hàm số là $x = 1$. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 0$.

b) Hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Lưu ý: Dù thông tin về đạo hàm tại 0 được cho sẵn, nhưng GV nên nhắc lại hoặc yêu cầu HS giải thích các thông tin này. Tại $x = 0$, đạo hàm của hàm số bằng 0 vì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x = 0$ nằm ngang và có hệ số góc là 0.

HĐTH 5

5 Tìm cực trị của hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

– *Mục đích:* Giúp HS củng cố kĩ năng tìm cực trị bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, giá trị cực đại là $f(-3) = -5$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu là $f(1) = 3$.

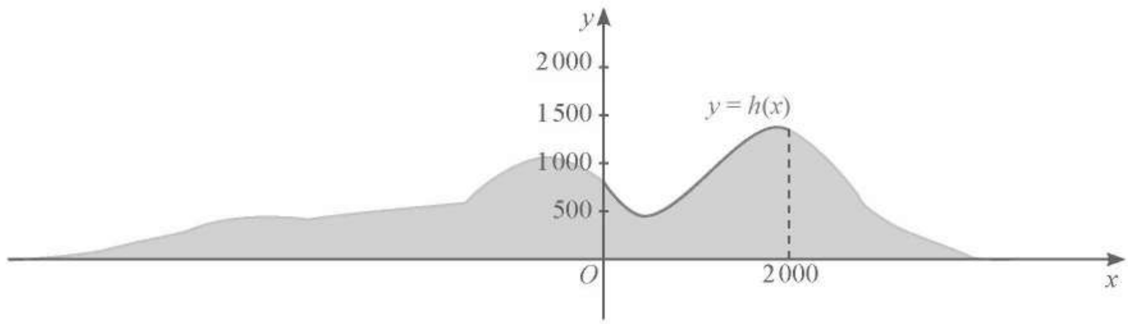
HĐVD 2

2 Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \le x \le 2000.$$

Tìm toạ độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo



Hình 10

(*Theo:* Tập bản đồ bài tập và bài thực hành Địa lí 8, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011)

– *Mục đích:* HS vận dụng kiến thức đã học về sự biến thiên và cực trị của hàm số để giải quyết bài toán thực tế.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Đỉnh núi tương ứng với điểm cực đại của đồ thị hàm số. Do đó, ta cần tìm cực đại của hàm số $h(x)$.

Ta có $h'(x) = -\dfrac{1}{440\,000}x^2 + \dfrac{9}{1760}x - \dfrac{81}{44}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450$ hoặc $x = 1\,800$.

Bảng biến thiên:

x	0		450		1 800		2 000
$h'(x)$		–	0	+	0	–	
$h(x)$	840	↘	$\dfrac{7365}{16}$	↗	$\dfrac{15315}{11}$	↘	$\dfrac{43\,720}{33}$

Toạ độ đỉnh của lát cắt dãy núi là toạ độ điểm cực đại trên đồ thị hàm số, nghĩa là $\left(1\,800; \dfrac{15\,315}{11}\right)$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Hàm số đồng biến trên các khoảng (0; 2) và (4; 5), nghịch biến trên các khoảng (–1; 0) và (2; 4).

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu là -1 và $x = 4$, giá trị cực tiểu là -1; hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại là 2.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng (–3; –1) và (1; 3), nghịch biến trên khoảng (–1; 1).

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu là -1; hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại là 3.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 12x^2 + 6x - 36$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	58	$\searrow$	$-\frac{111}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$.

Điểm cực đại của hàm số là $x = -2$. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = \frac{3}{2}$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 5$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(5; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(3; 4)$ và $(4; 5)$.

Điểm cực đại của hàm số là $x = 3$. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 5$.

3. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 + 6x - 36$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 2$.

Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	82	$\searrow$	-43	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, $y_{CĐ} = 82$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -43$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$y' = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$. Hàm số không có cực trị.

c) Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{-x^2+4}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-2		0		2
y'	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 2$. Hàm số không có cực tiểu.

4. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$y' = -\dfrac{7}{(x-3)^2} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Do đó hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

5. a) $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$.

b) $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0; 7)$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $(0; 7)$.

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

6. a) Hàm số vận tốc: $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

Hàm số gia tốc: $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.

b) $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$a(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vận tốc của chất điểm giảm trên khoảng $(0; 2)$ và tăng trên khoảng $(2; +\infty)$.

7. Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có $f'(x)$ dương trên các khoảng $(-1; 2)$ và $(4; 5)$, âm trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(2; 4)$. Ta có bảng biến thiên:

x	-2		-1		2		4		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 2)$ và $(4; 5)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(2; 4)$.

Các điểm cực tiểu của hàm số là $x = -1$ và $x = 4$; điểm cực đại của hàm số là $x = 2$.

Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.

– Xác định được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống (kinh tế, môi trường, …).

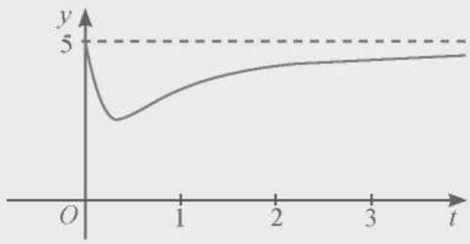
II. MỘT SỐ CHÚ Ý

– Cần lưu ý HS phân biệt khái niệm cực đại và giá trị lớn nhất, cực tiểu và giá trị nhỏ nhất.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/*l*) trong một hồ nước sau *t* giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



$$y = y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$

Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

(*Theo:* https://www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization _of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

– *Mục đích:* Hoạt động đưa ra bài toán thực tế về nồng độ oxygen hoà tan trong nước để khơi gợi sự hứng thú của HS đối với việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số.

– *Gợi ý tổ chức:* GV có thể giới thiệu ngắn về vấn đề ô nhiễm nước liên quan đến nồng độ oxygen hoà tan thông qua một số hình ảnh thực tế trước khi đặt bài toán về thời điểm mà nồng độ oxygen thấp nhất.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy nồng độ oxygen hoà tan trong nước cao nhất khi $t = 0$, thấp nhất vào thời điểm khoảng 20 phút ($\frac{1}{3}$ giờ) sau khi rác thải bị xả vào hồ.

1. Định nghĩa

HĐKP 1

Hình 1 cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.

a) Khẳng định nào sau đây đúng? Vì sao?

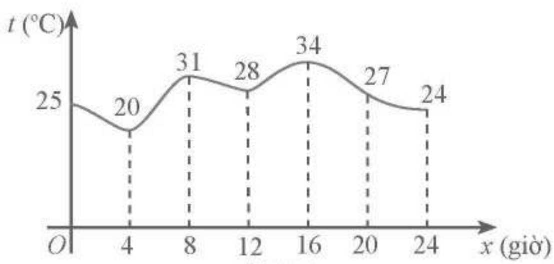
i) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28 °C.

ii) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 40 °C.

iii) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 34 °C.

b) Hãy xác định thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày.

c) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu?



Hình 1

– *Mục đích:* Hình thành khái niệm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị.

– *Gợi ý tổ chức:* GV trình chiếu đồ thị trong Hình 1 và đặt câu hỏi, HS trả lời.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a)

i) Không đúng, vì 28 °C vẫn thấp hơn nhiệt độ lúc 16 giờ là 34 °C.

ii) Không đúng, vì không có thời điểm nào trong ngày mà nhiệt độ bằng 40 °C.

iii) Đúng, vì lúc 16 giờ, nhiệt độ đạt 34 °C và vào mọi thời điểm trong ngày nhiệt độ đều không vượt quá 34 °C.

b) Nhiệt độ cao nhất trong ngày vào lúc 16 giờ.

c) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20 °C.

HĐTH 1

1 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn [0; 3];

b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng (0; 5);

c) $h(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp cho trước hoặc trên tập xác định của nó bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân, trình bày trên bảng, GV kiểm tra và điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số trên [0; 3]:

x	0		1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	6	↘	5	↗	10

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = 1$, $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = 10$.

b) $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$ (loại).

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên (0; 5):

x	0		1		5
$g'(x)$	||	−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$\frac{26}{5}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{(0;5)} g(x) = g(1) = 2$ và $g(x)$ không có giá trị lớn nhất trên (0; 5).

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

c) Tập xác định: $D = [-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,]$.

$h'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2}{\sqrt{2 - x^2}}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$:

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} h(x) = h(-1) = -1$, $\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} h(x) = h(1) = 1$.

HĐVD 1

Sử dụng đạo hàm và lập bảng biến thiên, trả lời câu hỏi trong (trang 14).

– *Mục đích:* Vận dụng kiến thức vừa học về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất để giải bài toán đặt ra ở ***HĐKĐ*** bằng đạo hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân, trình bày lên bảng, GV nhận xét, chỉnh sửa, đồng thời đối chiếu kết quả với đồ thị được cho trong ***HĐKĐ***.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Xét hàm số $y(t) = 5 - \dfrac{15t}{9t^2 + 1}$ xác định trên $[0; +\infty)$.

$y'(t) = \dfrac{15(9t^2 - 1)}{(9t^2 + 1)^2}$; $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$ (loại) hoặc $t = \dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên của $y(t)$ trên $[0; +\infty)$:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	5	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	5

Vậy nồng độ oxygen hoà tan cao nhất là 5 khi $t = 0$ và thấp nhất là $\dfrac{5}{2}$ khi $t = \dfrac{1}{3}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

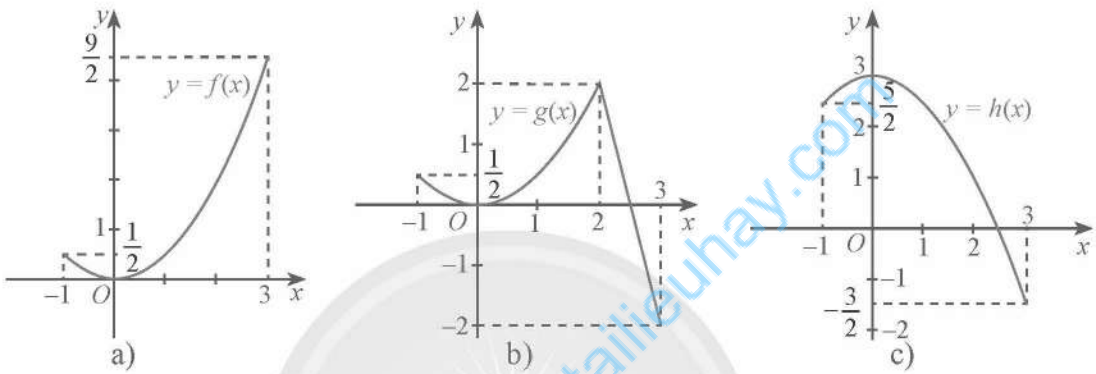
HĐKP 2

Hình 3 cho ta đồ thị của ba hàm số

$y = f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$; $y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{nếu } x \le 2 \\ -4x + 10 & \text{nếu } x \ge 2 \end{cases}$ và $y = h(x) = 3 - \dfrac{1}{2}x^2$ trên đoạn $[-1; 3]$.

a) Hàm số nào đạt giá trị lớn nhất tại một điểm cực đại của nó?

b) Các hàm số còn lại đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào?



Hình 3

– *Mục đích:* HS nhận biết được hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại cực trị hoặc tại đầu mút.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu hàm số, đưa đồ thị và đặt câu hỏi, lưu ý cần nhấn mạnh việc hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 3]$. HS quan sát và trả lời.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm cực đại $x = 2$.

Hàm số $h(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm cực đại $x = 0$.

b) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại đầu mút $x = 3$ của đoạn $[-1; 3]$.

HĐTH 2

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1; 4]$.

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân, trình bày trên bảng, GV kiểm tra và điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$.

Ta có: $g'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$;

$g(1) = 5$; $g(2) = 3$; $g(4) = \dfrac{17}{4}$.

Do đó: $\max\limits_{[1;\,4]} g(x) = g(1) = 5$ và $\min\limits_{[1;\,4]} g(x) = g(2) = 3$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐTH 3

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

– *Mục đích:* HS vận dụng việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn để giải quyết bài toán tối ưu trong hình học.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân, trình bày bài giải trên bảng; GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Gọi x (cm) là độ dài một cạnh góc vuông của tam giác vuông ($0 < x < 5$).

Độ dài cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25-x^2}$.

Diện tích của tam giác vuông là $S(x) = x\sqrt{25-x^2}$.

$S'(x) = \dfrac{-2x^2+25}{\sqrt{25-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (loại) hoặc $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

x	0		$\frac{5\sqrt{2}}{2}$		5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	0

Vậy tam giác vuông có diện tích lớn nhất là $\dfrac{25}{2}$ cm².

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) $\min\limits_{[1;\,6]} f(x) = f(5) = 1$; $\max\limits_{[1;\,6]} f(x) = f(1) = 6$.

b) $\min\limits_{[-3;\,3]} g(x) = g(-3) = g(-1) = 1$; $\max\limits_{[-3;\,3]} g(x) = g(1) = 7$.

2. a) $\min\limits_{[-1;\,3]} y = y(2) = -15$; $\max\limits_{[-1;\,3]} y = y(-1) = 12$.

b) $\min\limits_{[3;\,11]} y = y(6) = -32$; $\max\limits_{[3;\,11]} y = y(3) = 49$.

c) $\min\limits_{[3;\,7]} y = y(7) = 3$; $\max\limits_{[3;\,7]} y = y(3) = 7$.

d) $\min\limits_{\left[0;\,\frac{7\pi}{12}\right]} y = y\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $\max\limits_{\left[0;\,\frac{7\pi}{12}\right]} y = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

3. a) $\min\limits_{[-3;\,2)} y = y(-3) = -22$.

b) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.

4. Đặt x (m) là chiều rộng của khung cửa sổ $(x > 0)$.

Khi đó chiều cao của khung cửa sổ là $2 - x$ (m) $(x < 2)$.

Diện tích cửa sổ là $S(x) = x(2 - x) = -x^2 + 2x$.

Xét hàm số $S(x) = -x^2 + 2x$ trên $(0; 2)$, ta có:

$S'(x) = -2x + 2$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $S(1) = 1$; $S(0) = 0$; $S(2) = 0$.

x	0		1		2
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$	0	↗	1	↘	0

Vậy diện tích của sổ lớn nhất là 1 m^2 khi $x = 1$. Kích thước khung cửa khi đó là rộng 1 m và cao 1 m.

5. Tập xác định $D = [-1; 1]$.

$y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $y(-1) = y(1) = 1$; $y(0) = 2$.

Vậy $\max\limits_{[-1;\,1]} y = 2$; $\min\limits_{[-1;\,1]} y = 1$.

6. $R = pq = p(30 - 2p)$ với $0 \le p \le 15$.

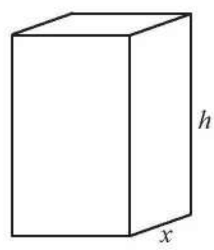
$R' = 30 - 4p$; $R' = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{15}{2}$.

$R(0) = R(15) = 0$; $R\left(\dfrac{15}{2}\right) = 112{,}5$ (nghìn đồng).

Vậy doanh thu cao nhất là 112 500 đồng khi giá bán là 7 500 đồng.

7. Gọi h (cm) là chiều cao, V (cm^3) là thể tích của hộp sữa.

Vì $V = 1\ l = 1\,000$ cm^3 nên $hx^2 = V = 1\,000$, suy ra $h = \dfrac{1000}{x^2}$.



Diện tích toàn phần của hộp là $S = 4xh + 2x^2 = \dfrac{4\,000}{x} + 2x^2$.

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{4\,000}{x} + 2x^2$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $S'(x) = -\dfrac{4\,000}{x^2} + 4x = \dfrac{4x^3 - 4\,000}{x^2}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$	||	−	0	+	
$S(x)$		↘	600	↗	

Vậy diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất là 600 cm^2 khi $x = 10$ cm.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, Toán học và Vật lí.

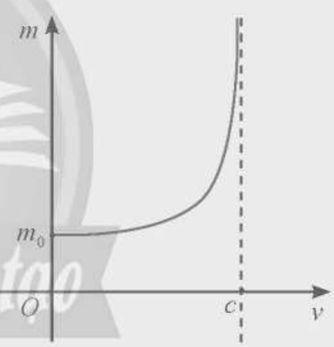
II. MỘT SỐ CHÚ Ý

– Đối với các bài tập thực hành tìm tiệm cận bằng việc tính toán, nếu có thể thì ngoài việc kiểm tra tính toán, GV nên sử dụng thêm phần mềm vẽ đồ thị của hàm số và các đường tiệm cận để HS củng cố hơn ý nghĩa của các đường tiệm cận.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng m (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển v (km/s) của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức $m = m(v) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 là khối lượng nghỉ của hạt, $c = 300\,000$ km/s là tốc độ ánh sáng. Khi hạt di chuyển với tốc độ càng gần tốc độ ánh sáng thì khối lượng của hạt thay đổi thế nào? Điều này thể hiện trên đồ thị hàm số $m = m(v)$ ở hình bên như thế nào?



(*Theo:* https://www.britannica.com/science/relativistic-mass)

– *Mục đích:* Khơi gợi sự hứng thú của HS đối với đường tiệm cận của đồ thị hàm số thông qua đồ thị của hàm số khối lượng nghỉ của hạt theo tốc độ của hạt.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đưa hình ảnh đồ thị và hàm số, HS trả lời.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Hạt di chuyển với tốc độ v càng gần tốc độ ánh sáng c thì khối lượng m của hạt tiến đến vô cực. Điều này thể hiện ở việc khi v tiến gần về c thì đồ thị hàm số càng gần như thẳng đứng và tiến sát đến đường thẳng $v = c$. Dựa vào hàm số $m(v)$ ta cũng thấy $\lim\limits_{v \to c} m(v) = +\infty$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

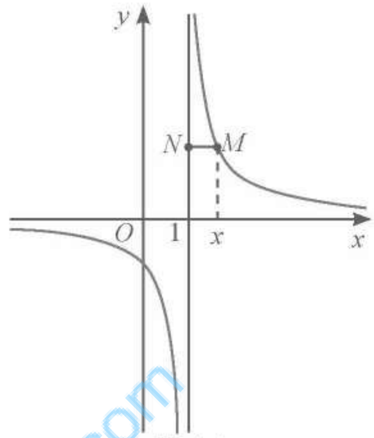
1. Đường tiệm cận đứng

HĐKP 1

Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị như Hình 1.

a) Tìm $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$.

b) Gọi M là điểm trên đồ thị có hoành độ x. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục Oy cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm N. Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \to 1^+$ và $x \to 1^-$.



Hình 1

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá khái niệm và hình ảnh của tiệm cận đứng.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thảo luận nhóm đôi hoặc nhóm bốn và trả lời câu hỏi, GV nhận xét và giới thiệu định nghĩa tiệm cận đứng.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

b) $MN = x - 1$.

Khi $x \to 1^+$ và $x \to 1^-$ thì khoảng cách MN dần tới 0.

HĐTH 1

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{-x+5}$; b) $y = g(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

– *Mục đích:* Củng cố khái niệm tiệm cận đứng.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân và trình bày trên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Vì $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{2x+3}{-x+5} = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{2x+3}{-x+5} = -\infty$) nên $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = +\infty$) nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lưu ý: Đối với hàm phân thức, các tiệm cận đứng thường tương ứng với nghiệm của mẫu thức.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

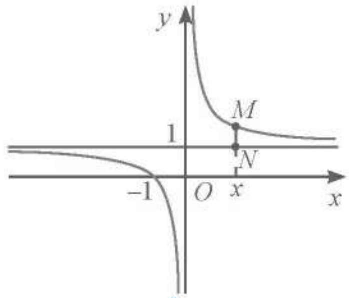
2. Đường tiệm cận ngang

HĐKP 2

Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x}$ có đồ thị như Hình 4.

a) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x}$.

b) Đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt đồ thị hàm số tại điểm M và cắt đường thẳng $y = 1$ tại điểm N (Hình 4). Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.



Hình 4

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá khái niệm và hình ảnh của tiệm cận ngang.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thảo luận nhóm đôi hoặc nhóm bốn và trả lời câu hỏi, GV nhận xét và giới thiệu định nghĩa tiệm cận ngang.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x} = 0$.

b) $MN = \dfrac{1}{x}$.

Khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$, MN tiến dần tới 0.

HĐTH 2

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{4x+1}$; b) $y = g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

– *Mục đích:* Củng cố khái niệm tiệm cận ngang.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân và trình bày trên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{4x+1} = \dfrac{1}{4}$ (hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{4x+1} = \dfrac{1}{4}$) nên $y = \dfrac{1}{4}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

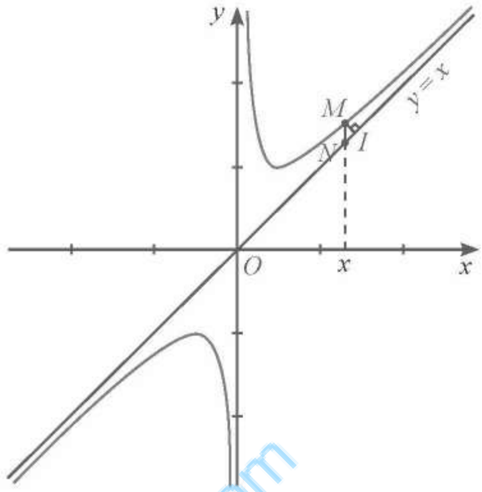
3. Đường tiệm cận xiên

HĐKP 3

Cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ và đường thẳng $y = x$. Đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt đồ thị hàm số tại điểm M và cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm N (Hình 7).

a) Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)$.

b) Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.



Hình 7

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá khái niệm và hình ảnh của tiệm cận xiên.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thảo luận nhóm đôi hoặc nhóm bốn và trả lời câu hỏi, GV nhận xét và giới thiệu định nghĩa tiệm cận xiên.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

b) $MN = \dfrac{1}{x}$.

Khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$, MN tiến dần tới 0.

HĐTH 3

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2-3x}{x+5}$.

– *Mục đích:* Củng cố khái niệm tiệm cận xiên và kĩ năng tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện cá nhân và trình bày trên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Ta có $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x(x+5)} = 2$,

$$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x}{x+5}-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-13x}{x+5}\right) = -13.$$

Vậy đường thẳng $y = 2x - 13$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Lưu ý: Các giới hạn tại $-\infty$ cho ta cùng kết quả như trên.

Xem thêm tại chiasetailieunay.com

HĐTH 4

Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:

$$C(x) = \frac{50x + 2\,000}{x}.$$

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = C(x)$.

– *Mục đích:* Vận dụng kiến thức đã học để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số trong bài toán thực tiễn.

– *Gợi ý tổ chức:* HS thực hiện theo nhóm đôi hoặc nhóm bốn, GV nhận xét, điều chỉnh.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Tiệm cận đứng $x = 0$; tiệm cận ngang $y = 50$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$; tiệm cận ngang $y = 2$.

b) Tiệm cận đứng $x = \frac{3}{4}$; tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{2}$.

c) Tiệm cận đứng $x = \frac{7}{3}$; tiệm cận ngang $y = \frac{5}{3}$.

2. a) Tiệm cận đứng $x = 2$; tiệm cận xiên $y = \frac{1}{2}x + 1$.

b) Tiệm cận đứng $x = -2$; tiệm cận xiên $y = 2x - 7$.

c) Tiệm cận đứng $x = -\frac{5}{2}$; tiệm cận xiên $y = x + 2$.

3. a) Tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = 2$; tiệm cận ngang $y = 0$.

b) Tiệm cận đứng $x = 0$; tiệm cận xiên $y = x + 1$.

c) Tiệm cận ngang $y = 1$.

4. Đồ thị của hàm số $y(t)$ có tiệm cận ngang là $y = 5$. Do đó khi thời gian t trở nên rất lớn, nồng độ oxygen trong hồ càng ngày càng tiến dần về 5.

5. Vì $\lim\limits_{v \to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$ nên $v = c$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

– Mô tả được sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị).

– Khảo sát được tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$; $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$; $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a \neq 0,\ m \neq 1$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu).

– Nhận biết được tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

2. Năng lực chú trọng: tư duy và lập luận toán học; giao tiếp toán học; mô hình hoá toán học; sử dụng công cụ, phương tiện học toán.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, Toán học và Vật lí.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Khi khảo sát hàm số, để xét sự biến thiên của hàm số ở Bước 2, bảng biến thiên có vai trò tổng kết các kết quả khảo sát sau khi tính và xét dấu đạo hàm, xác định khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số, ... Do vậy, bảng này cần được trình bày ở cuối Bước 2 (không sử dụng bảng như công cụ để chỉ ra khoảng biến thiên, cực trị, ...).

2. Tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị hàm số cũng được xem là các yếu tố để căn cứ khi vẽ đồ thị hàm số một cách trực quan. HS không phải tìm toạ độ cặp điểm đối xứng qua tâm hay qua trục này để có "đủ số điểm" cần dựa vào mà vẽ đồ thị hàm số.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

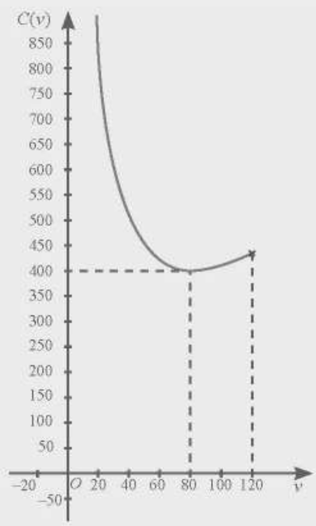
HĐKĐ

Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C = C(v)$ như hình bên.

Làm thế nào để vẽ được đồ thị hàm số này?



– *Mục đích:* Hoạt động đưa ra vấn đề thực tế về việc chi phí tiền xăng phụ thuộc vào tốc độ trung bình của xe khi chạy đường dài. Đồ thị được cho sẵn là một cách biểu diễn trực quan sự thay đổi chi phí này và gợi nhu cầu vẽ đồ thị hàm số khi biết công thức hàm số.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Cần biết tập xác định, khoảng đơn điệu, cực trị, một số điểm đặc biệt, … (HS không nhất thiết phải liệt kê được đầy đủ).

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

HĐKP 1

Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

a) Lập bảng biến thiên.

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

– *Mục đích:* Lập được bảng biến thiên của hàm số và sử dụng được bảng này để vẽ đồ thị hàm số.

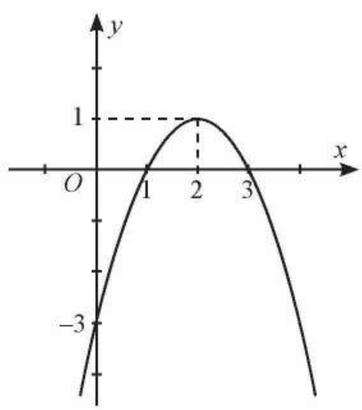
– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân (hoặc nhóm), GV nhận xét.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Hàm số có đạo hàm $y' = -2x + 4$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) Đồ thị:



2. Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

HĐTH 1

1 Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$; b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Xem thêm tại chiasetailieunay.com

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng khảo sát hàm số bậc ba.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, GV chỉ định một HS lên bảng trình bày, GV nhận xét, điều chỉnh (nếu cần).

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = 0$; hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 1$.

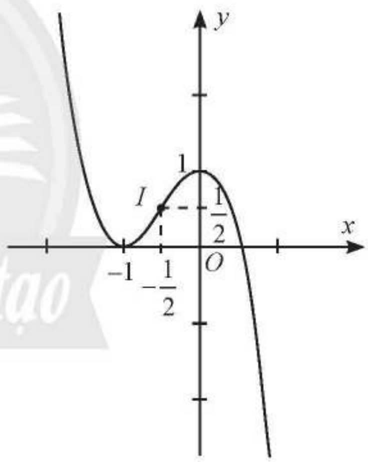
Các giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:

Điểm $(-1; 0)$ là điểm cực tiểu và điểm $(0; 1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.



b) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Các giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

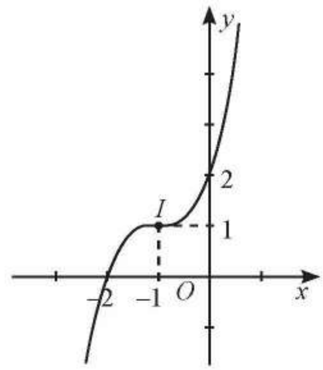
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-2; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$.

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-1; 1)$.



3. Khảo sát hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

HĐTH 2

Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; b) $y = \dfrac{2x}{3x-1}$; c) $y = \dfrac{5+x}{2-x}$.

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng khảo sát hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, GV chỉ định một HS lên bảng trình bày, GV nhận xét, điều chỉnh (nếu cần).

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

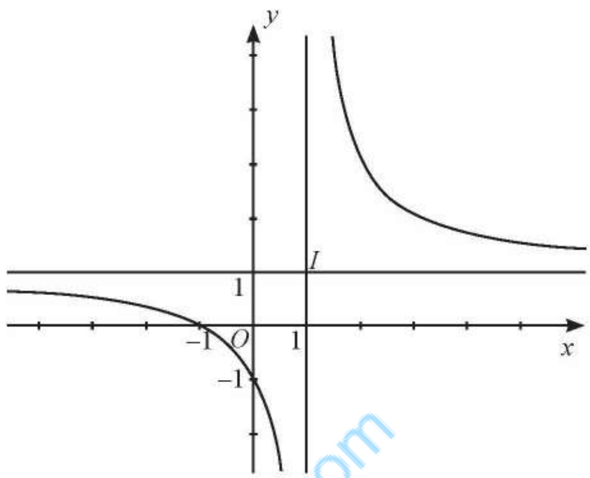
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = 1$.



b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-2}{(3x-1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq \dfrac{1}{3}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \dfrac{2}{3}$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \dfrac{2}{3}$ nên đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \dfrac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\dfrac{2}{3}$ $\searrow$		$-\infty$ || $+\infty$		$\searrow$ $\dfrac{2}{3}$

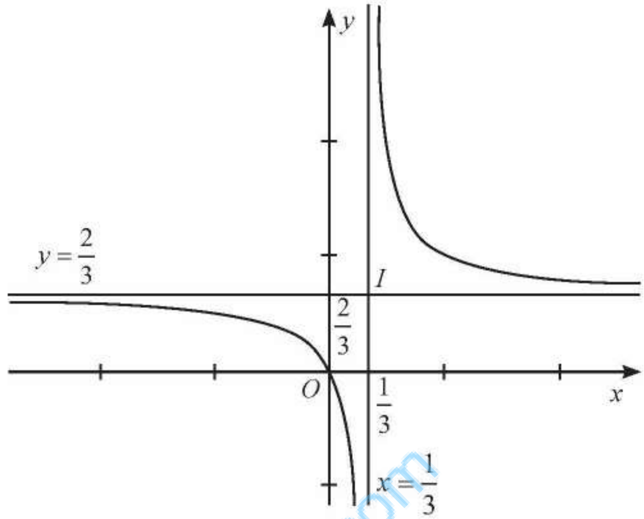
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số đi qua gốc toạ độ (0; 0).

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=\frac{1}{3}$ và $y=\frac{2}{3}$.



c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Đạo hàm $y'=\frac{7}{(2-x)^2}$. Vì $y'>0$ với mọi $x\neq 2$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to2^-} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^+} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

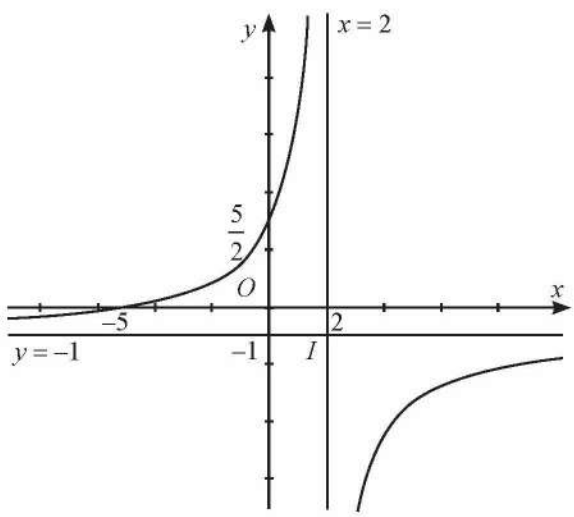
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-5; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(2; -1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=2$ và $y=-1$.



Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

4. Khảo sát hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$ đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

HĐTH 3

3 Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x - \dfrac{1}{x}$; b) $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$; c) $y = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x+1}$.

– *Mục đích:* Củng cố kĩ năng khảo sát hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0$, $m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu).

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, GV chỉ định một HS lên bảng trình bày, GV nhận xét, điều chỉnh (nếu cần).

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (y - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ nên đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to 0^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

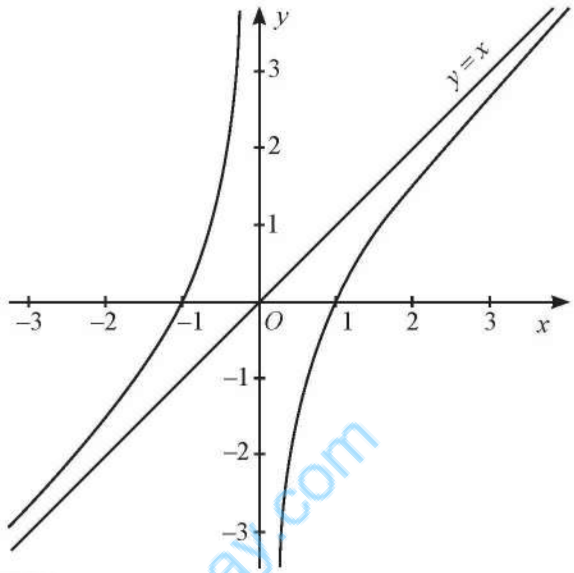
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $O(0; 0)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 0$ và $y = x$.



b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$; đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [y - (-x + 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x+1} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = -x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		5	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

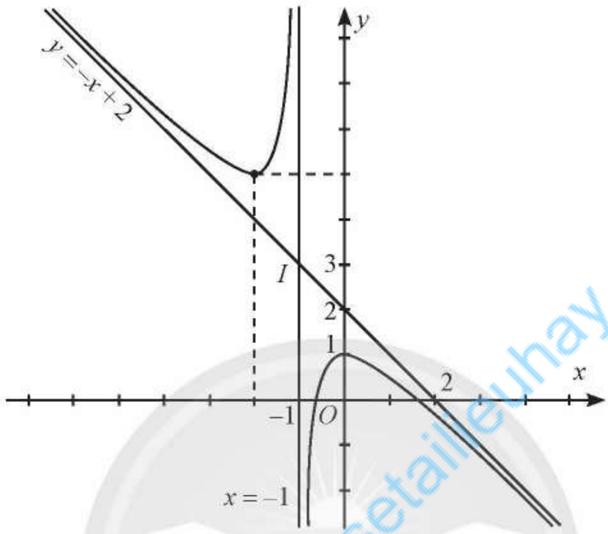
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$, giao với trục Oy tại điểm (0; 1).

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 3)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x + 2$.



c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

$y = -x + \dfrac{2}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - (-x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

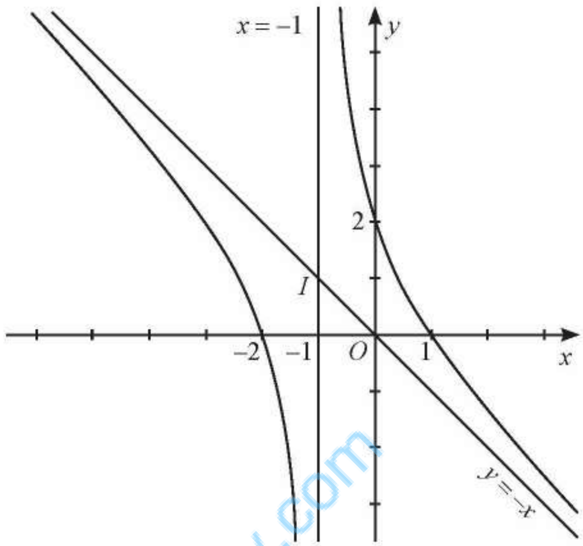
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-2; 0)$ và điểm $(1; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 1)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = -x$.



5. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

HĐTH 4

4 Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính ($d > 0$), d' là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0$). Ta có công thức:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \text{ hay } d' = \frac{df}{d-f}.$$

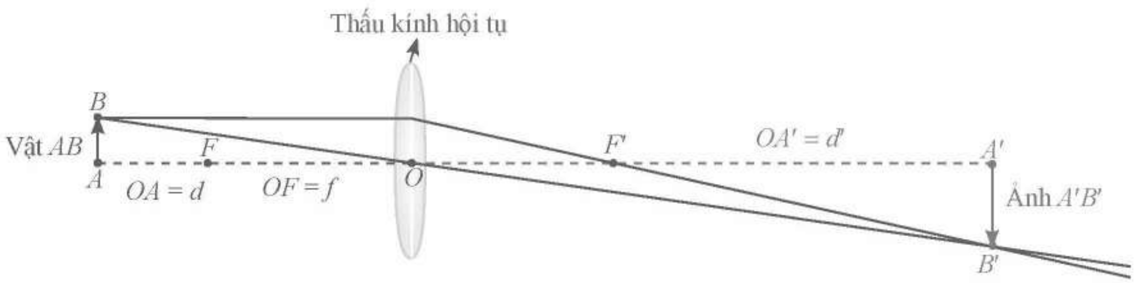
(Vật lí 11, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2012, trang 182, 187).

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d$, $y = d'$. Ta có hàm số $y = \dfrac{3x}{x-3}$ và $x \neq 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?



– *Mục đích:* Vận dụng hàm số để khảo sát sự thay đổi thuộc tính của ảnh (ảnh thật hay ảnh ảo) dựa vào sự thay đổi vị trí của vật đặt trước thấu kính hội tụ; tạo cơ hội cho HS phát triển năng lực mô hình hoá toán học và vận dụng kiến thức liên môn.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm, GV nhận xét, điều chỉnh (nếu cần).

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Xét hàm số $y = \dfrac{3x}{x-3}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-9}{(x-3)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 3$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = 3$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to 3^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

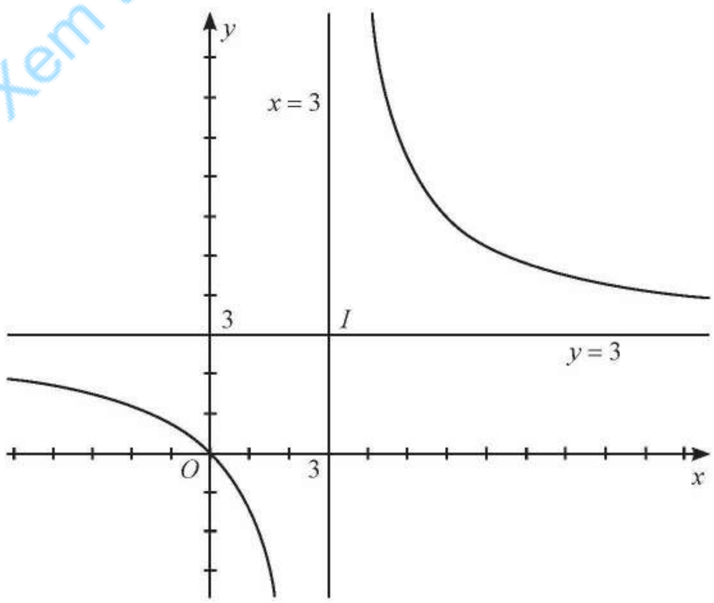
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số đi qua gốc toạ độ O, có tâm đối xứng là điểm $I(3; 3)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 3$ và $y = 3$.



Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) Do $d > 0$ nên chỉ xét phần đồ thị hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.

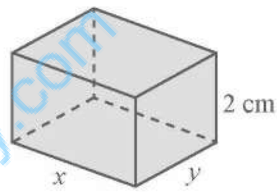
– Ảnh thật khi $d' > 0$, nghĩa là $y > 0$. Ta thấy $y > 0$ khi $x > 3$, nghĩa là $d > 3$ nên vật phải ở vị trí trước tiêu điểm.

– Ảnh ảo khi $d' < 0$, nghĩa là $y < 0$. Ta thấy $y < 0$ khi $0 < x < 3$, nghĩa là $0 < d < 3$ nên vật phải ở vị trí giữa tiêu điểm và thấu kính.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm nghĩa là x dần tới 3. Ta có $\lim\limits_{x \to 3^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^+} y = +\infty$ nên khi đó ảnh sẽ tiến xa ra vô cực.

HĐTH 5

5 Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất. Chiều cao hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.



Hình 10

a) Hãy biểu thị y theo x.

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}.$$

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

– *Mục đích:* Vận dụng khảo sát hàm số để giải quyết bài toán thực tế.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc nhóm (mỗi nhóm từ hai đến bốn HS) và trình bày lên bảng, GV nhận xét, điều chỉnh (nếu cần).

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $y = \dfrac{250}{x}$.

b) Diện tích xung quanh của chiếc hộp: $S_1 = 2.(x + y).2 = 4\left(x + \dfrac{250}{x}\right)$.

Diện tích hai đáy của chiếc hộp: $S_2 = 2xy = 2x.\dfrac{250}{x} = 500$.

Vậy diện tích toàn phần của chiếc hộp:

$$S(x) = S_1 + S_2 = 4\left(x + \frac{250}{x}\right) + 500 = 500 + 4x + \frac{1000}{x}.$$

c) Đạo hàm: $S'(x) = \dfrac{4x^2 - 1000}{x^2}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{10}$ hay $x = -5\sqrt{10}$ (loại).

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Bảng biến thiên:

x	0		$5\sqrt{10}$		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$S(5\sqrt{10})$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Từ bảng biến thiên của hàm số ở câu c), ta thấy $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 5\sqrt{10}$, lúc đó ta cũng có $y = 5\sqrt{10}$.

Vậy khi hộp có đáy là hình vuông cạnh bằng $5\sqrt{10}$ cm thì dùng ít vật liệu nhất.

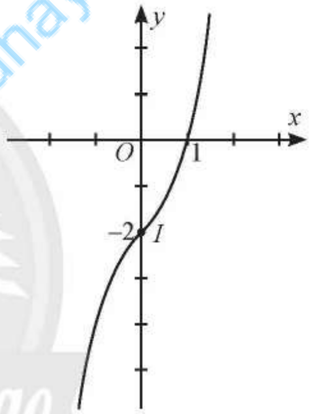
IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 1$. Do $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(1; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -2)$.

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(0; -2)$.



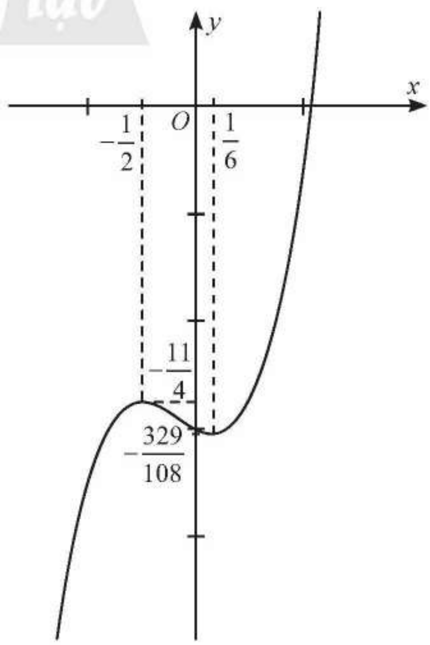
b) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 6x^2 + 2x - \frac{1}{2}$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{11}{4}$	$\searrow$	$-\frac{329}{108}$	$\nearrow$	$+\infty$



Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Đồ thị của hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -3)$, có điểm cực đại $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$, điểm cực tiểu $\left(\frac{1}{6}; -\frac{329}{108}\right)$ và có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{6}; -\frac{313}{108}\right)$.

2. a) Hàm số có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y'' = 6x - 6$. Ta có $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó $y = 0$.

Vậy $I(1; 0)$.

b) Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị có $A(0; 2)$ là điểm cực đại và điểm $B(2; -2)$ là điểm cực tiểu.

Ta có $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 = x_I$; $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0 = y_I$.

Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

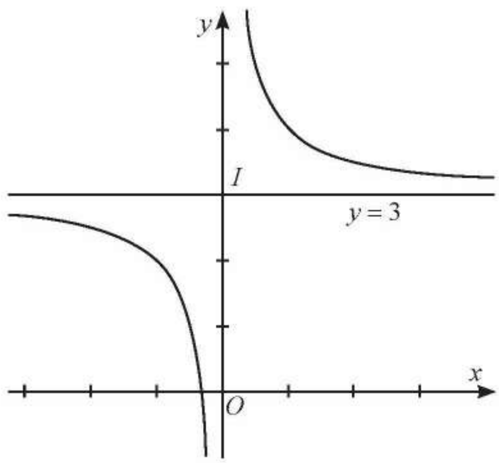
3. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm $y' = -\frac{1}{x^2}$. Do $y' < 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3



Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$, có tâm đối xứng là điểm $I(0; 3)$ và có các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 0$ và $y = 3$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = -\dfrac{2}{(1-x)^2}$. Do $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

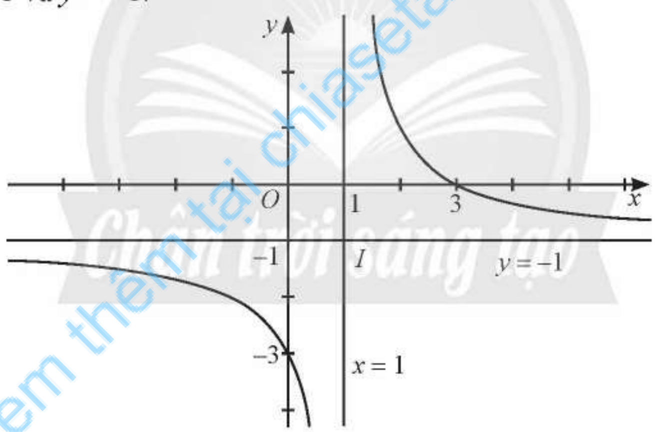
Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(3; 0)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -3)$, có tâm đối xứng là $I(1; -1)$, có các trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = -1$.



4. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

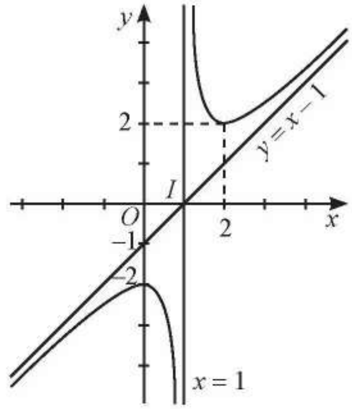
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -2)$, điểm cực đại là điểm $(0; -2)$, điểm cực tiểu là $(2; 2)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 0)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x - 1$.



b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{8x^2 - 8x}{(1-2x)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

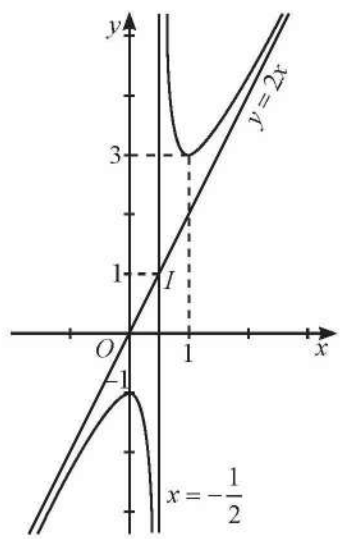
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|| $-$		0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		-1	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$, điểm cực đại là điểm $(0; -1)$, điểm cực tiểu là điểm $(1; 3)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = \dfrac{1}{2}$ và $y = 2x$.



Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

5. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

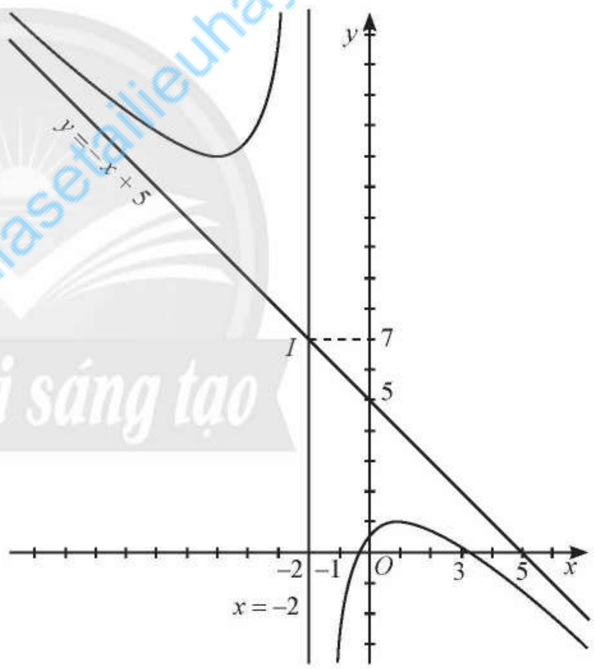
Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -5$ và $x = 1$.

Đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x + 5$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	13	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:



Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}; 0\right)$ và $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}; 0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$; điểm cực tiểu là $A(-5; 13)$, điểm cực đại là $B(1; 1)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2; 7)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x + 5$.

b) Gọi J là trung điểm đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có: $x_J = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-5+1}{2} = -2$; $y_J = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{13+1}{2} = 7$.

Dễ thấy $J(-2; 7)$ chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

6. a) Đáy hộp là hình vuông có cạnh $6 - 2x$. Chiều cao hộp là x.

Do đó thể tích hộp là: $V(x) = (6-2x)^2 \cdot x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$.

b) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $V'(x) = 12x^2 - 48x + 36$;

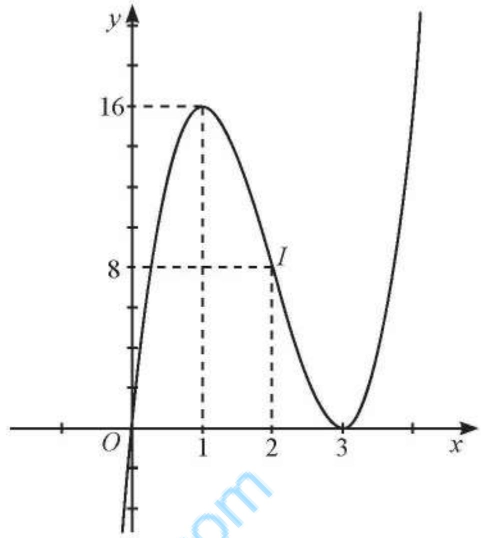
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



Đồ thị của hàm số qua gốc toạ độ, có điểm cực đại là điểm (1; 16), điểm cực tiểu là điểm (3; 0), có tâm đối xứng là điểm $I(2; 8)$.

Vậy độ dài cạnh hình vuông bạn Việt cần cắt bỏ là 1 dm.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. A **2.** B **3.** B **4.** C **5.** C **6.** A **7.** B **8.** C

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Ta có $0 \le a \le 10$ và $0 \le b \le 10$. Vì $a + b = 10$ nên $b = 10 - a$.

a) $ab = a(10 - a) = -a^2 + 10a$.

Xét $f(a) = -a^2 + 10a$.

$f'(a) = -2a + 10$; $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 5$.

Ta có $f(0) = f(10) = 0$; $f(5) = 25$. Do đó $\max\limits_{[0;10]} f(x) = f(5) = 25$.

Vậy biểu thức ab đạt giá trị lớn nhất là 25 khi $a = 5$ và $b = 10 - 5 = 5$.

b) $a^2 + b^2 = a^2 + (10 - a)^2 = 2a^2 - 20a + 100$.

Xét $g(a) = 2a^2 - 20a + 100$.

$g'(a) = 4a - 20$; $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 5$.

Ta có $g(0) = g(10) = 100$; $g(5) = 50$. Do đó $\min\limits_{[0;10]} g(a) = g(5) = 50$.

Vậy tổng bình phương của a và b đạt giá trị nhỏ nhất là 50 khi $a = 5$ và $b = 10 - 5 = 5$.

c) $ab^2 = a(10 - a)^2 = a^3 - 20a^2 + 100a$.

Xét $h(a) = a^3 - 20a^2 + 100a$.

$h'(a) = 3a^2 - 40a + 100$; $h'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 10$ hoặc $a = \dfrac{10}{3}$.

Ta có $h(0) = h(10) = 0$; $h\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{4000}{27}$. Do đó $\max\limits_{[0;10]} h(a) = h\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{4000}{27}$.

Vậy biểu thức ab^2 đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{4000}{27}$ khi $a = \dfrac{10}{3}$ và $b = 10 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3}$.

Xem thêm tại chiasetailieumay.com
Chân trời sáng tạo

10. Đồ thị hàm số bậc ba đi qua ba điểm (0; 5), (1; 1) và (3; 5), trong đó có hai điểm cực trị là (1; 1) và (3; 5) nên đồ thị hàm số này còn đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị, là điểm $I(2; 3)$.

Với công thức tổng quát $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và biết toạ độ bốn điểm thuộc đồ thị hàm số, ta thiết lập được công thức của hàm số cần tìm là: $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.

11. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = x^2 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(0; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 4$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = \dfrac{8}{3}$.

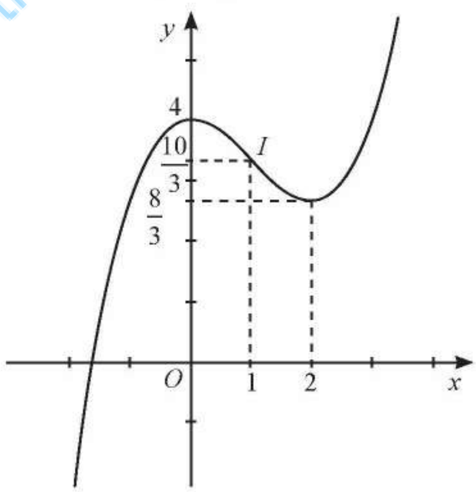
Các giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\dfrac{8}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

Điểm (0; 4) là điểm cực đại và điểm $\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(1; \dfrac{10}{3}\right)$.



b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $\sqrt{(2-0)^2 + \left(\dfrac{8}{3} - 4\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

12. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$ không xác định khi $x = 1$ và $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

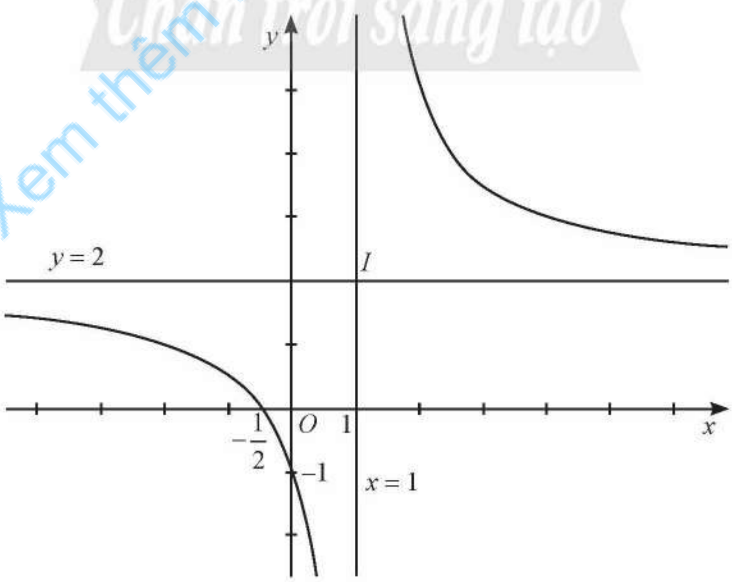
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 2

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 2)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = 2$.



b) Ta có $A(0;\ -1)$ và $I(1;\ 2)$. Do B là điểm đối xứng với A qua I nên I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A \\ y_B = 2y_I - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2.1 - 0 \\ y_B = 2.2 - (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 5. \end{cases}$

Vậy $B(2;\ 5)$.

Thay toạ độ của B vào hàm số đã cho, ta được: $5 = \dfrac{2.2+1}{2-1}$ là đẳng thức đúng nên điểm B thuộc đồ thị hàm số đã cho.

13. a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Trên các khoảng $(-\infty;\ -1)$ và $(3;\ +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(-1;\ 1)$ và $(1;\ 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

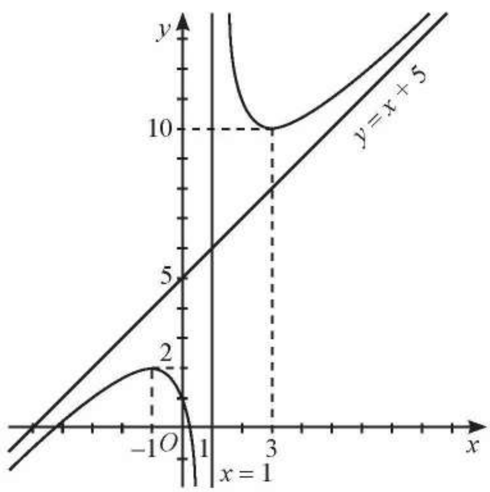
Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 5$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	10	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại hai điểm có hoành độ là $x_1 = -2 - \sqrt{5}$ và $x_2 = -2 + \sqrt{5}$, giao với trục Oy tại điểm $(0;\ 1)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(1;\ 6)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x + 5$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) Ta có $y(2) = 11$; $y(4) = \dfrac{31}{3}$; $y_{CT} = y(3) = 10$.

Do đó, $\max\limits_{[2;\,4]} y = 11$ và $\min\limits_{[2;\,4]} y = 10$.

14. a) Từ hình phẳng trong Hình 4b, ta có tỉ lệ: $\dfrac{12-h}{12} = \dfrac{r}{5}$.

Suy ra $r = \dfrac{5(12-h)}{12}$.

b) Thể tích khối trụ là: $V(h) = Sh = \pi r^2 h = \pi.\left[\dfrac{5(12-h)}{12}\right]^2.h = \dfrac{25\pi h(12-h)^2}{144}$.

c) Xét hàm số $V(h)$, với $h \in [0;\,12]$, ta có

$V'(h) = \dfrac{25\pi}{48}h^2 - \dfrac{25\pi}{3}h + 25\pi$;

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 4$ hoặc $h = 12$.

Ta có $V(0) = 0$; $V(12) = 0$; $V(4) = \dfrac{400\pi}{9}$.

Do đó $\max\limits_{[0;\,12]} V(h) = \dfrac{400\pi}{9}$.

Vậy để khối trụ có thể tích lớn nhất thì $h = 4$ cm.

15. a) Tập xác định: $D = [30;\,120]$.

Đạo hàm $\overline{C}' = \dfrac{2x^2 - 7\,200}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 60 \in [30;\,120]$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \overline{C}(x)$ trên $[30;\,120]$:

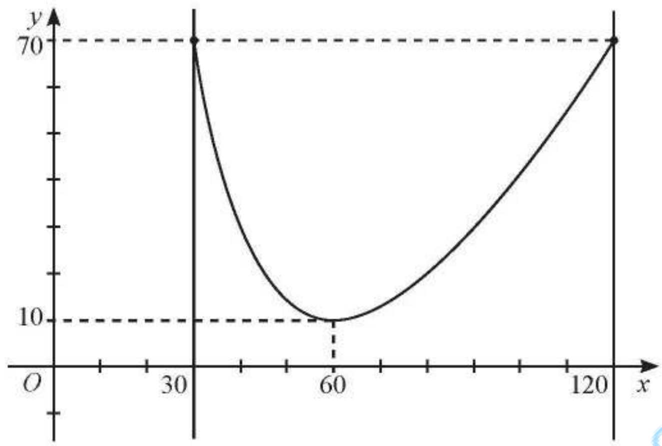
x	30		60		120
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	70	$\searrow$	10	$\nearrow$	70

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Chân trời sáng tạo

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số đi qua các điểm (30; 70), (120; 70), có điểm cực tiểu là điểm (60; 10).



b) Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy khi $x = 60$ thì hàm $\overline{C}(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên [30; 120].

Vậy nhà hàng cần chế biến 60 phần ăn mỗi ngày để chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

16. a) Với $l = 10$ ta có $R = \dfrac{10\rho}{S}$. Với điện trở suất ρ là hằng số, ta xem R là hàm số theo biến số S (với $S > 0$). Khi đó $R' = -\dfrac{10\rho}{S^2}$ và R' luôn âm nên hàm số R nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nghĩa là tiết diện S càng nhỏ thì điện trở R càng lớn.

b) Toạ độ giao điểm của đường thẳng $R = 0{,}001$ với đồ thị hàm số là (0,000169; 0,001) cho biết khi dây dẫn có tiết diện $S = 0{,}000169$ m^2 thì điện trở của dây dẫn là $R = 0{,}001$ Ω.

c) Với $R = 0{,}001$ Ω và $S = 0{,}000169$ m^2 thì điện trở suất của dây dẫn cho bởi:

$$R = \frac{10\rho}{S} \Rightarrow \rho = \frac{R.S}{10} = \frac{0{,}001\,.\,0{,}000169}{10} = 0{,}0000000169 = 1{,}69\,.\,10^{-8}\ (\Omega\text{m}).$$

Dựa vào bảng điện trở suất, ta thấy dây dẫn được làm bằng đồng.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương II

VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. MỤC TIÊU

1. Năng lực toán học

Phát triển cho HS một số năng lực toán học qua các yêu cầu cần đạt:

– Nhận biết được vectơ và các phép toán vectơ trong không gian (tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ).

– Nhận biết được toạ độ của một vectơ đối với hệ trục toạ độ trong không gian.

– Xác định được độ dài của một vectơ khi biết toạ độ điểm đầu và điểm cuối của nó. Xác định được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.

– Vận dụng được toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Phát triển năng lực chung

– Năng lực tự chủ và tự học trong tìm tòi, khám phá kiến thức mới.

– Năng lực giao tiếp và hợp tác trong trình bày, thảo luận và làm việc nhóm.

– Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo trong thực hành và vận dụng.

3. Hình thành các phẩm chất

– Yêu nước, nhân ái.

– Chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm.

Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

B. HƯỚNG DẪN DẠY HỌC

BÀI 1. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được khái niệm vectơ và các phép toán vectơ trong không gian.

– Tính được tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.

– Vận dụng được các phép toán vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. GV cần giúp HS kết hợp các trải nghiệm về vectơ trong mặt phẳng và hình học không gian đã học ở lớp 10 và 11 để nhận biết khái niệm vectơ trong không gian.

2. GV cần tạo nhiều cơ hội để HS có thể vận dụng các tính chất của vectơ trong không gian vào các tình huống thực tiễn cụ thể.

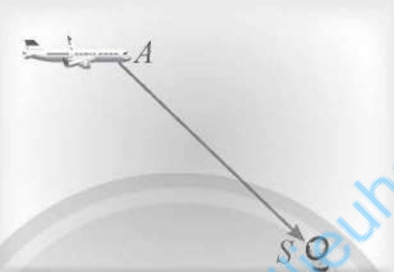
3. GV nên đưa vào một số bài tập vận dụng kiến thức liên môn tích hợp có sử dụng vectơ trong không gian.

4. GV có thể sử dụng phần mềm đồ hoạ như GeoGebra 3D, Mathematica, … để giúp HS hình dung rõ ràng các khái niệm về vectơ trong không gian; thấy được cách các vectơ biểu diễn trong không gian, cũng như hiểu rõ hơn về các phép toán như cộng, trừ vectơ, nhân một số với vectơ, tích vô hướng của hai vectơ, ...

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Trong không gian, làm thế nào để biểu diễn độ dịch chuyển tín hiệu vô tuyến từ máy bay đến trạm kiểm soát trên mặt đất?



– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội thảo luận về khái niệm vectơ trong không gian thông qua tình huống biểu diễn độ dịch chuyển của tín hiệu vô tuyến từ máy bay đến trạm kiểm soát trên mặt đất. Từ đó, dẫn dắt HS đến định nghĩa đoạn thẳng có hướng. Cách đặt vấn đề này có khả năng thu hút HS vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

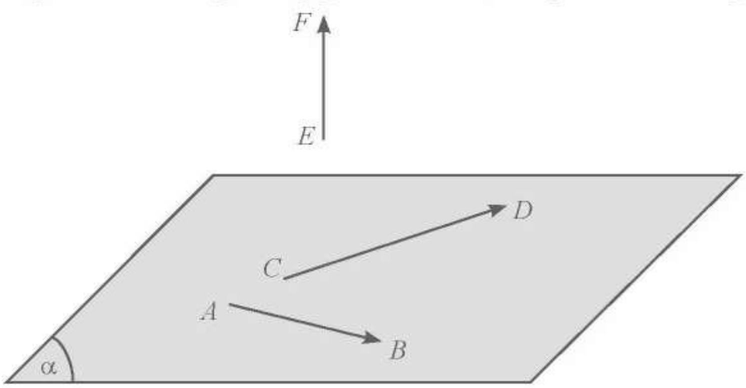
– *Hướng dẫn, đáp án:* Dùng đoạn thẳng có hướng chỉ từ vị trí A của máy bay đến vị trí S của trạm kiểm soát.

1. Vectơ trong không gian

HĐKP 1

1 Nhắc lại định nghĩa vectơ trong mặt phẳng.

Có thể định nghĩa vectơ trong không gian như đã định nghĩa vectơ trong mặt phẳng không?



Hình 1

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội ôn tập lại khái niệm vectơ trong mặt phẳng và mở rộng thành khái niệm vectơ trong không gian.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GVđánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Có thể định nghĩa vectơ trong không gian như định nghĩa vectơ trong mặt phẳng bằng cách sử dụng đoạn thẳng có hướng trong không gian.

HĐTH 1

1 Trong ▶, tìm vectơ biểu diễn độ dịch chuyển tín hiệu vô tuyến từ vị trí A của máy bay đến vị trí S của trạm kiểm soát.

– *Mục đích:* HS thực hành nhận biết vectơ trong không gian trong tình huống biểu diễn độ dịch chuyển để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Vectơ $\overrightarrow{AS}$.

HĐTH 2

2 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

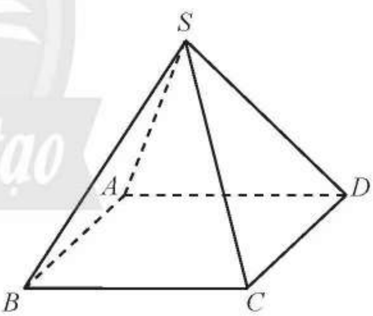
a) Chỉ ra các vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy.

b) Tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$.

c) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$.

– *Mục đích:* HS thực hành nhận biết vectơ trong không gian có giá là các cạnh bên của hình chóp để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.



– *Hướng dẫn, đáp án:*

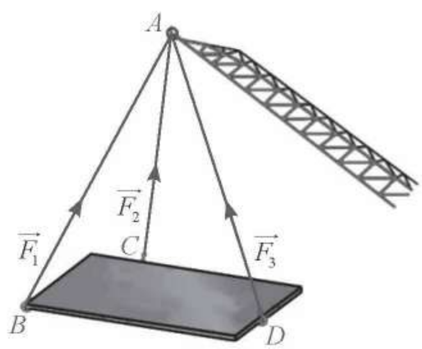
a) $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$.

b) $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{DS}$.

c) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$.

HĐVD 1

1 Trong Hình 4, cho biết ba vectơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ biểu diễn lực căng của các sợi dây cáp AB, AC, AD tác dụng lên vật nặng. Giá của ba vectơ này có cùng nằm trên một mặt phẳng không?



Hình 4

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế tìm vectơ biểu diễn các lực căng trong không gian.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Giá của ba vectơ trên là ba cạnh bên của một hình chóp tam giác nên không cùng nằm trên một mặt phẳng.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Tổng của hai vectơ

HĐKP 2

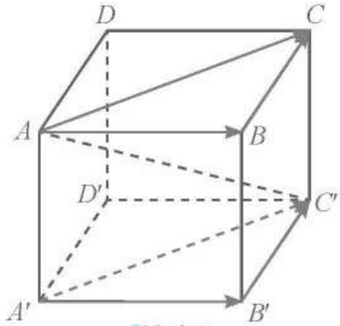
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 5).

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, tìm vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, tìm vectơ tổng $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$.



Hình 5

– *Mục đích:* Giúp HS làm quen với phép cộng vectơ trong không gian dựa trên phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$.

c) Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$.

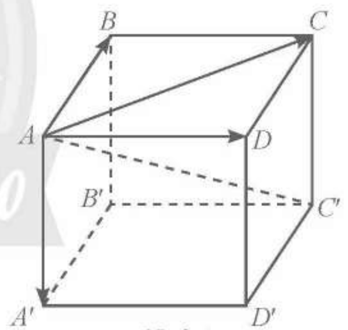
Quy tắc hình hộp

HĐKP 3

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$.

b) Dùng kết quả của câu a và tính chất kết hợp của phép cộng vectơ để chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



Hình 9

– *Mục đích:* Giúp HS làm quen với quy tắc hình hộp để cộng ba vectơ trong không gian dựa trên phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

HĐTH 3

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Tìm các vectơ:

a) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$;   b) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}$.

– *Mục đích:* HS thực hành cộng vectơ trong không gian để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DF}$.

b) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HB}$.

Hiệu của hai vectơ

HĐKP 4

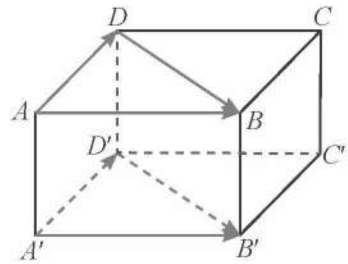
4 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, tìm vectơ hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, tìm vectơ hiệu $\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'D'}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{D'B'}$.

c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'D'}$.



Hình 13

– *Mục đích:* Giúp HS làm quen với phép trừ vectơ trong không gian dựa trên phép trừ vectơ trong mặt phẳng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{D'B'}$.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{D'B'}$.

c) Vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'D'}$.

HĐTH 4, 5

4 Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm các vectơ:

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}$;　　b) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NC}$.

5 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài các vectơ sau đây:

a) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$;　　b) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$.

– *Mục đích:* HS thực hành cộng và trừ vectơ trong không gian để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

HĐTH 4:

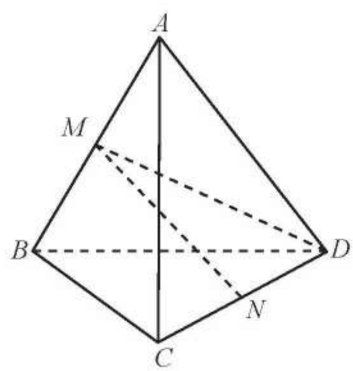
a) Ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}$.

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$.

Suy ra

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}=(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM})+\overrightarrow{MN}+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})=\overrightarrow{MN}$.

b) Ta có $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MN}$.



Xem thêm tại chiasetailieu.com
Chân trời sáng tạo

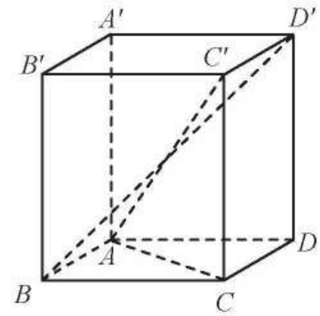
HĐTH 5:

a) Ta có $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$,

suy ra $|\vec{a}| = BD' = a\sqrt{3}$.

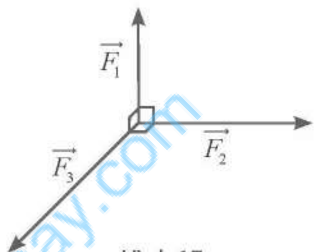
b) Ta có $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$,

suy ra $|\vec{b}| = C'C = a$.



HĐVD 2

2 Ba lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N (Hình 17). Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Hình 17

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng phép cộng vectơ vào thực tế thông qua việc tính độ lớn của hợp lực.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Độ lớn của hợp lực là $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ (N).

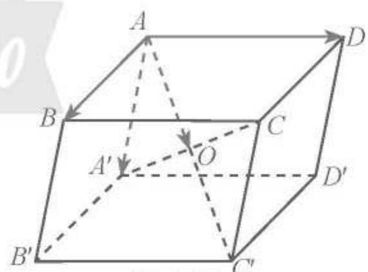
3. Tích của một số với một vectơ

HĐKP 5

5 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' và $A'C$ cắt nhau tại O (Hình 18).

a) Tìm vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

b) Cho biết mối quan hệ giữa vectơ tìm được ở câu a) và vectơ $\overrightarrow{AO}$.



Hình 18

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá phép toán tìm tích của một số với một vectơ.

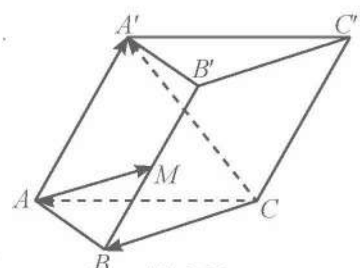
– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$; b) $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO}$.

HĐTH 6

6 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB' (Hình 20). Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Hình 20

Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* HS thực hành kết hợp các phép cộng trừ và nhân một số với một vectơ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

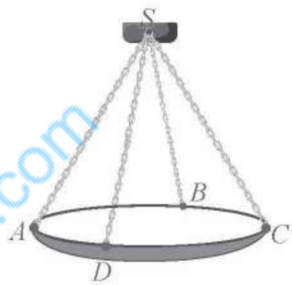
– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB'}) - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'}) - \overrightarrow{CA}$

$$= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

HĐVD 3

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$ (Hình 22).



Hình 22

a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

b) Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế tính độ lớn của trọng lực tác động lên chiếc đèn chùm và lực căng trên mỗi sợ dây của đèn.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Độ lớn của trọng lực tác động lên đèn chùm là: $P = 5\ .\ 10 = 50$ (N).

b) Gọi độ lớn của lực căng trên mỗi sợi xích là x (N).

Ta có $4\ .\ \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 50$, suy ra $x \approx 14{,}43$ (N).

Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là khoảng 14,43 N.

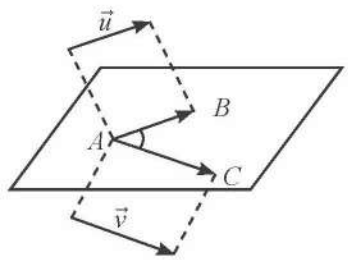
4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

HĐKP 6

a) Nhắc lại định nghĩa góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mặt phẳng.

b) Làm thế nào để định nghĩa góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian?



Hình 23

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá khái niệm góc giữa hai vectơ trong không gian thông qua việc áp dụng góc giữa hai vectơ trong mặt phẳng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) Xem lại SGK Toán 10, tập một (Chân trời sáng tạo).

b) Làm tương tự như trong mặt phẳng.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐTH 7

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'})$, $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'})$.

– *Mục đích:* HS thực hành tìm góc giữa hai vectơ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.
– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.
– *Hướng dẫn, đáp án:*

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{COD} = 90^\circ$ (O là tâm của hình vuông $ABCD$);

$(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}) = (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{DA'}) = 180^\circ - \widehat{AA'D} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

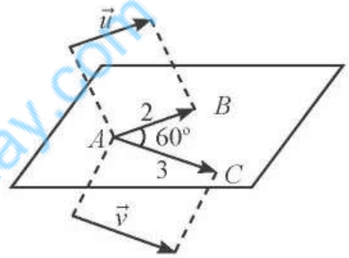
Tích vô hướng của hai vectơ

HĐKP 7

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thoả mãn $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (Hình 25). Giả sử $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

a) Tính góc $(\vec{u}, \vec{v})$.

b) Trong mặt phẳng (ABC), tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Hình 25

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá khái niệm tích vô hướng của hai vectơ trong không gian thông qua việc áp dụng tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng.
– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.
– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 60^\circ$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2.3.\cos 60^\circ = 3$.

HĐTH 8

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})$ (kết quả làm tròn đến phút).

– *Mục đích:* HS thực hành tính tích vô hướng của hai vectơ trong không gian để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.
– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.
– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{A'C'}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = AB.A'C'.\cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

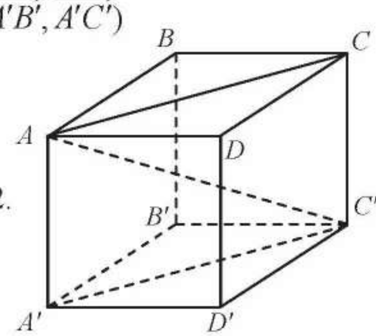
$= AB.A'C'.\cos\widehat{B'A'C'} = 1.\sqrt{2}.\cos 45^\circ = 1$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'}$, suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = 0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CC'} = 2$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC'}}{|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{AC'}|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) \approx 35^\circ 16'$.



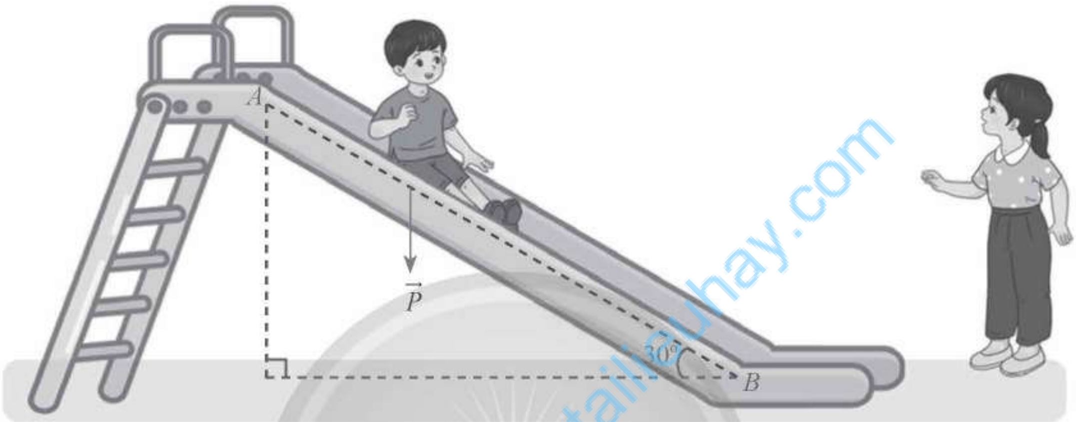
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐVD 4

Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình 27).

a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9{,}8$ m/s^2.

b) Cho biết công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F}.\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.



Hình 27

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức tích vô hướng vào thực tế tính công sinh bởi một lực khi thực hiện một độ dời.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

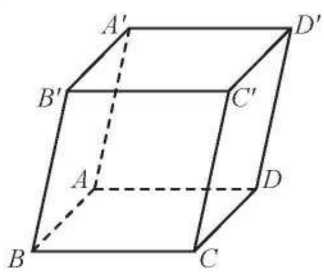
– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác dụng lên em nhỏ là $P = mg = 25 \,.\, 9{,}8 = 245$ (N).

b) Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là

$$A = |\vec{P}|.|\vec{d}|.\cos(\vec{P}, \vec{d}) = 245.3,5.\cos 60^\circ = 428,75 \text{ (J)}.$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP



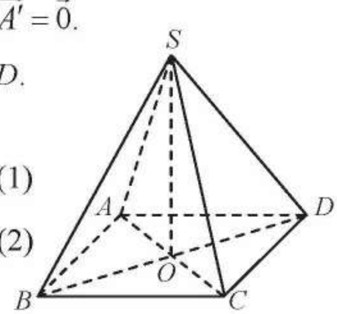
1. a) Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{BB'}$.

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \vec{0}$.



2. Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra O là trung điểm của AC và BD.

Ta có:

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{SO}$. (1)

$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{SO}$. (2)

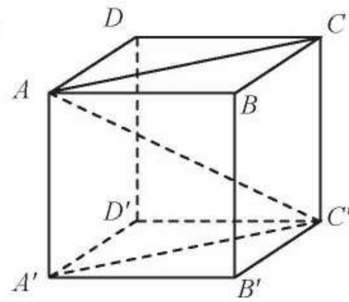
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

3. Giả sử hình lập phương là $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5 và ba lực đó cùng đặt tại điểm A.

Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Lúc này, cường độ của hợp lực là

$\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{AA'^2+A'C'^2}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{2})^2}=5\sqrt{3}$ (N).

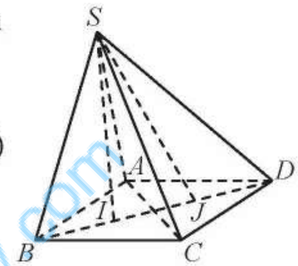


4. Vì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ADC nên

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SI}$, $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=3\overrightarrow{SJ}$.

Suy ra $2\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD})$

$=3\overrightarrow{SI}+3\overrightarrow{SJ}=3(\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{SJ})$.



5. Ta có $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$;

$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'})-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

6. Độ lớn của lực hấp dẫn là 0,102 . 9,8 = 0,9996 (N).

7. Độ lớn của lực tĩnh điện là 10^{-9} . 10^{5} = 10^{-4} (N).

8. Công A sinh ra bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ là:

$A=\vec{F}(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN})=\vec{F}.\overrightarrow{MN}=\vec{F}.\overrightarrow{MH}=qEd=2\,.\,10^{-12}\,.\,1{,}8\,.\,10^{5}\,.\,5\,.\,10^{-3}=18.10^{-10}$ (J).

BÀI 2. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được:

+ Hệ trục toạ độ trong không gian.

+ Toạ độ của một vectơ và toạ độ của một điểm đối với hệ trục toạ độ.

– Xác định được một hệ toạ độ trong không gian từ các hình khối quen thuộc.

– Vận dụng được toạ độ của vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. GV có thể bắt đầu bài giảng bằng việc giới thiệu toạ độ trong không gian và giải thích sự khác biệt giữa toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian. Mô tả cách xác định mỗi điểm trong không gian bằng bộ ba số $(x; y; z)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

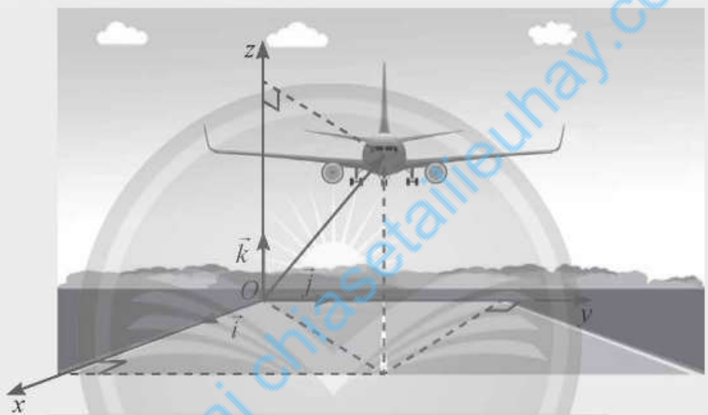
2. Khi thực hiện các bài giảng hình học về vectơ trong không gian, GV nên liên kết kiến thức này với các vấn đề thực tế như tốc độ và hướng di chuyển trong không gian; chia sẻ các ứng dụng thực tế của toạ độ vectơ trong các lĩnh vực như Vật lí, Đồ hoạ máy tính và Khoa học máy tính.

3. GV đặt ra các bài toán tích hợp và thực hành để HS áp dụng kiến thức vào việc giải quyết vấn đề. Thông qua việc kết hợp lí thuyết, hình ảnh, ví dụ và bài tập thực hành, GV có thể giúp HS nắm vững kiến thức về toạ độ vectơ trong không gian và áp dụng chúng vào các tình huống thực tế.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Trong kiểm soát không lưu, người ta dùng bộ ba số để xác định vị trí của máy bay. Người ta đã làm điều đó như thế nào?



– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội thảo luận về mục đích của hệ toạ độ trong không gian thông qua tình huống cần xác định vị trí của máy bay trong không gian $Oxyz$. Cách đặt vấn đề này có khả năng thu hút HS vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Xây dựng hệ toạ độ trong không gian tương tự như trong mặt phẳng, sử dụng bộ ba số để xác định hoành độ, tung độ và cao độ.

1. Hệ toạ độ trong không gian

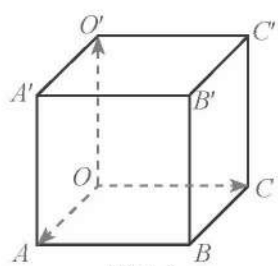
HĐKP 1

Cho hình lập phương $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh bằng 1.

Đặt $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OC}$; $\vec{k} = \overrightarrow{OO'}$.

a) Nêu nhận xét về phương và độ dài của ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) Nêu nhận xét về ba trục toạ độ $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$, $(O; \vec{k})$.



Hình 1

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội trải nghiệm, thảo luận về cách xây dựng một hệ toạ độ trong không gian.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

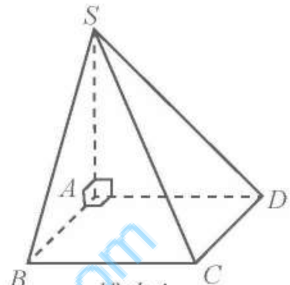
– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ có phương đôi một vuông góc và cùng có độ dài bằng 1.

b) Ba trục toạ độ $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$, $(O; \vec{k})$ có cùng có gốc toạ độ là O và có vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

HĐTH 1

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 1 (Hình 4). Vẽ hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ.



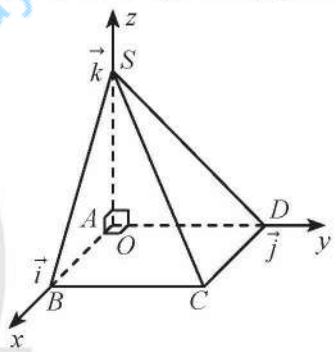
Hình 4

– *Mục đích:* HS thực hành nhận biết các thành phần của một hệ toạ độ trong không gian để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Với gốc toạ độ O trùng với điểm A, ta chọn tia AB là trục Ox, tia AD là trục Oy, tia AS là trục Oz.

Ba vectơ đơn vị trên ba trục toạ độ lần lượt là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$.

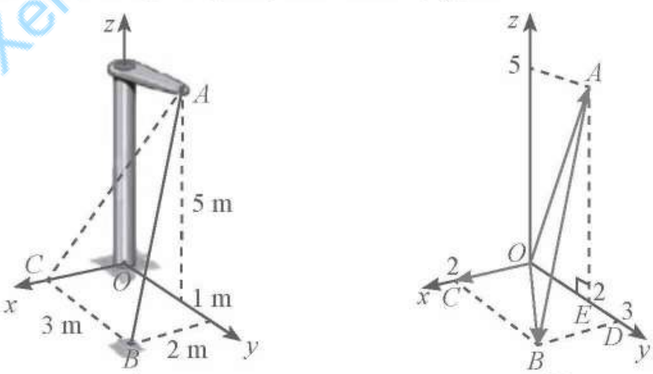


HĐVD 1

1 Một thiết kế cơ khí trong Hình 5a được biểu diễn trong không gian $Oxyz$ như Hình 5b.

a) Hãy vẽ ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt trên ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz (mỗi vectơ đơn vị có độ dài bằng 1 m).

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ theo $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



a) b)

Hình 5

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế xác định ba vectơ đơn vị trên một thiết kế cơ khí đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ và biểu diễn các vectơ khác theo ba vectơ đơn vị.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Vẽ ba vectơ đơn vị.

b) $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OA} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$,

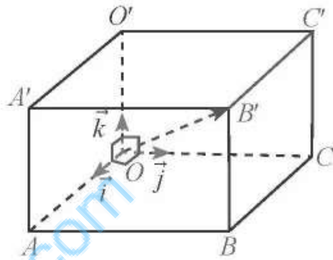
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) - (2\vec{j} + 5\vec{k}) = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$.

2. Toạ độ của điểm và vectơ

Toạ độ của điểm

HĐKP 2

Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 3$, $OC = 5$, $OO' = 2$. Vẽ ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt trên các cạnh OA, OC, OO'. Biểu diễn $\overrightarrow{OB'}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Hình 6

– *Mục đích:* Giúp HS làm quen với cách xác định toạ độ một vectơ trong không gian theo ba vectơ đơn vị trên ba trục toạ độ.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

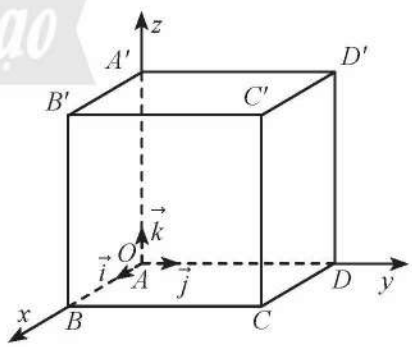
HĐTH 2

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O trùng với A; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định toạ độ các điểm B, C, C'.

– *Mục đích:* HS thực hành xác định toạ độ của các điểm trong không gian để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

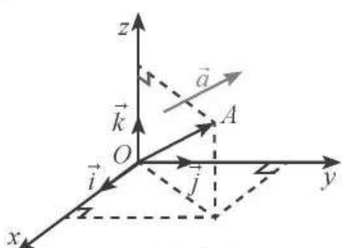
– *Hướng dẫn, đáp án:* $B(5; 0; 0)$; $C(5; 5; 0)$, $C'(5; 5; 5)$.



Toạ độ của vectơ

HĐKP 3

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Vẽ điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Gọi $(a_1; a_2; a_3)$ là toạ độ của điểm A. Hãy biểu diễn $\vec{a}$ theo ba vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Hình 9

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá khái niệm toạ độ của một vectơ thông qua việc so sánh với toạ độ của một điểm trong không gian $Oxyz$.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

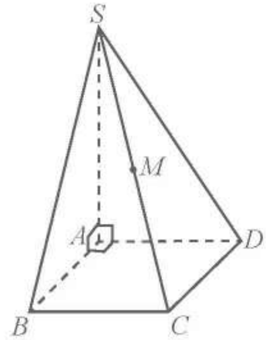
Xem thêm tài chiasetailieuhay.com

HĐTH 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 3 (Hình 11).

a) Vẽ hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A, các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ.

b) Trong hệ toạ độ nói trên, tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC.

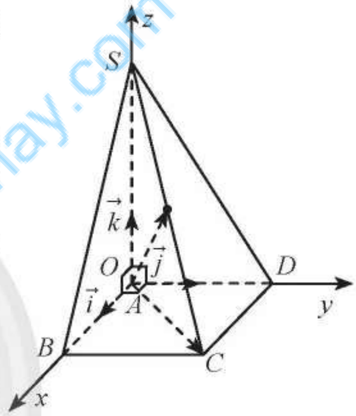


Hình 11

– *Mục đích:* HS thực hành xác định toạ độ của các điểm và các vectơ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*



a) Với A là gốc toạ độ, ta chọn tia AB là tia Ox, tia AD là tia Oy, tia AS là tia Oz. Ba vectơ đơn vị trên ba trục toạ độ lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ với độ dài của $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt bằng $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{2}AD$, $\frac{1}{2}AS$.

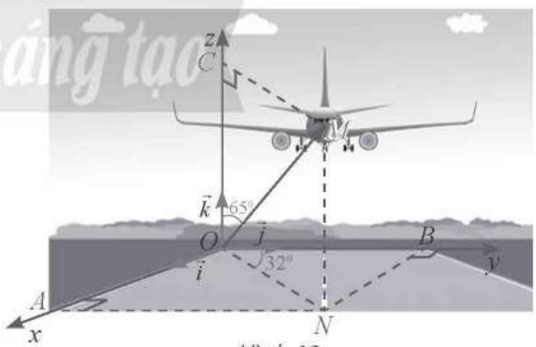
b) $\overrightarrow{AB} = (2; 0; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{AS} = (0; 0; 3)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (2; 2; 0)$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}) = \left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$.

HĐVD 2

Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình 12, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32°$, $\widehat{MOC} = 65°$.

Tìm toạ độ điểm M.



Hình 12

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng khái niệm toạ độ của điểm và vectơ trong không gian vào thực tế xác định toạ độ của vị trí máy bay.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Xét tam giác COM vuông tại C có: $OC = OM \,.\, \cos\widehat{MOC} = 14 \,.\, \cos 65° \approx 5{,}9$;

$ON = MC = OM \,.\, \sin\widehat{MOC} = 14 \,.\, \sin 65° \approx 12{,}7$.

Xét tam giác OBN vuông tại B có: $OB = ON \,.\, \cos\widehat{NOB} = 12{,}7 \,.\, \cos 32° \approx 10{,}8$;

$OA = BN = ON \,.\, \sin\widehat{NOB} \approx 12{,}7 \,.\, \sin 32° \approx 6{,}7$.

Do đó, ta có $A(6{,}7; 0; 0)$; $B(0; 10{,}8; 0)$; $C(0; 0; 5{,}9)$. Suy ra toạ độ điểm M biểu diễn vị trí của máy bay là $M(6{,}7; 10{,}8; 5{,}9)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) $\vec{a} = (5;\ 7;\ -3)$; $\vec{b} = (2;\ 0;\ 4)$.

b) $M(4;\ -1;\ 3)$; $N(8;\ -5;\ 0)$.

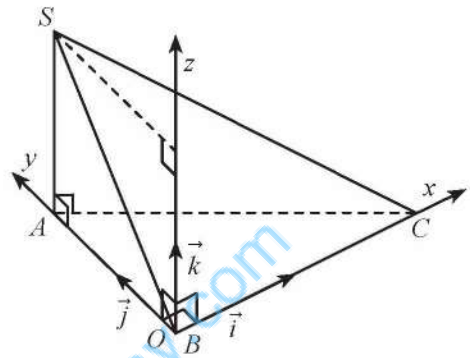
2. a) $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{k}$.

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\overrightarrow{OB} = 5\vec{j}$.

3. a) Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ O trùng với điểm B như hình vẽ.

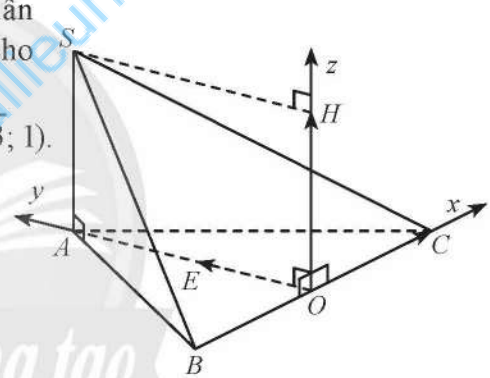
Các vectơ đơn vị trên ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ với độ dài của $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt bằng $\frac{1}{2}BC; \frac{1}{2}BA; \frac{1}{2}AS$.

b) $A(0;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(3;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ 2;\ 2)$.



4. Các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH}$ với E là điểm thuộc tia Oy sao cho $OE = 1$ và H là điểm thuộc tia Oz sao cho $OH = 1$.

Ta có $A(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $B(-1;\ 0;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ \sqrt{3};\ 1)$.



5. Ta có $OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Suy ra $A(0;\ -4;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 4;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 4)$, $M(0;\ 2;\ 2)$.

Do đó, $\overrightarrow{AB} = (3;\ 4;\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0;\ 8;\ 0)$, $\overrightarrow{AS} = (0;\ 4;\ 4)$, $\overrightarrow{AM} = (0;\ 6;\ 2)$.

6. Ta có: $OK = HB = OB.\sin\widehat{BOH} = 15.\sin 30^\circ = \frac{15}{2}$;

$$OH = OB.\cos\widehat{BOH} = 15.\cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $A(0;\ 0;\ 10)$, $B\left(\frac{15}{2};\ \frac{15\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$ nên $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2};\ \frac{15\sqrt{3}}{2};\ -10\right)$.

7. Ta có $OH = OB\ .\ \cos\widehat{HOM} = 50\ .\ \cos 48^\circ \approx 33{,}5$; $MH = OC = OM\ .\sin\widehat{HOM} \approx 37{,}2$;

$AH = OH\ .\ \sin\widehat{AOH} \approx 33{,}5\ .\ \sin 64^\circ \approx 30{,}1$; $OA = OH\ .\ \cos\widehat{AOH} \approx 33{,}5\ .\ \cos 64^\circ \approx 14{,}7$.

Vậy toạ độ của điểm M là $M(14{,}7;\ 30{,}1;\ 37{,}2)$.

Xem thêm tài liệu hay chiasetailieuhay.com

BÀI 3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Xác định được biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ (tổng và hiệu của hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ).

– Xác định được điều kiện để hai vectơ cùng phương, vuông góc.

– Xác định được độ dài của một vectơ khi biết toạ độ hai đầu mút của nó.

– Vận dụng được các biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. GV có thể sử dụng công cụ trực quan như phần mềm GeoGebra hoặc các phần mềm mô phỏng khác để giúp HS hình dung cách các vectơ và phép toán của chúng được biểu diễn trong không gian. Thực hành trực quan này giúp HS dễ dàng hiểu và nhớ các biểu thức thông qua việc nhìn thấy sự biến đổi của các vectơ trong không gian.

2. Liên kết biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ với các ví dụ thực tế trong các lĩnh vực như Vật lí, Kĩ thuật, Thiết kế đồ hoạ hoặc trò chơi.

3. Tổ chức các buổi thảo luận nhóm và giải quyết vấn đề để HS cùng nhau khám phá và giải quyết các bài toán sử dụng biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.

4. Khuyến khích HS tạo ra dự án riêng, có thể áp dụng kiến thức về biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ vào một tình huống cụ thể (thiết kế một cấu trúc đơn giản trong không gian, tạo mô hình mô phỏng vật lí, ...).

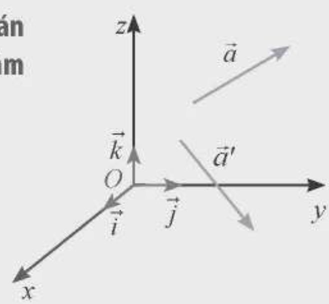
III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Trong không gian *Oxyz*, có thể thực hiện các phép toán vectơ dựa trên toạ độ của chúng tương tự như đã làm trong mặt phẳng *Oxy* không?

$\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{a}' = (x'; y'; z')$

$\vec{a} + \vec{a}' = ?$



– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội thảo luận về cách thực hiện các phép toán vectơ dựa trên toạ độ của chúng trong không gian $Oxyz$ tương tự như đã làm trong mặt phẳng Oxy. Cách đặt vấn đề này có khả năng thu hút HS vào bài học.

Xemthemtai chiasetailieuhay.com

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Trong không gian $Oxyz$, ta có thể thực hiện các phép toán vectơ dựa trên toạ độ của chúng tương tự như đã làm trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

1. Biểu thức toạ độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

HĐKP 1

1 Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực m.

a) Biểu diễn từng vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $m\vec{a}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, từ đó suy ra toạ độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $m\vec{a}$.

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội khám phá các biểu thức toạ độ của các phép toán cộng, trừ hai vectơ và nhân một số với một vectơ.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$;

b) $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\vec{i} + (a_2+b_2)\vec{j} + (a_3+b_3)\vec{k}$; $\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1)\vec{i} + (a_2-b_2)\vec{j} + (a_3-b_3)\vec{k}$;

$m\vec{a} = ma_1\vec{i} + ma_2\vec{j} + ma_3\vec{k}$.

HĐTH 1

1 Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

c) Chứng minh vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{m} = (-6; 15; -9)$.

– *Mục đích:* HS thực hiện các phép toán cộng, trừ các vectơ và nhân một số với một vectơ theo toạ độ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Ta có $4\vec{a} = (8; -20; 12)$, $\frac{1}{3}\vec{b} = \left(0; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $3\vec{c} = (3; 21; 6)$.

Suy ra $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right)$.

b) Ta có $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $4\vec{b} = (0; 8; -4)$, $2\vec{c} = (2; 14; 4)$.

Suy ra $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (0; -27; 3)$.

c) Ta có $\vec{m} = (-6; 15; -9) = -3\vec{a}$. Vậy $\vec{a}$ cùng phương $\vec{m}$.

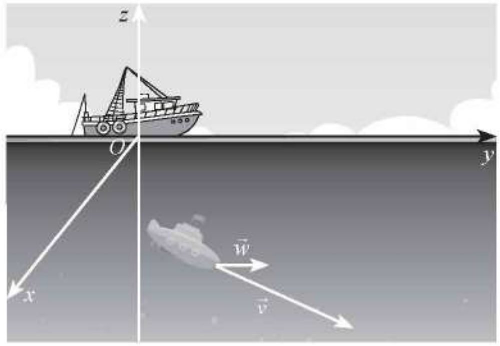
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐVD 1

Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc $\vec{v} = (10; 8; -3)$ (Hình 1). Cho biết vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (3{,}5; 1; 0)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

b) Giả sử thiết bị thăm dò lặn với vận tốc $\vec{u} = (7; 2; 0)$, hãy nêu nhận xét về vectơ vận tốc của nó so với vectơ vận tốc của dòng hải lưu.



Hình 1

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng biểu thức toạ độ của các phép cộng, trừ vectơ vào thực tế tính vận tốc tương đối trong vật lí.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\vec{v} + \vec{w} = (13{,}5; 9; -3)$

b) Ta có $\vec{u} = (7; 2; 0) = 2\vec{w}$. Vậy vectơ vận tốc của thiết bị thăm dò cùng hướng với vectơ vận tốc của dòng hải lưu.

2. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

HĐKP 2

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

a) Biểu diễn từng vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{i}^2, \vec{j}^2, \vec{k}^2, \vec{i}.\vec{j}, \vec{j}.\vec{k}, \vec{k}.\vec{i}$.

c) Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ theo toạ độ của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá biểu thức toạ độ của tích vô hướng bằng cách sử dụng các tính chất của tích vô hướng hai vectơ.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$;

b) $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$; $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$;

c) $\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}).(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐTH 2

Cho ba vectơ $\vec{m} = (-5; 4; 9)$, $\vec{n} = (2; -7; 0)$, $\vec{p} = (6; 3; -4)$.

a) Tính $\vec{m}.\vec{n}$, $\vec{m}.\vec{p}$.

b) Tính $|\vec{m}|, |\vec{n}|, \cos(\vec{m}, \vec{n})$.

c) Cho $\vec{q} = (1; -2; 0)$. Vectơ $\vec{q}$ có vuông góc với $\vec{p}$ không?

– *Mục đích:* HS thực hành tính tích vô hướng bằng cách sử dụng biểu thức toạ độ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\vec{m}.\vec{n} = (-5).2 + 4.(-7) + 9.0 = -38$; $\vec{m}.\vec{p} = (-5).6 + 4.3 + 9.(-4) = -54$.

b) $|\vec{m}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 9^2} = \sqrt{122}$; $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 0^2} = \sqrt{53}$;

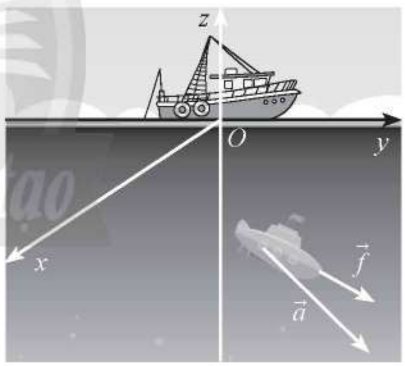
$$\cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m}.\vec{n}}{|\vec{m}|.|\vec{n}|} = \frac{-38}{\sqrt{122.53}} = -\frac{38}{\sqrt{6466}}.$$

c) Ta có $\vec{q}.\vec{p} = 1.6 + (-2).3 + 0.(-4) = 0$ nên $\vec{q}$ vuông góc với $\vec{p}$.

HĐVD 2

Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình 2) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng biểu thức toạ độ của tích vô hướng vào thực tế tính công sinh bởi một lực đẩy trong không gian $Oxyz$.



Hình 2

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Công sinh bởi lực $\vec{f}$ khi thực hiện độ dời $\vec{a}$ là

$$A = \vec{f}.\vec{a} = 5.70 + 4.20 + (-2).(-40) = 510 \text{ (N)}.$$

3. Vận dụng

Xác định toạ độ của vectơ khi biết toạ độ điểm đầu và điểm cuối

HĐKP 3

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Từ biểu thức $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo toạ độ hai điểm A, B.

Xem thêm tại nhasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá công thức tính toạ độ của vectơ khi biết toạ độ điểm đầu và điểm cuối.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$.

HĐTH 3

Cho ba điểm $M(7; -2; 0)$, $N(-9; 0; 4)$, $P(0; -6; 5)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MP}$.

b) Tính các độ dài MN, NP, MP.

– *Mục đích:* HS thực hành tính toạ độ của vectơ và độ dài đoạn thẳng bằng biểu thức toạ độ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\overrightarrow{MN} = (-16; 2; 4)$; $\overrightarrow{NP} = (9; -6; 1)$; $\overrightarrow{MP} = (-7; -4; 5)$.

b) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-16)^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{69}$; $\left|\overrightarrow{NP}\right| = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{118}$;

$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 5^2} = 3\sqrt{10}$.

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

HĐKP 4

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Sử dụng các hệ thức vectơ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, tìm toạ độ của các điểm M và G.

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá công thức tính toạ độ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác trong không gian.

– *Gợi ý tổ chức:* GV yêu cầu HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$;

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

HĐTH 4

Cho tam giác MNP có $M(2; 1; 3)$, $N(1; 2; 3)$, $P(-3; -1; 0)$. Tìm toạ độ:

a) Các điểm M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh NP, MP, MN;

b) Trọng tâm G của tam giác $M'N'P'$.

– *Mục đích:* HS thực hành tính toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $M'\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $N'\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, $P'\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 3\right)$;

b) $G\left(0; \frac{2}{3}; 2\right)$.

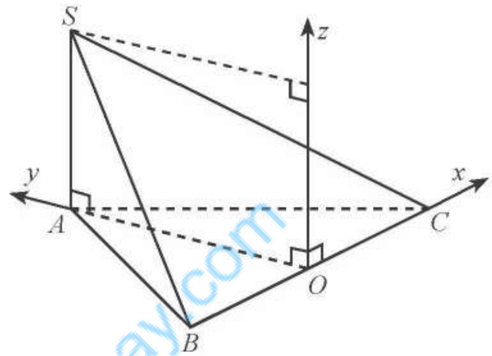
HĐVD 3

3 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a, O là trung điểm của BC. Bằng cách thiết lập hệ toạ độ như Hình 3, hãy tìm toạ độ:

a) Các điểm A, S, B, C;

b) Trung điểm M của SB và trung điểm N của SC;

c) Trọng tâm G của tam giác SBC.



Hình 3

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ để giải các bài toán hình học không gian bằng phương pháp toạ độ.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $A\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; a\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$;

b) $M\left(-\frac{a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{4}; \frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{4}; \frac{a}{2}\right)$;

c) $G\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{6}; \frac{a}{3}\right)$.

HĐTH 5

5 Cho tam giác MNP có $M(0; 1; 2)$, $N(5; 9; 3)$, $P(7; 8; 2)$.

a) Tìm toạ độ điểm K là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MNP.

b) Tìm độ dài các cạnh MN và MP.

c) Tính góc M.

– *Mục đích:* HS thực hành sử dụng biểu thức toạ độ để tính khoảng cách và góc trong không gian $Oxyz$ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

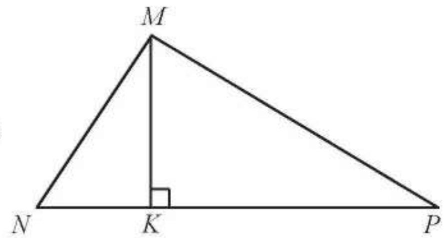
– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Ta có $\overrightarrow{NP} = (2; -1; -1)$.

Gọi $K(x; y; z)$ là chân đường cao của tam giác MNP kẻ từ M.



Ta có $\overrightarrow{NK} = (x-5;\ y-9;\ z-3)$;

$\overrightarrow{NK}$ cùng phương với $\overrightarrow{NP}$, suy ra $\begin{cases} x-5=2t \\ y-9=-t \\ z-3=-t \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=5+2t \\ y=9-t \\ z=3-t. \end{cases}$

Suy ra $K(5+2t;\ 9-t;\ 3-t)$; $\overrightarrow{MK} = (5+2t;\ 8-t;\ 1-t)$.

$\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow (5+2t).2+(8-t).(-1)+(1-t).(-1)=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{6}$.

Vậy $K\left(\dfrac{14}{3}; \dfrac{55}{6}; \dfrac{19}{6}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (5;\ 8;\ 1), \overrightarrow{MP} = (7;\ 7;\ 0)$.

Độ dài cạnh MN và MP là: $MN = \sqrt{5^2+8^2+1^2} = 3\sqrt{10}$; $MP = \sqrt{7^2+7^2+0^2} = 7\sqrt{2}$.

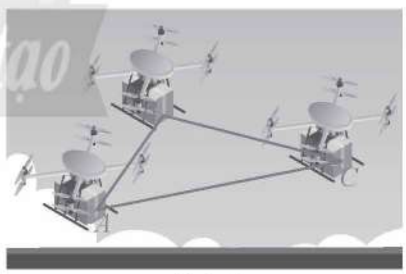
c) Ta có $\cos M = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}{MN.MP} = \dfrac{5.7+8.7+1.0}{3\sqrt{10}.7\sqrt{2}} = \dfrac{13\sqrt{5}}{30} \Rightarrow \widehat{M} \approx 14^\circ 19'$.

HĐVD 4

4 Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C (Hình 7) đang có toạ độ là $A(1;\ 1;\ 1), B(5;\ 7;\ 9), C(9;\ 11;\ 4)$. Tính:

a) Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

b) Góc $\widehat{BAC}$.



Hình 7

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng biểu thức toạ độ tích vô hướng vào thực tế tính khoảng cách và góc giữa các cặp drone giao hàng trong không gian $Oxyz$.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\overrightarrow{AB} = (4;\ 6;\ 8) \Rightarrow AB = 2\sqrt{29}$; $\overrightarrow{BC} = (4;\ 4;\ -5) \Rightarrow BC = \sqrt{57}$;

$\overrightarrow{CA} = (-8;\ -10;\ -3) \Rightarrow CA = \sqrt{173}$.

b) $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{4.8+6.10+8.3}{2\sqrt{29}.\sqrt{173}} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 35^\circ 2'$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

IV. Hướng dẫn giải, đáp án các bài tập

1. a) $\vec{a}.\vec{b} = 5.4 + 2.(-2) + (-4).2 = 8$; b) $\vec{c}.\vec{d} = 2.6 + (-3).5 + 4.(-3) = -15$.

2. Ta có $2\vec{b} = (-4; 6; 2)$, $-\dfrac{3}{2}\vec{a} = \left(0; -\dfrac{3}{2}; -\dfrac{9}{2}\right)$. Suy ra $2\vec{b} - \dfrac{3}{2}\vec{a} = \left(-4; \dfrac{9}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.

3. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; -3; 3)$.

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Chu vi của tam giác ABC là $AB + AC + BC = \sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{19}$.

b) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA.

Khi đó ta có $I\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, $J\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, $K(2; 0; 1)$.

c) $G\left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

4. a) $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(0; 2; 3)$, $M_3(1; 0; 3)$.

b) $M'(-1; -2; -3)$, $M''(1; 2; -3)$, $M'''(-1; 2; -3)$.

5. a) $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

Vì M cách đều hai điểm B, C nên $BM = CM$.

Ta có $BM^2 = CM^2 \Leftrightarrow (0-1)^2 + (y-1)^2 + (0-2)^2 = (0-5)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2$

$$\Leftrightarrow 4y = 29 \Leftrightarrow y = \frac{29}{4}.$$

Vậy $M\left(0; \dfrac{29}{4}; 0\right)$.

b) Vì $N \in (Oxy)$ nên $N(x; y; 0)$.

Vì N cách đều ba điểm A, B, C nên $AN = BN = CN$.

Ta có $AN^2 = BN^2 = CN^2 \Leftrightarrow \begin{cases} AN^2 = BN^2 \\ BN^2 = CN^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 + (0-3)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (0-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (0-2)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -21 \\ 8x + 4y = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

Vậy $N\left(2; \dfrac{13}{4}; 0\right)$.

6. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 4; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; -8; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 15; 0)$.

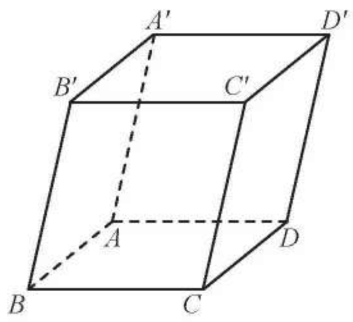
Vì $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $CD \,//\, AB$.

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

7. Gọi $C(x_C; y_C; z_C)$ là một đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Ta có: $\overrightarrow{BC} = (x_C - 2; y_C - 1; z_C - 2)$; $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 2 = 0 \\ y_C - 1 = -1 \Rightarrow C(2;\ 0;\ 2). \\ z_C - 2 = 0 \end{cases}$$

Tương tự, ta có:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow B'(4;\ 6;\ -5)$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow A'(3;\ 5;\ -6)$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'} \Rightarrow D'(3;\ 4;\ -6)$.

8. Công sinh bởi lực $\vec{F}$ là $A = \vec{F}.\vec{d} = 20.150 + 30.200 + (-10).100 = 8\,000$ (J).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. D **2.** D **3.** B **4.** D **5.** A **6.** C **7.** D **8.** A

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. a) Toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ lần lượt là $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ 0)$, $C(0;\ 3;\ 0)$, $O'(0;\ 0;\ 5)$, $A'(2;\ 0;\ 5)$, $C'(0;\ 3;\ 5)$.

b) Ta có $OB' = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$.

10. Ta có $P(2;\ 3;\ 3)$. Suy ra $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}$.

11. Ta có: $-4\vec{v} = (0; -8; 4)$; $-2\vec{w} = (-2; -14; -4)$. Khi đó $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w} = (0; -27; 3)$.

12. Ta có M là điểm nằm trên đoạn BC nên $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ là hai vectơ ngược hướng.

Mà $|\overrightarrow{MB}| = 3|\overrightarrow{MC}|$, suy ra $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$.

Gọi $M(a;\ b;\ c)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = -3(1 - a) \\ 2 - b = -3(-2 - b) \\ 3 - c = -3(-5 - c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \Rightarrow M(1; -1; -3). \\ c = -3 \end{cases}$$

Khi đó $AM = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{30}$.

13. Ta có: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2^2 + 4^2 + 2.2.4.\cos 60^\circ = 28.$$

Suy ra $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

14. a) Gọi $H(x;\ y;\ z)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác OAB.

Ta có: $\overrightarrow{BO} = (0;\ 2;\ -3)$, $\overrightarrow{BH} = (x;\ y + 2;\ z - 3)$.

$\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BH}$ là hai vectơ cùng phương nên $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BO}$, suy ra $H(0;\ -2 + 2k;\ 3 - 3k)$;

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (-1;\, -4+2k;\, 4-3k)$.

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BO} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BO} \Leftrightarrow (-1).0 + (-4+2k).2 + (4-3k).(-3) = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{20}{13}$.

Suy ra $H\left(0;\, \dfrac{14}{13};\, -\dfrac{21}{13}\right)$.

$\overrightarrow{AH} = \left(-1;\, -\dfrac{12}{13};\, -\dfrac{8}{13}\right) \Rightarrow AH = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\dfrac{12}{13}\right)^2 + \left(-\dfrac{8}{13}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{377}}{13}$.

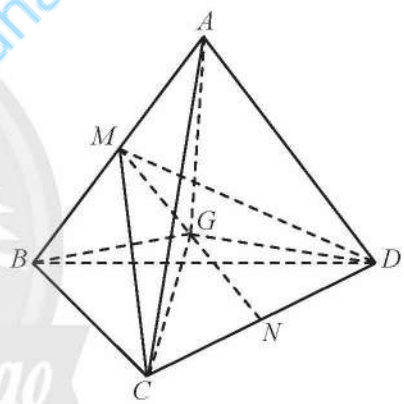
b) Ta có $BO = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2}AH.BO = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{377}}{13}.\sqrt{13} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

15. a) $\vec{b} = 3\vec{a} = (900;\, 600;\, 1200)$.

b) Tốc độ của máy bay B là $|\vec{b}| = \sqrt{900^2 + 600^2 + 1200^2} \approx 1615,55$ (km/h).

16. Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$



Cách 1: Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}, \vec{b} = \overrightarrow{GB}, \vec{c} = \overrightarrow{GC}, \vec{d} = \overrightarrow{GD}$.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2 = 0$

$\Rightarrow 4\vec{a}^2 + 12\vec{a}.\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{a}^2} = -\dfrac{1}{3} = \cos(\vec{a}, \vec{b})$

$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 109,5^\circ$.

Cách 2: Theo hình vẽ ta suy ra góc liên kết là $\widehat{CGD}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Giả sử cạnh của tứ diện đều là a. Suy ra $MC = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CN = \dfrac{a}{2}$.

$$\text{Ta có } CG^2 = \frac{CM^2 + CN^2}{2} - \frac{MN^2}{4} = \frac{CM^2 + CN^2}{2} - \frac{CM^2 - CN^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}CM^2 + \frac{3}{4}CN^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{8}.$$

$$\cos\widehat{CGD} = \frac{GC^2 + GD^2 - CD^2}{2GC.GD} = \frac{\dfrac{3a^2}{8} + \dfrac{3a^2}{8} - a^2}{2.\dfrac{3a^2}{8}} = -\frac{1}{3}.$$

Suy ra $\widehat{CGD} \approx 109,5^\circ$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương III

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. MỤC TIÊU

1. Năng lực toán học

Phát triển cho HS một số năng lực toán học qua các yêu cầu cần đạt sau:

– Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn.

– Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.

– Chỉ ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.

– Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.

2. Phát triển năng lực chung

– Năng lực tự chủ và tự học trong tích cực tham gia các hoạt động, hoàn thành các nhiệm vụ học tập.

– Năng lực giao tiếp và hợp tác trong làm việc nhóm, trình bày và thảo luận.

– Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo trong thực hành và vận dụng kiến thức, kĩ năng vào giải quyết các bài toán (đặc biệt là các bài toán gắn với bối cảnh thực tế).

3. Hình thành các phẩm chất

– Yêu nước, nhân ái.

– Chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm.

B. HƯỚNG DẪN DẠY HỌC

BÀI 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên; khoảng tứ phân vị.

– Hiểu được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– Rút ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.

– Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: mô hình hoá toán học, giải quyết vấn đề toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Ở lớp 11, HS đã biết cách lập bảng số liệu ghép nhóm từ mẫu số liệu điều tra ban đầu. HS đã biết cách hiệu chỉnh bảng số liệu ghép nhóm với số liệu là số nguyên thành bảng số liệu ghép nhóm liên tục (không có khoảng trống giữa hai nhóm liên tiếp). HS đã thành thạo cách tính và cách biểu đạt ý nghĩa của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm.

2. Ở lớp 10, HS đã thành thạo cách tính và cách biểu đạt ý nghĩa của các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu không ghép nhóm.

3. Trong bài này, HS sẽ ước lượng các số đặc trưng đo mức độ phân tán là khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và hiểu được mối quan hệ giữa khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm so với khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ban đầu.

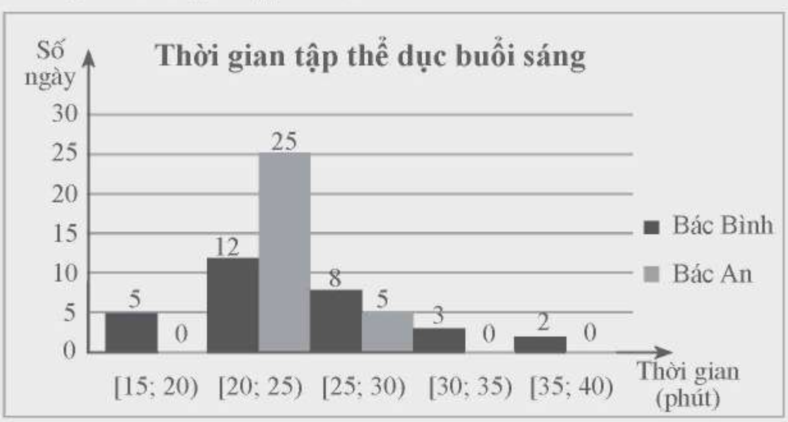
4. Với cùng một mẫu số liệu ban đầu (không ghép nhóm), các cách ghép nhóm khác nhau sẽ cho ra khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm khác nhau.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.

Ai là người có thời gian tập đều hơn?



– *Mục đích*: Đưa HS vào tình huống có vấn đề để tạo hứng thú cho HS bắt đầu bài học.

xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Nhìn vào biểu đồ, HS thấy các cột biểu thị thời gian tập thể dục của bác Bình cao gần bằng nhau nên có thể lầm tưởng thời gian tập của bác Bình đều hơn, nhưng cần tính các số đặc trưng khác của mẫu số liệu ghép nhóm để kết luận.

1. Khoảng biến thiên

HĐKP 1

Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Có ý kiến cho rằng: "Trong 50 quả xoài trên, hiệu số cân nặng của hai quả bất kì không vượt quá 200 g". Ý kiến đó đúng hay sai? Giải thích.

– *Mục đích:* HS ôn lại cách đọc bảng số liệu ghép nhóm đã học ở lớp 11, xác định được khoảng chứa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân để trả lời câu hỏi.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{50}$ là các giá trị trong mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Vì $x_1 \geq 250$ và $x_{50} < 450$ nên $x_{50} - x_1 < 450 - 250 = 200$.

HĐTH 1

Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

Chiều cao (cm)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
Số học sinh nữ lớp 12C	2	7	12	3	0	1
Số học sinh nữ lớp 12D	5	9	8	2	1	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết chiều cao của học sinh nữ lớp nào có độ phân tán lớn hơn.

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng xác định khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm và chỉ ra được kết luận về sự phân tán của mẫu số liệu dựa trên khoảng biến thiên.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân để trả lời câu hỏi.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Khoảng biến thiên của chiều cao học sinh nữ lớp 12C là 185 – 155 = 30 (cm).

Khoảng biến thiên của chiều cao học sinh nữ lớp 12D là 180 – 155 = 25 (cm).

Vậy nếu căn cứ theo khoảng biến thiên thì chiều cao của học sinh nữ lớp 12C có độ phân tán lớn hơn.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

2. Khoảng tứ phân vị

HĐKP 2

Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2022 của một số hộ gia đình trong một địa phương được ghi lại ở bảng sau:

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

a) Hãy tìm các tứ phân vị Q_1 và Q_3.

b) Một doanh nghiệp địa phương muốn hướng dịch vụ của mình đến các gia đình có mức thu nhập ở tầm trung, tức là 50% các hộ gia đình có mức thu nhập ở chính giữa so với mức thu nhập của tất cả các hộ gia đình của địa phương. Hỏi doanh nghiệp cần hướng đến các gia đình có mức thu nhập trong khoảng nào?

– *Mục đích*: Nhắc lại công thức tìm tứ phân vị và ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

– *Gợi ý tổ chức:* GV viết công thức lên bảng và yêu cầu HS nhắc lại cách xác định từng đại lượng trong công thức.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Cỡ mẫu $n = 150$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{150}$ là mẫu số liệu gốc gồm tổng thu nhập của 150 hộ gia đình được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \ldots, x_{24} \in [200; 250)$; $x_{25}, x_{26}, \ldots, x_{86} \in [250; 300)$; $x_{87}, x_{88}, \ldots, x_{120} \in [300; 350)$; $x_{121}, x_{122}, \ldots, x_{141} \in [350; 400)$; $x_{142}, x_{143}, \ldots, x_{150} \in [400; 450)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{38} \in [250; 300)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 250 + \dfrac{\dfrac{150}{4} - 24}{62}.(300 - 250) \approx 260,89$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{113} \in [300; 350)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 300 + \dfrac{\dfrac{3.150}{4} - (24 + 62)}{34}.(350 - 300) \approx 338,97$.

b) Doanh nghiệp cần hướng đến các gia đình có mức thu nhập trong khoảng từ 260,89 triệu đồng đến 338,97 triệu đồng.

HĐTH 2

Hãy so sánh khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An trong ▶.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích*: HS củng cố kĩ năng xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS thảo luận nhóm tìm lời giải.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

• Xét mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình.

Cỡ mẫu $n = 30$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{30}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian tập thể dục mỗi ngày của bác Bình được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in [15; 20)$; $x_6, x_7, \ldots, x_{17} \in [20; 25)$; $x_{18}, x_{19}, \ldots, x_{25} \in [25; 30)$; $x_{26}, x_{27}, x_{28} \in [30; 35)$; $x_{29}, x_{30} \in [35; 40)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_8 \in [20; 25)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 20 + \dfrac{\dfrac{30}{4} - 5}{12}.(25-20) = \dfrac{505}{24}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{23} \in [25; 30)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 25 + \dfrac{\dfrac{3.30}{4} - (5+12)}{8}.(30-25) = \dfrac{455}{16}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình là $\Delta_Q = \dfrac{455}{16} - \dfrac{505}{24} = \dfrac{355}{48}$.

• Xét mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác An.

Cỡ mẫu $n = 30$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{30}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian tập thể dục mỗi ngày của bác An được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \ldots, x_{25} \in [20; 25)$; $x_{26}, x_{27}, \ldots, x_{30} \in [25; 30)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_8 \in [20; 25)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 20 + \dfrac{\dfrac{30}{4} - 0}{25}.(25-20) = \dfrac{43}{2}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{23} \in [20; 25)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 20 + \dfrac{\dfrac{3.30}{4} - 0}{25}.(25-20) = \dfrac{49}{2}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác An là $\Delta_Q = \dfrac{49}{2} - \dfrac{43}{2} = 3$.

Do $\dfrac{355}{48} > 3$ nên khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình lớn hơn khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác An.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐTH 3

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ở Ví dụ 4 sau khi đã loại bỏ thời gian của lần ông Thắng đi hết 32 phút. Có nhận xét gì về khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị vừa tìm được và khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị ban đầu?

b) Hãy so sánh mức độ phân tán của hai mẫu số liệu chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C và 12D ở .

– *Mục đích*: HS trải nghiệm sự thay đổi của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu sau khi loại bỏ giá trị ngoại lệ. HS cũng trải nghiệm cách đối chiếu hai số đo độ phân tán của mẫu số liệu là khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS thảo luận nhóm tìm lời giải.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Sau khi bỏ giá trị ngoại lệ 32 phút, ta được bảng số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lần	22	38	27	8	4	0

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là: 30 – 15 = 15 (phút).

Cỡ mẫu $n = 99$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{99}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian 99 lần đi xe buýt của ông Thắng.

Ta có: $x_1, x_2, \ldots, x_{22} \in [15; 18)$; $x_{23}, x_{24}, \ldots, x_{60} \in [18; 21)$; $x_{61}, x_{62}, \ldots, x_{87} \in [21; 24)$;
$x_{88}, x_{89}, \ldots, x_{95} \in [24; 27)$; $x_{96}, x_{97}, \ldots, x_{99} \in [27; 30)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{25} \in [18; 21)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 18 + \dfrac{\dfrac{99}{4} - 22}{38} \cdot (21 - 18) = \dfrac{2\,769}{152}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{75} \in [21; 24)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 21 + \dfrac{\dfrac{3.99}{4} - (22 + 38)}{27} \cdot (24 - 21) = \dfrac{271}{12}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = \dfrac{271}{12} - \dfrac{2\,769}{152} = \dfrac{1991}{456} \approx 4,37$.

Nhận xét:

– Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm giảm 3 đơn vị khi loại bỏ giá trị ngoại lệ.

– Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thay đổi nhỏ khi loại bỏ giá trị ngoại lệ.

b) • Xét mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh nữ lớp 12C.

Cỡ mẫu $n = 25$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{25}$ là mẫu số liệu gốc gồm chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C được xếp theo thứ tự không giảm.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Ta có: $x_1, x_2 \in [155;\ 160)$; $x_3, x_4, \ldots, x_9 \in [160;\ 165)$; $x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{21} \in [165;\ 170)$; $x_{22}, x_{23}, x_{24} \in [170;\ 175)$; $x_{25} \in [180;\ 185)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_6 + x_7) \in [160;\ 165)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 160 + \dfrac{\frac{25}{4} - 2}{7}.(165 - 160) = \dfrac{4565}{28}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{19} + x_{20}) \in [165;\ 170)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 165 + \dfrac{\frac{3.25}{4} - (2+7)}{12}.(170 - 165) = \dfrac{2705}{16}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh nữ lớp 12C là $\Delta_Q = \dfrac{2705}{16} - \dfrac{4565}{28} = \dfrac{675}{112}$.

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh nữ lớp 12D.

Cỡ mẫu $n = 25$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{25}$ là mẫu số liệu gốc gồm chiều cao của các học sinh nữ lớp 12D được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in [155;\ 160)$; $x_6, x_7, \ldots, x_{14} \in [160;\ 165)$; $x_{15}, x_{16}, \ldots, x_{22} \in [165;\ 170)$; $x_{23}, x_{24} \in [170;\ 175)$; $x_{25} \in [175;\ 180)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_6 + x_7) \in [160;\ 165)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 160 + \dfrac{\frac{25}{4} - 5}{9}.(165 - 160) = \dfrac{5785}{36}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{19} + x_{20}) \in [165;\ 170)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 165 + \dfrac{\frac{3.25}{4} - (5+9)}{8}.(170 - 165) = \dfrac{5375}{32}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh nữ lớp 12D là $\Delta_Q = \dfrac{5375}{32} - \dfrac{5785}{36} = \dfrac{2095}{288}$.

Xét theo khoảng biến thiên thì chiều cao của học sinh nữ lớp 12C phân tán hơn chiều cao của học sinh nữ lớp 12D.

Do $\dfrac{675}{112} < \dfrac{2095}{288}$ nên xét theo khoảng tứ phân vị thì chiều cao của học sinh nữ lớp 12C ít phân tán hơn chiều cao học sinh nữ lớp 12D.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐVD

Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)	[31; 34)
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

a) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của từng mẫu số liệu ghép nhóm ứng với mỗi khu vực A và B.

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

– *Mục đích*: HS trải nghiệm sự thay đổi của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu. HS cũng trải nghiệm cách đối chiếu số đo độ phân tán của mẫu số liệu là khoảng tứ phân vị.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS thảo luận nhóm tìm lời giải.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) • Xét mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình tại khu vực A.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 34 – 19 = 15 (tuổi).

Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm độ tuổi kết hôn của phụ nữ vừa lập gia đình tại khu vực A được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \ldots, x_{10} \in [19; 22)$; $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{37} \in [22; 25)$; $x_{38}, x_{39}, \ldots, x_{68} \in [25; 28)$; $x_{69}, x_{70}, \ldots, x_{93} \in [28; 31)$; $x_{94}, x_{95}, \ldots, x_{100} \in [31; 34)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25}+x_{26}) \in [22; 25)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 22 + \frac{\frac{100}{4}-10}{27}.(25-22) = \frac{71}{3}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75}+x_{76}) \in [28; 31)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 28 + \frac{\frac{3.100}{4}-(10+27+31)}{25}.(31-28) = \frac{721}{25}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình tại khu vực A là $\Delta_Q = \frac{721}{25} - \frac{71}{3} = \frac{388}{75}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

• Xét mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình tại khu vực B.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 31 – 19 = 12 (tuổi).

Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm độ tuổi kết hôn của phụ nữ vừa lập gia đình tại khu vực B được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \ldots, x_{47} \in [19; 22)$; $x_{48}, x_{49}, \ldots, x_{87} \in [22; 25)$; $x_{88}, x_{89}, \ldots, x_{98} \in [25; 28)$; $x_{99}, x_{100} \in [28; 31)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \in [19; 22)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 19 + \frac{\frac{100}{4} - 0}{47}.(22-19) = \frac{968}{47}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \in [22; 25)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 22 + \frac{\frac{3.100}{4} - 47}{40}.(25-22) = \frac{241}{10}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình tại khu vực B là $\Delta_Q = \frac{241}{10} - \frac{968}{47} = \frac{1647}{470}$.

b) Do $\frac{388}{75} > \frac{1647}{470}$ nên nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Khoảng biến thiên $R = 375{,}9$ mm; $Q_1 = 254{,}9$; $Q_3 = 417{,}25$; $\Delta_Q = 162{,}35$.

b) Bảng tần số ghép nhóm:

Lượng mưa (mm)	[140; 240)	[240; 340)	[340; 440)	[440; 540)
Số năm	3	7	7	3

c) Với mẫu số liệu ghép nhóm trên, ta có:

$R = 400$ mm; $Q_1 = \frac{1880}{7}$; $Q_3 = \frac{2880}{7}$; $\Delta_Q = \frac{1000}{7} \approx 142{,}86$.

Nhận xét:

– Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm lớn hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc. Sai số tương đối là $\frac{|400 - 375{,}9|}{375{,}9}.100\% \approx 6\%$.

– Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm nhỏ hơn khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc. Sai số tương đối là $\frac{|162{,}35 - 142{,}86|}{162{,}35}.100\% \approx 12\%$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. Bảng tần số ghép nhóm hiệu chỉnh:

Số lượt đặt bàn	[0,5; 5,5)	[5,5; 10,5)	[10,5; 15,5)	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)
Số ngày	14	30	25	18	5

Cỡ mẫu $n = 92$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 5,5 + \frac{\frac{92}{4} - 14}{30}.(10,5 - 5,5) = 7.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 15,5.$$

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = 15,5 - 7 = 8,5$.

3. a) Khoảng biến thiên: $R = 9,4 - 8,4 = 1$ (m).

Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1; x_2; ...; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm chiều cao của 100 cây keo được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \in [8,8; 9,0)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 8,8 + \frac{\frac{100}{4} - (5+12)}{25}.(9,0 - 8,8) = \frac{1108}{125}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \in [9,0; 9,2)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 9,0 + \frac{\frac{3.100}{4} - (5+12+25)}{44}.(9,2 - 9,0) = \frac{183}{20}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại nông trường là $\Delta_Q = \frac{183}{20} - \frac{1108}{125} = \frac{143}{500} = 0,286$.

b) Ta có $Q_1 - 1,5\Delta_Q = 8,435 > 8,4$ nên chiều cao 8,4 m của cây keo là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm.

4. a) • Xét mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ trung bình của nam giới.

Cỡ mẫu $n_1 = 50$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{50}{4} - (4+7)}{4}.(65 - 60) = \frac{495}{8}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 75 + \frac{\frac{3.50}{4} - (4+7+4+6+15)}{12}.(80-75) = \frac{605}{8}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi trung bình của nam giới là

$$\Delta_Q = \frac{605}{8} - \frac{495}{8} = \frac{55}{4}.$$

• Xét mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ trung bình của nữ giới.

Cỡ mẫu $n_2 = 50$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 65 + \frac{\frac{50}{4} - (3+4+5)}{3}.(70-65) = \frac{395}{6}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 80 + \frac{\frac{3.50}{4} - (3+4+5+3+7+14)}{13}.(85-80) = \frac{2095}{26}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi trung bình của nữ giới là

$$\Delta_Q = \frac{2095}{26} - \frac{395}{6} = \frac{575}{39}.$$

b) Vì $\frac{55}{4} < \frac{575}{39}$ nên xét theo khoảng tứ phân vị thì tuổi của nam giới đồng đều hơn nữ giới.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi nam giới là 85 – 50 = 35 (tuổi).

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi nữ giới là 90 – 50 = 40 (tuổi).

Vì 35 < 40 nên xét theo khoảng biến thiên thì tuổi của nam giới cũng đồng đều hơn nữ giới.

BÀI 2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Tính được các số đặc trưng đo độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: Phương sai, độ lệch chuẩn.

– Hiểu được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.

– Rút ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.

– Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: Mô hình hoá toán học, giải quyết vấn đề toán học, giao tiếp toán học.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

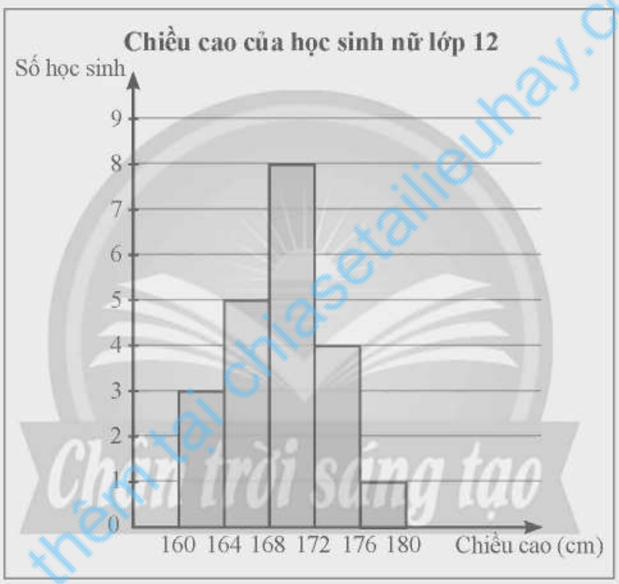
1. Ở lớp 10, HS đã thành thạo cách tính và cách biểu đạt ý nghĩa của các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu không ghép nhóm.

2. Trong bài này, HS sẽ ước lượng các số đặc trưng cho mức độ phân tán là phương sai và độ lệch chuẩn. HS hiểu được mối quan hệ giữa phương sai và độ lệch chuẩn so với khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ban đầu.

3. Với cùng một mẫu số liệu ban đầu (không ghép nhóm), các cách ghép nhóm khác nhau sẽ cho ra khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm khác nhau.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ



Có thể tính phương sai và độ lệch chuẩn của số liệu ở biểu đồ trên không?

– *Mục đích*: Đưa HS vào tình huống có vấn đề để tạo hứng thú cho HS bắt đầu bài học.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận.

HĐKP

a) Trong biểu đồ ở ▶, cột thứ nhất biểu diễn số lượng học sinh có chiều cao từ 160 cm đến dưới 164 cm; cột thứ hai biểu diễn số lượng học sinh có chiều cao từ 164 cm đến dưới 168 cm, … .

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu ở ▶, xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm và tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Xét mẫu số liệu mới gồm các giá trị đại diện của các nhóm, tần số của mỗi giá trị đại diện bằng tần số của nhóm tương ứng. Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu mới.

– *Mục đích:* Nhắc lại công thức tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu không ghép nhóm; công thức tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận nhóm giải quyết và trình bày kết quả.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Ta có bảng số liệu ghép nhóm như dưới đây:

Chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176)	[176; 180)
Số học sinh	3	5	8	4	1

Ta có bảng thống kê chiều cao của học sinh nữ lớp 12 theo giá trị đại diện:

Chiều cao đại diện (cm)	162	166	170	174	178
Số học sinh	3	5	8	4	1

Cỡ mẫu $n = 3 + 5 + 8 + 4 + 1 = 21$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{162.3 + 166.5 + 170.8 + 174.4 + 178.1}{21} = \frac{3550}{21} \approx 169 \text{ (cm)}.$$

b) Phương sai của mẫu số liệu mới là

$$S^2 = \frac{1}{21}(3.162^2 + 5.166^2 + 8.170^2 + 4.174^2 + 1.178^2) - \left(\frac{3550}{21}\right)^2 \approx 18,14.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu mới là $S \approx 4,26$.

HĐTH 1

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở ▶ (trang 75).

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng xác định phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{21}(3.162^2 + 5.166^2 + 8.170^2 + 4.174^2 + 1.178^2) - \left(\frac{3550}{21}\right)^2 \approx 18,14.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S \approx 4,26$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐTH 2

Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

Số bước (đơn vị: nghìn)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)
Số ngày của Mai	6	7	6	6	5
Số ngày của Ngọc	2	5	13	8	2

a) Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và kĩ năng vận dụng độ lệch chuẩn để so sánh độ phân tán/ đồng đều của hai mẫu số liệu.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) • Xét mẫu số liệu số bước chân bạn Mai đi trong một tháng, tính theo đơn vị nghìn bước, ta có:

– Cỡ mẫu là $n_1 = 30$.

– Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\overline{x}_1 = 7,8$.

– Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S_1^2 = 7,56$.

– Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S_1 \approx 2,75$.

• Xét mẫu số liệu số bước chân bạn Ngọc đi trong một tháng, tính theo đơn vị nghìn bước, ta có

– Cỡ mẫu là $n_2 = 30$.

– Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\overline{x}_2 = 8,2$.

– Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S_2^2 \approx 3,83$.

– Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S_2 \approx 1,96$.

b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn Ngọc có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. Ta có bảng thống kê cự li ném tạ của vận động viên theo giá trị đại diện:

Cự li (m)	19,25	19,75	20,25	20,75	21,25
Tần số	13	45	24	12	6

Cỡ mẫu $n = 13 + 45 + 24 + 12 + 6 = 100$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{13.19,25 + 45.19,75 + 24.20,25 + 12.20,75 + 6.21,25}{100} = 20,015.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{100}(13.19,25^2 + 45.19,75^2 + 24.20,25^2 + 12.20,75^2 + 6.21,25^2) - 20,015^2 \approx 0,277.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S \approx \sqrt{0,277} \approx 0,526.$$

2. a) Có 2 máy vi tính có thời gian sử dụng pin từ 7,2 giờ đến dưới 7,4 giờ.

b) Ta có bảng thống kê thời gian sử dụng pin của một số máy vi tính được thống kê theo giá trị đại diện:

Thời gian (giờ)	7,3	7,5	7,7	7,9
Tần số	2	4	7	5

Cỡ mẫu $n = 2 + 4 + 7 + 5 = 18$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{2.7,3 + 4.7,5 + 7.7,7 + 5.7,9}{18} = \frac{23}{3}.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{18}(2.7,3^2 + 4.7,5^2 + 7.7,7^2 + 5.7,9^2) - \left(\frac{23}{3}\right)^2 = \frac{11}{300}.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S = \sqrt{\frac{11}{300}} \approx 0,191.$$

3. a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: 61,1 – 42 = 19,1 (km/h).

Cỡ mẫu của mẫu số liệu là: $n = 20$.

Gọi x_1; x_2; …; x_{20} là tốc độ của 20 ô tô được xếp theo thứ tự không giảm.

Như vậy, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là: $Q_1 = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(46,7 + 46,8) = 46,75$.

Tương tự, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là: $Q_3 = \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) = \frac{1}{2}(54,8 + 55,6) = 55,2$.

Như vậy, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 55,2 - 46,75 = 8,45$.

Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x} = \frac{42 + 43,4 + 43,4 + 46,5 + 46,7 + \ldots + 60,3 + 61,1}{20} = 50,945.$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$S^2 = \frac{1}{20}(42^2 + 43,4^2 + \ldots + 60,3^2 + 61,1^2) - (50,945)^2 \approx 32,200.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là

$$S \approx \sqrt{32,200} \approx 5,675.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu:

Tốc độ (km/h)	[42; 46)	[46; 50)	[50; 54)	[54; 58)	[58; 62)
Tần số	3	7	4	3	3

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là: 62 – 42 = 20 (km/h).

Cỡ mẫu $n = 20$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{20}$ là mẫu số liệu gồm tốc độ của 20 xe hơi được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, x_2, x_3 \in [42; 46)$; $x_4, x_5, \ldots, x_{10} \in [46; 50)$; $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} \in [50; 54)$; $x_{15}, x_{16}, x_{17} \in [54; 58)$; $x_{18}, x_{19}, x_{20} \in [58; 62)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_5 + x_6) \in [46; 50)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1 = 46 + \frac{\frac{20}{4} - 3}{7}.(50 - 46) = \frac{330}{7}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \in [54; 58)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 54 + \frac{3.\frac{20}{4} - 14}{3}.(58 - 54) = \frac{166}{3}$.

Như vậy, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{166}{3} - \frac{330}{7} = \frac{172}{21} \approx 8,190.$$

Ta có bảng thống kê tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua trạm kiểm tra tốc độ theo giá trị đại diện:

Tốc độ đại diện (km/h)	44	48	52	56	60
Tần số	3	7	4	3	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{3.44 + 7.48 + 4.52 + 3.56 + 3.60}{20} = 51,2.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{20}(3.44^2 + 7.48^2 + 4.52^2 + 3.56^2 + 3.60^2) - (51,2)^2 = 26,56.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S = \sqrt{26,56} \approx 5,154$.

4. a) Ta có bảng thống kê đường kính thân của các cây xoan đào 5 năm tuổi theo giá trị đại diện:

Đường kính (cm)	31	33	35	37	39
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

Số cây trồng được thống kê tại địa điểm A là $n_A = 25 + 38 + 20 + 10 + 7 = 100$.

Đường kính trung bình của cây trồng tại địa điểm A là

$$\overline{x}_A = \frac{25.31 + 38.33 + 20.35 + 10.37 + 7.39}{100} = 33,72\,(\text{cm}).$$

Số cây trồng được thống kê tại địa điểm B là $n_B = 22 + 27 + 19 + 18 + 14 = 100$.

Đường kính trung bình của cây trồng tại địa điểm B là

$$\overline{x}_B = \frac{22.31 + 27.33 + 19.35 + 18.37 + 14.39}{100} = 34,5\,(\text{cm}).$$

Như vậy, do 33,72 < 34,5, nên nếu so sánh theo đường kính trung bình của thân cây thì cây trồng tại địa điểm A có đường kính trung bình của thân nhỏ hơn.

b) Phương sai của mẫu số liệu về đường kính thân của các cây trồng tại địa điểm A là

$$S_A^2 = \frac{1}{100}(25.31^2 + 38.33^2 + 20.35^2 + 10.37^2 + 7.39^2) - (33,72)^2 = 5,4016.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về đường kính thân của các cây trồng tại địa điểm A là

$$S_A = \sqrt{5,4016} \approx 2,324.$$

Phương sai của mẫu số liệu về đường kính thân của các cây trồng tại địa điểm B là

$$S_B^2 = \frac{1}{100}(22.31^2 + 27.33^2 + 19.35^2 + 18.37^2 + 14.39^2) - (34,5)^2 = 7,31.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về đường kính thân của các cây trồng tại địa điểm B là

$$S_B = \sqrt{7,31} \approx 2,704.$$

Như vậy, do 2,324 < 2,704, nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì cây trồng tại địa điểm A có đường kính thân đồng đều hơn.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. a) A b) D c) C d) D

2. a) A b) D c) D

3. a) C b) C c) C

BÀI TẬP TỰ LUẬN

4. Khoảng biến thiên: $R = 250$ km. Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q \approx 79{,}167$. Độ lệch chuẩn: $S \approx 55{,}678$.

5. a) Số thửa ruộng đã được khảo sát là $n = 3 + 4 + 6 + 5 + 5 + 2 = 25$.

b) Bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm:

Năng suất (tấn/ha)	[5,5; 5,7)	[5,7; 5,9)	[5,9; 6,1)	[6,1; 6,3)	[6,3; 6,5)	[6,5; 6,7)
Tần số	3	4	6	5	5	2
Tần số tương đối	12%	16%	24%	20%	20%	8%

c) Khoảng biến thiên: $R = 1{,}2$ tấn/ha. Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q \approx 0{,}468$. Độ lệch chuẩn: $S \approx 0{,}294$.

6. a) Nếu so sánh theo số trung bình thì học sinh trường X viết nhanh hơn.

b) Với số liệu của học sinh trường X, ta có $Q_1 = 7{,}45$; $Q_3 = 9{,}65$; $\Delta_Q = 2{,}2$.

Với số liệu của học sinh trường Y, ta có $Q_1 \approx 7{,}71$; $Q_3 \approx 9{,}32$; $\Delta_Q \approx 1{,}61$.

Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường Y có tốc độ viết đồng đều hơn.

c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ở trường X là $S \approx 1{,}33$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ở trường Y là $S \approx 1{,}04$.

Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường Y có tốc độ viết đồng đều hơn.

7. a) Với số liệu ở Nha Trang, ta có $Q_1 = 227{,}5$; $Q_3 \approx 267{,}14$; $\Delta_Q \approx 39{,}64$.

Với số liệu ở Quy Nhơn, ta có $Q_1 = 235$; $Q_3 = 274$; $\Delta_Q = 39$.

Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 ở Quy Nhơn đồng đều hơn.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ở Nha Trang là $S \approx 35{,}34$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ở Quy Nhơn là $S \approx 30{,}59$.

Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 ở Quy Nhơn đồng đều hơn.

8. a) Bảng tần số ghép nhóm:

Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Tần số của trường A	4	5	3	4	2
Tần số của trường B	2	5	4	3	1

b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

BÀI 1. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẰNG PHẦN MỀM GeoGebra

1. Mục tiêu

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị của các hàm số trong Chương trình Toán 12.

– Đọc đồ thị để liên hệ tính chất đã học của các hàm số khi thay đổi các hệ số trong công thức hàm số.

– Ôn tập và minh hoạ về tính chất của các hàm số đã học.

2. Chuẩn bị

– Máy tính xách tay có cài đặt phần mềm GeoGebra hoặc có kết nối Internet.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

– Thực hành trong phòng máy nếu nhà trường có điều kiện.

– SGK Toán 12, tập một – Bộ sách Chân trời sáng tạo.

3. Sản phẩm

– Biểu diễn đồ thị của các hàm số có dạng sau bằng phần mềm GeoGebra:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y = \frac{ax+b}{cx+d};\ y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}.$$

– Sử dụng chức năng thanh trượt của GeoGebra để thay đổi các hệ số a, b, c, d, e nhằm minh hoạ được tính chất của đồ thị các hàm số nói trên.

4. Tổ chức thực hiện

– Giao nhiệm vụ: GV trình bày cụ thể nội dung nhiệm vụ được giao cho HS (đọc/nghe/nhìn/làm) với thiết bị dạy học/học liệu cụ thể để tất cả HS đều hiểu rõ nhiệm vụ phải thực hiện.

– Thực hiện nhiệm vụ: HS thực hiện (đọc/nghe/nhìn/làm) theo yêu cầu của GV.

– Biện pháp hỗ trợ: GV dự kiến những khó khăn mà HS có thể gặp phải kèm theo biện pháp hỗ trợ.

– Dự kiến các mức độ cần phải hoàn thành nhiệm vụ theo yêu cầu.

– Báo cáo, thảo luận: GV tổ chức, điều hành; HS báo cáo, thảo luận.

– Làm việc theo nhóm:

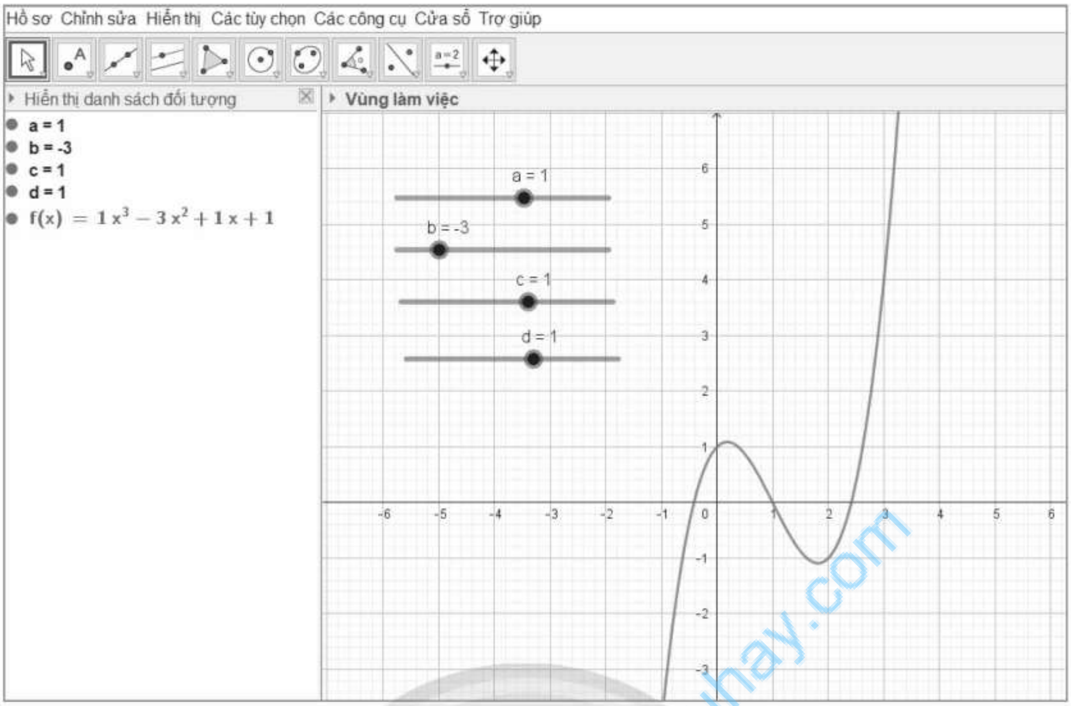
+ Mỗi nhóm cùng tìm hiểu các chức năng vẽ đồ thị của GeoGebra theo hướng dẫn của SGK.

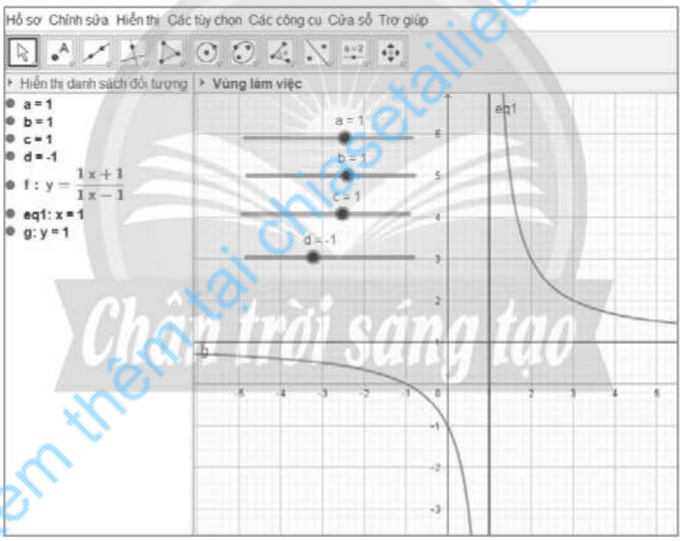
+ Thực hiện vẽ đồ thị của các hàm số cơ bản:

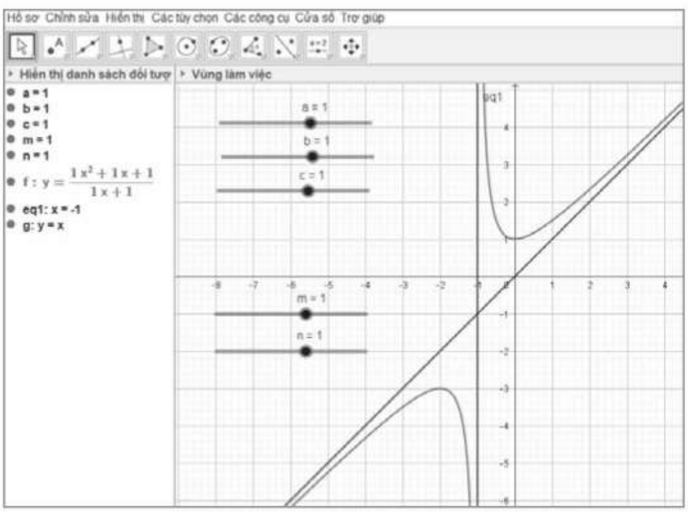
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y = \frac{ax+b}{cx+d};\ y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}.$$

+ Dùng đồ thị để giải thích các tính chất cơ bản của các hàm số nói trên.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com







Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– Nhóm trưởng chụp màn hình và phân công bạn làm báo cáo, thuyết trình.

– Trình bày các báo cáo trước lớp theo phân công của GV.

Lưu ý:

– GV có thể phân công mỗi nhóm vẽ đồ thị của một loại hàm số khác nhau.

– Có thể chỉ chọn một số nhóm trình bày/báo cáo theo giải pháp sư phạm của GV.

– GV có thể yêu cầu mỗi nhóm dùng GeoGebra để vẽ đồ thị minh hoạ một bài toán vận dụng về các hàm số ở cuối Chương I để tăng tính trải nghiệm thực tế và trực quan cho hoạt động.

– GV nên cài đặt phần mềm GeoGebra sang tiếng Việt để có thể sử dụng các câu lệnh bằng tiếng Việt, tạo thuận lợi cho HS.

5. Kết luận, nhận định

Phân tích cụ thể về sản phẩm học tập mà HS phải hoàn thành theo yêu cầu (làm căn cứ để nhận xét, đánh giá các mức độ hoàn thành của HS trên thực tế tổ chức dạy học); làm rõ những nội dung/yêu cầu về kiến thức, kĩ năng để HS ghi nhận, thực hiện.

BÀI 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

1. Mục tiêu

– Thực hành sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị gần đúng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một đoạn xác định của hàm số.

– Tính được bảng giá trị hàm số trên một đoạn xác định.

– Ôn tập và minh hoạ cụ thể về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất và bảng giá trị của hàm số.

2. Chuẩn bị

– Máy tính cầm tay hoặc máy tính xách tay có cài đặt phần mềm giả lập máy tính cầm tay.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

– SGK Toán 12, tập một – Bộ sách Chân trời sáng tạo.

3. Sản phẩm

– Tìm được gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên một đoạn xác định $[a; b]$.

– Liên hệ, so sánh kết quả với cách tính bằng đạo hàm đã học.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

4. Tổ chức thực hiện

– Giao nhiệm vụ: GV trình bày cụ thể nội dung nhiệm vụ được giao cho HS (đọc/nghe/nhìn/làm) với thiết bị dạy học/học liệu cụ thể để tất cả HS đều hiểu rõ nhiệm vụ phải thực hiện.

– Thực hiện nhiệm vụ: HS thực hiện (đọc/nghe/nhìn/làm) theo yêu cầu của GV.

– Biện pháp hỗ trợ: GV dự kiến những khó khăn mà HS có thể gặp phải kèm theo biện pháp hỗ trợ.

– Dự kiến các mức độ cần phải hoàn thành nhiệm vụ theo yêu cầu.

– Báo cáo, thảo luận: GV tổ chức, điều hành; HS báo cáo, thảo luận.

– Làm việc nhóm theo hướng dẫn của SGK.

– Nhóm trưởng chụp màn hình và phân công bạn làm báo cáo, thuyết trình.

– Trình bày các báo cáo trước lớp theo phân công của GV.

Lưu ý:

– GV có thể phân công mỗi nhóm tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một loại hàm số khác nhau.

– GV có thể chỉ chọn một số nhóm trình bày/báo cáo theo giải pháp sư phạm của GV.

– GV có thể yêu cầu HS dùng máy tính cầm tay để giải một số bài toán vận dụng về tối ưu trong thực tế để tăng tính trải nghiệm thực tế.

– Nếu có điều kiện GV có thể sử dụng phần mềm giả lập máy tính cầm tay trên máy tính xách tay kết hợp với máy chiếu để minh hoạ bài giảng sinh động hơn.

5. Kết luận, nhận định

Phân tích cụ thể về sản phẩm học tập mà HS phải hoàn thành theo yêu cầu (làm căn cứ để nhận xét, đánh giá các mức độ hoàn thành của HS trên thực tế tổ chức dạy học); làm rõ những nội dung/yêu cầu về kiến thức, kĩ năng để HS ghi nhận, thực hiện.

Xem thêm tại: chiasetailieuhay.com

Phần MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương IV

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

A. MỤC TIÊU

1. Năng lực toán học

Phát triển cho HS một số năng lực toán học qua các yêu cầu cần đạt:

– Nhận biết được khái niệm và tính chất cơ bản của nguyên hàm.

– Xác định được nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp; tính được nguyên hàm trong những trường hợp đơn giản.

– Nhận biết được khái niệm và các tính chất của tích phân; tính được tích phân trong những trường hợp đơn giản.

– Sử dụng được tích phân để tính diện tích hình phẳng, thể tích hình khối (gồm thể tích khối tròn xoay) trong những trường hợp đơn giản.

– Vận dụng nguyên hàm, tích phân để giải quyết những bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực chung

– Năng lực tự chủ và tự học trong tích cực tham gia các hoạt động, hoàn thành các nhiệm vụ học tập.

– Năng lực giao tiếp và hợp tác trong làm việc nhóm, trình bày và thảo luận.

– Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo trong thực hành và vận dụng kiến thức, kĩ năng vào giải quyết các bài toán (đặc biệt là các bài toán gắn với bối cảnh thực tế).

3. Hình thành các phẩm chất

– Yêu nước, nhân ái.

– Chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm.

B. HƯỚNG DẪN DẠY HỌC

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số.

– Giải thích được tính chất cơ bản của nguyên hàm.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– Xác định được nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp như:

$y = x^{\alpha} (\alpha \neq -1)$; $y = \frac{1}{x}$; $y = a^x$; $y = e^x$;

$y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

– Áp dụng tích chất của nguyên hàm và nguyên hàm của hàm số sơ cấp, tính được nguyên hàm trong những trường hợp đơn giản.

2. Năng lực cần chú trọng

– *Năng lực tư duy và lập luận toán học:* trong quá trình khám phá, hình thành kiến thức, thực hành và vận dụng khái niệm nguyên hàm, công thức nguyên hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản và các tính chất của nguyên hàm.

– *Năng lực giao tiếp toán học:* thông qua sử dụng các khái niệm, thuật ngữ (nguyên hàm, họ nguyên hàm, ...), công thức, kí hiệu toán học trong trình bày, thảo luận, làm việc nhóm.

– *Năng lực giải quyết vấn đề toán học:* thông qua vận dụng khái niệm nguyên hàm vào giải quyết các vấn đề có bối cảnh gắn với thực tiễn.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Khái niệm nguyên hàm xuất hiện từ bài toán tìm hàm số nếu biết đạo hàm của nó trên một khoảng. Bài toán tìm nguyên hàm là bài toán ngược của bài toán tìm đạo hàm nhưng có độ khó cao hơn nhiều. Tuy nhiên, theo Chương trình, chỉ yêu cầu HS tìm nguyên hàm trong những trường hợp đơn giản, sử dụng công thức nguyên hàm của những hàm sơ cấp cơ bản và các tính chất cơ bản của nguyên hàm (không đề cập đến phương pháp đổi biến số hay phương pháp tích phân từng phần).

2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ còn được gọi là *tích phân bất định* của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$, $\int$ là dấu tích phân, $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân, x là biến số tích phân.

3. HS khám phá khái niệm nguyên hàm, họ nguyên hàm và các tính chất của nguyên hàm thông qua xét trên trường hợp đơn giản và cụ thể, rồi khái quát hoá để nhận được khái niệm, tính chất tổng quát (không yêu cầu chứng minh chặt chẽ cho trường hợp tổng quát). Trong dạy học, GV cần chú ý sử dụng các phương pháp dạy học tích cực, tạo cơ hội cho HS chủ động, tích cực tham gia các hoạt động học tập, trả lời các câu hỏi để khám phá các khái niệm, tính chất; củng cố và vận dụng kiến thức mới vào giải quyết vấn đề.

4. Trong các bài toán ứng dụng nguyên hàm, ta thường gặp các bài toán liên quan đến chuyển động cơ học (để đơn giản, chỉ xét chuyển động thẳng). Chú ý rằng, vận tốc là đạo hàm (theo thời gian) của toạ độ, gia tốc là đạo hàm của vận tốc:

$v(t) = x'(t)$; $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Ngoài ra, người ta còn dùng khái niệm độ dịch chuyển là hiệu số giữa toạ độ của vật với toạ độ được chọn làm mốc nào đó: $d(t) = x(t) - x_0$. Ta cũng có: $v(t) = d'(t)$.

Như vậy, toạ độ và độ dịch chuyển là nguyên hàm của vận tốc; vận tốc là nguyên hàm của gia tốc.

Độ lớn của vận tốc còn được gọi là tốc độ (kí hiệu là $|v(t)|$) của chuyển động. Tốc độ là đạo hàm của quãng đường: $|v(t)| = s'(t)$ hay quãng đường là nguyên hàm của tốc độ (điều này đúng cho cả chuyển động cong).

Trường hợp chuyển động không đổi hướng và chọn chiều dương cùng chiều với chuyển động thì vận tốc và tốc độ trùng nhau. Khi đó, $v(t) = x'(t) = d'(t) = s'(t)$.

Do chương trình môn Khoa học tự nhiên năm 2018 ở cấp Trung học cơ sở chỉ đề cập khái niệm tốc độ (không đề cập khái niệm vận tốc), nên để đơn giản, SGK thường chỉ xét bài toán liên quan đến quãng đường và tốc độ. Khi xét bài toán liên quan đến gia tốc thì chỉ xét chuyển động thẳng không đổi hướng (khi đó có thể đồng nhất vận tốc và tốc độ, độ dịch chuyển và quãng đường, do đó, có thể coi gia tốc là đạo hàm của tốc độ hay tốc độ là nguyên hàm của gia tốc).

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi $a = 10$ m/s^2. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu và đi được quãng đường bao nhiêu?

– *Mục đích:* Xuất phát từ tình huống thả vật rơi tự do, đặt câu hỏi tìm những đại lượng vật lí quen thuộc là tốc độ và quãng đường di chuyển (liên quan đến bài toán tìm hàm số biết đạo hàm của nó), thu hút sự chú ý và kích thích sự suy nghĩ của HS. Từ đó, tạo tâm thế bước vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, thể hiện suy nghĩ theo cách hiểu và ngôn ngữ của mình (không nhất thiết đưa ra đáp án đầy đủ).

– *Hướng dẫn, đáp án*: Xem Ví dụ 9.

1. Khái niệm nguyên hàm

HĐKP 1

Cho hàm số $f(x) = 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$. Tìm một hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Thông qua bài toán tìm một hàm số có đạo hàm bằng hàm số cho trước (đơn giản), HS làm quen với một ví dụ đơn giản của khái niệm nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, trình bày, giải thích lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn. GV yêu cầu HS đưa ra nhiều phương án khác nhau.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $F(x) = x^2$ hoặc $F(x) = x^2 + 1$, …

HĐKP 2

2 Cho hàm số $f(x) = 3x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với C là hằng số tuỳ ý, hàm số $H(x) = F(x) + C$ có là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ không?

c) Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm của hàm số $G(x) - F(x)$. Từ đó, có nhận xét gì về hàm số $G(x) - F(x)$?

– *Mục đích:* HS trải nghiệm và nhận biết tập hợp tất cả các nguyên hàm của một hàm số đơn giản cụ thể.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc theo nhóm, trình bày, giải thích lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn. GV tổ chức, giao việc và có thể hỗ trợ HS bằng cách đặt những câu hỏi phụ.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) $H'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $H(x)$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

c) $[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Suy ra $G(x) - F(x) = C$ (C là hằng số). Do đó, $G'(x) - H'(x)$ là hàm hằng.

HĐTH 1

1 Chứng minh rằng $F(x) = e^{2x+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^{2x+1}$ trên $\mathbb{R}$.

– *Mục đích:* HS củng cố khái niệm nguyên hàm thông qua kiểm tra một hàm số đã cho là nguyên hàm của một hàm số đã cho khác.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải, giải thích cách làm và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Ta có $F'(x) = 2e^{2x+1}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^{2x+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

HĐKP 3

a) Giải thích tại sao $\int 0\,\mathrm{d}x = C$ và $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$.

b) Tìm đạo hàm của hàm số $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$. Từ đó, tìm $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$.

– *Mục đích:* Từ việc tính đạo hàm của hàm số luỹ thừa, HS khám phá công thức nguyên hàm của hàm số luỹ thừa bằng định nghĩa nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Do $(C)' = 0$ nên $\int 0\,\mathrm{d}x = C$. Do $(x + C)' = 1$ nên $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$.

b) $F'(x) = \dfrac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' = x^{\alpha}$. Suy ra $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

HĐTH 2

Tìm: a) $\int x^4\,\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$; c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ $(x > 0)$.

– *Mục đích:* HS thực hành áp dụng công thức nguyên hàm để tìm nguyên hàm hàm số luỹ thừa.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int x^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^5}{5} + C$;

b) $\int \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int (x^{-3})\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C$;

c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

Nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$

HĐKP 4

Cho hàm số $F(x) = \ln|x|$ với $x \neq 0$.

a) Tìm đạo hàm của $F(x)$. b) Từ đó, tìm $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Từ việc tính đạo hàm của hàm số luỹ thừa, HS khám phá công thức nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ bằng định nghĩa nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Với $x > 0, F(x) = \ln x,\ F'(x) = \frac{1}{x}$.

Với $x < 0, F(x) = \ln(-x),\ F'(x) = \frac{1}{-x}.(-1) = \frac{1}{x}$.

Vậy $F'(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

b) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Nguyên hàm của một số hàm số lượng giác

HĐKP 5

a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = \sin x, y = -\cos x, y = \tan x, y = -\cot x$.

b) Từ đó, tìm $\int \cos x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin x\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ và $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

– *Mục đích:* Từ việc tính đạo hàm của hàm số lượng giác, HS khám phá công thức nguyên hàm của một số hàm số lượng giác bằng định nghĩa nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $(\sin x)' = \cos x$; $(-\cos x)' = \sin x$; $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(-\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;

b) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$; $\quad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$; $\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐTH 3

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x$ thoả mãn $F(0) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số lượng giác để tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác thoả mãn điều kiện cho trước.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $F(x) = \sin x + C$.

$F(0)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow C+1+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=\sin x-\frac{1}{2}$.

Nguyên hàm của hàm số mũ

HĐKP 6

a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = e^x$, $y = \frac{a^x}{\ln a}$ với $a > 0, a \neq 1$.

b) Từ đó, tìm $\int e^x \mathrm{d}x$ và $\int a^x \mathrm{d}x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

– *Mục đích:* Từ việc tìm đạo hàm của hàm số mũ, HS khám phá công thức nguyên hàm của hàm số mũ bằng định nghĩa nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $(e^x)'=e^x$; $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$;

b) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$; $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$.

HĐTH 4

Tìm: a) $\int 3^x \mathrm{d}x$; b) $\int e^{2x} \mathrm{d}x$.

– *Mục đích:* HS thực hành áp dụng công thức nguyên hàm của hàm số mũ để tìm nguyên hàm của hàm số mũ.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int 3^x \mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + C$; b) $\int e^{2x} \mathrm{d}x = \int (e^2)^x \mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

3. Tính chất cơ bản của nguyên hàm

Nguyên hàm của tích một số với một hàm số

HĐKP 7

Ta có $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$ và $(x^3)' = 3x^2$.

a) Tìm $\int x^2\mathrm{d}x$ và $3\int x^2\mathrm{d}x$.

b) Tìm $\int 3x^2\mathrm{d}x$.

c) Có nhận xét gì về $\int 3x^2\mathrm{d}x$ và $3\int x^2\mathrm{d}x$?

– *Mục đích:* Thông qua xét một trường hợp đơn giản cụ thể, HS khám phá tính chất nguyên hàm của tích một số với một hàm số (tính chất tuyến tính của tích phân bất định, trường hợp đưa hệ số ra ngoài dấu tích phân).

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc theo nhóm, trình bày, giải thích lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn. GV tổ chức, giao việc và có thể hỗ trợ HS bằng cách đặt những câu hỏi phụ.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + C_1$; $3\int x^2\mathrm{d}x = 3\left(\dfrac{x^3}{3} + C_1\right) = x^3 + C$ $(C = 3C_1)$.

b) $\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C$.

c) Từ các kết quả trên, ta có $\int 3x^2\mathrm{d}x = 3\int x^2\mathrm{d}x$.

HĐTH 5

Tìm: a) $\int\left(-\dfrac{\cos x}{4}\right)\mathrm{d}x$; b) $\int 2^{2x+1}\mathrm{d}x$.

– *Mục đích*: HS thực hành áp dụng tính chất nguyên hàm của tích một số với một hàm số và công thức nguyên hàm của hàm số sơ cấp cơ bản để tìm nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int\left(-\dfrac{\cos x}{4}\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\int\cos x\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}(\sin x + C_1) = -\dfrac{1}{4}\sin x + C$ $\left(C = -\dfrac{C_1}{4}\right)$;

b) $\int 2^{2x+1}\mathrm{d}x = 2\int 4^x\mathrm{d}x = 2\left(\dfrac{4^x}{\ln 4} + C_1\right) = \dfrac{4^x}{\ln 2} + C$ $(C = 2C_1)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Nguyên hàm của tổng, hiệu hai hàm số

HĐKP 8

Ta có $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, $(x^2)' = 2x$ và $\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)' = x^2 + 2x$.

a) Tìm $\int x^2 dx$, $\int 2x dx$ và $\int x^2 dx + \int 2x dx$.

b) Tìm $\int (x^2 + 2x) dx$.

c) Có nhận xét gì về $\int (x^2 + 2x) dx$ và $\int x^2 dx + \int 2x dx$?

– *Mục đích:* Thông qua xét một trường hợp đơn giản cụ thể, HS khám phá tính chất nguyên hàm của một tổng hay hiệu hai hàm số (tính chất tuyến tính của tích phân bất định, trường hợp tích phân bất định của một tổng hay hiệu).

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc theo nhóm, trình bày, giải thích lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn. GV tổ chức, giao việc và có thể hỗ trợ HS bằng cách đặt những câu hỏi phụ.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1$; $\int 2x dx = x^2 + C_2$; $\int x^2 dx + \int 2x dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$ $(C = C_1 + C_2)$;

b) $\int (x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$.

c) Từ các kết quả trên, ta có $\int (x^2 + 2x) dx = \int x^2 dx + \int 2x\, dx$.

HĐTH 6

Tìm: a) $\int \left(3x^3 + \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx$ $(x > 0)$; b) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

– *Mục đích:* HS thực hành áp dụng tính chất nguyên hàm của tổng, hiệu hai hàm số và công thức nguyên hàm của hàm số sơ cấp cơ bản để tìm nguyên hàm.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int \left(3x^3 + \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx = 3\int x^3 dx + 2\int x^{-\frac{3}{5}} dx = 3.\frac{x^4}{4} + 2.\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{3x^4}{4} + 5\sqrt[5]{x^2} + C$;

b) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3\tan x + \cot x + C$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐTH 7

Một ô tô đang chạy với tốc độ 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 1 giây, 2 giây, 3 giây là bao nhiêu?

– *Mục đích:* HS thực hành tìm nguyên hàm trong bài toán chuyển động cơ học đơn giản.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trao đổi theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Quãng đường ô tô đi được sau t giây là $s(t) = \int (19 - 2t)\,\mathrm{d}t = 19t - t^2 + C$.

Ta có $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Do đó, $s(t) = 19t - t^2$.

$s(1) = 18$ m; $s(2) = 34$ m; $s(3) = 48$ m.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. $F'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (x + 1)e^x$.

2. a) $\int x^5\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^6}{6} + C$;

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C \quad (x > 0)$;

c) $\int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$;

d) $\int \dfrac{3^x}{5^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \mathrm{d}x = \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x}{\ln\dfrac{3}{5}} + C = \dfrac{3^x}{(\ln 3 - \ln 5)5^x} + C$.

3. $F(x) = \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Vậy $F(x) = -\cot x + 1$.

4. a) $\int (2x^5 + 3)\,\mathrm{d}x = 2\int x^5\,\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x = \dfrac{x^6}{3} + 3x + C$;

b) $\int (5\cos x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x = 5\int \cos x\,\mathrm{d}x - 3\int \sin x\,\mathrm{d}x = 5\sin x + 3\cos x + C$;

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

c) $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{3}{2}}.x^{\frac{3}{2}}-2\ln x+C$

$=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-2\ln x+C\ \ (x>0);$

d) $\int\left(e^{x-2}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{1}{e^2}\int e^x dx-2\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\frac{e^x}{e^2}+2\cot x+C$

$=e^{x-2}+2\cot x+C.$

5. a) $\int x(2x-3)^2dx=\int(4x^3-12x^2+9x)\,dx$

$=4\int x^3dx-12\int x^2dx+9\int x\,dx=x^4-4x^3+\frac{9x^2}{2}+C;$

b) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\cos x\,dx\right)=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C;$

c) $\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\tan x-x+C;$

d) $\int 2^{3x}.3^x dx=\int 24^x dx=\frac{24^x}{\ln 24}+C.$

6. a) $h(x)=\int h'(x)\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$ với $1\le x\le 11.$

Vì $h(1)=2$ nên $\ln 1+C=2$, suy ra $C=2$.

Vậy chiều cao của cây sau x năm là $h(x)=\ln x+2$ $(1\le x\le 11)$.

b) Ta có $h(x)=3\Leftrightarrow \ln x+2=3\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e\approx 2{,}718$ năm.

7. Ta có $v(t)=\int a\,dt=\int 2dt=2t+C.$

Vì $v(0)=10$ nên $C=10$. Suy ra $v(t)=2t+10$.

Ta có $s(t)=\int v(t)dt=\int(2t+10)dt=t^2+10t+C.$

Ta có $s(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $s(t)=t^2+10t$.

Ta có $s(3)=3^2+10\,.\,3=39$ (m).

Vậy trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc, xe đi được 39 m.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

BÀI 2. TÍCH PHÂN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được khái niệm và các tính chất của tích phân.

– Tính được tích phân trong những trường hợp đơn giản.

– Vận dụng được tích phân để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng

– *Năng lực tư duy và lập luận toán học* trong quá trình khám phá, hình thành kiến thức, thực hành và vận dụng khái niệm và các tính chất của tích phân.

– *Năng lực giao tiếp toán học* thông qua sử dụng các khái niệm, thuật ngữ (tích phân, cận, biểu thức dưới dấu tích phân, …), công thức, kí hiệu toán học trong trình bày, thảo luận, làm việc nhóm.

– *Năng lực mô hình hoá toán học* và *năng lực giải quyết vấn đề toán học* thông qua vận dụng khái niệm tích phân để biểu diễn đại lượng và giải quyết các vấn đề có bối cảnh gắn với thực tiễn.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Trong Giải tích, tích phân được định nghĩa thông qua lấy giới hạn của tổng tích phân. Định nghĩa này phản ánh bản chất khái niệm, thuận lợi trong ứng dụng vào các bài toán thực tế. Tuy nhiên, vì lí do sư phạm, SGK định nghĩa khái niệm tích phân thông qua khái niệm nguyên hàm nhờ công thức Newton – Leibnitz:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

SGK xây dựng hoạt động để HS nhận ra định nghĩa này không phụ thuộc việc chọn nguyên hàm $F(x)$.

2. Đối với các bài toán liên quan đến chuyển động cơ học (tiếp tục những lưu ý ở bài trước), ta có các công thức

$$x = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t \text{ và } s = \int_a^b |v(t)|\mathrm{d}t,$$

trong đó, $v(t)$ là vận tốc chuyển động ($|v(t)|$ là tốc độ chuyển động) tức thời tại thời điểm t, x là độ dịch chuyển (hay hiệu toạ độ), s là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = a$ đến $t = b$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Trường hợp vật chuyển động thẳng và không đổi hướng (chọn chiều dương trùng với chiều chuyển động) thì vận tốc và tốc độ chuyển động trùng nhau $(|v(t)| = v(t))$ nên ta có công thức

$$s = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t,$$

trong đó $v(t)$ là tốc độ của chuyển động. Đây là công thức mà SGK (để đơn giản) đã giới thiệu ở mục Chú ý tại trang 15 (tập hai).

3. Bên cạnh các ứng dụng trong cơ học, SGK đưa vào những bài toán ứng dụng tích phân trong các lĩnh vực khác, nhưng chỉ ở mức độ tìm giá trị của đại lượng nào đó biết tốc độ thay đổi (hay đạo hàm) của đại lượng đó theo đại lượng khác (Ví dụ 6, Vận dụng 2, trang 18, Bài tập 5, trang 20 …).

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 m/s thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức

$$v(t) = 20 - 5t \ (0 \le t \le 4).$$

Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

– *Mục đích*: Thông qua bài toán tìm quãng đường xe đi được trong tình huống thường gặp trong thực tế, GV đặt vấn đề, thu hút sự chú ý và tạo tâm thế để HS bước vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, thể hiện suy nghĩ theo cách hiểu và ngôn ngữ của mình (không nhất thiết đưa ra đáp án đầy đủ).

– *Hướng dẫn, đáp án:* Xem Ví dụ 3.

1. Diện tích hình thang cong

HĐKP 1

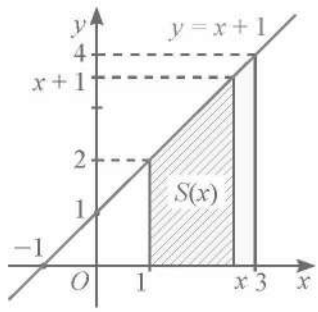
1 Cho hàm số $y = f(x) = x + 1$. Với mỗi $x \ge 1$, kí hiệu $S(x)$ là diện tích của hình thang giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng vuông góc với Ox tại các điểm có hoành độ 1 và x.

a) Tính $S(3)$.

b) Tính $S(x)$ với mỗi $x \ge 1$.

c) Tính $S'(x)$. Từ đó suy ra $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[1; +\infty)$.

d) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Chứng tỏ rằng $F(3) - F(1) = S(3)$. Từ đó nhận xét về cách tính $S(3)$ khi biết một nguyên hàm của $f(x)$.



Hình 1

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích*: Thông qua bài toán tính diện tích của hình thang (tạo bởi đồ thị hàm số bậc nhất, trục hoành và hai đường thẳng dạng $x = a$, $x = b$), HS trải nghiệm với công thức tính diện tích hình thang cong trong trường hợp đặc biệt.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc theo nhóm, trình bày lời giải của mình, giải thích cách làm và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $S(3) = \dfrac{1}{2}(2+4).2 = 6.$

b) $S(x) = \dfrac{1}{2}(2+x+1)(x-1) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}.$

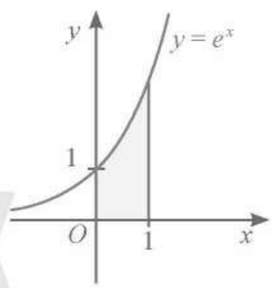
c) $S'(x) = x + 1 = f(x)$ với mọi $x \geq 1$. Từ đó, $S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

d) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + C.$ $\quad F(3) - F(1) = \left(\dfrac{9}{2} + 3 + C\right) - \left(\dfrac{1}{2} + 1 + C\right) = 6 = S(3).$

Vậy có thể tính $S(3)$ bởi $F(3) - F(1)$ khi biết một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$.

HĐTH 1

1 Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$ (Hình 4).



– *Mục đích*: HS thực hành áp dụng công thức, sử dụng nguyên hàm để tính diện tích hình thang cong (có hình vẽ sẵn).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Ta có hàm số $y = e^x$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x) = e^x$. Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(1) - F(0) = e - 1$.

2. Khái niệm tích phân

HĐKP 2

2 Cho hàm số $f(x) = 2x - 1$. Lấy hai nguyên hàm tuỳ ý $F(x)$ và $G(x)$ của $f(x)$, rồi tính $F(3) - F(0)$ và $G(3) - G(0)$. Nhận xét về kết quả nhận được.

– *Mục đích*: HS trải nghiệm với trường hợp cụ thể để nhận ra rằng hiệu $F(b) - F(a)$ không phụ thuộc vào việc chọn nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ cho trước.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Chẳng hạn lấy $F(x) = x^2 - x$ và $G(x) = x^2 - x + 1$.

Ta có $F(3) - F(0) = (3^2 - 3) - 0 = 6$; $G(3) - G(0) = (3^2 - 3 + 1) - 1 = 6$.

Vậy $F(3) - F(0) = G(3) - G(0)$.

Xem thêm tại chiasetailieunay.com

HĐTH 2

Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^3 2x\,dx$; b) $\int_0^{\pi} \sin t\,dt$; c) $\int_0^{\ln 2} e^u du$.

– *Mục đích*: HS thực hành tính tích phân bằng cách áp dụng định nghĩa và công thức nguyên hàm của hàm số sơ cấp.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int_1^3 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8$;

b) $\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$;

c) $\int_0^{\ln 2} e^u \mathrm{d}u = e^u\Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$.

HĐVD 1

Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ

$$v(t) = 2t - 0{,}03t^2\ (0 \le t \le 10),$$

trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Tính quãng đường xe đi được sau 5 giây, sau 10 giây.

b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 10$.

– *Mục đích*: HS thực hành tính tích phân bằng cách áp dụng định nghĩa và công thức nguyên hàm của hàm số sơ cấp.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Quãng đường xe đi được sau t_0 giây là

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} (2t - 0{,}03t^2)\mathrm{d}t = (t^2 - 0{,}01t^3)\Big|_0^{t_0} = t_0^2 - 0{,}01t_0^3 \text{ (m)}.$$

Với $t_0 = 5$ thì $s(5) = 5^2 - 0{,}01 \,.\, 5^3 = 23{,}75$ (m). Với $t_0 = 10$ thì $s(10) = 10^2 - 0{,}01 \,.\, 10^3 = 90$ (m).

b) $\overline{v} = \dfrac{s(10)}{10} = \dfrac{90}{10} = 9$ (m/s).

3. Tính chất của tích phân

Tính chất 1

HĐKP 3

a) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x^5$. Từ đó, tính $I = \int_0^2 6x^5 \mathrm{d}x$.

b) Tính $J = \int_0^2 x^5 \mathrm{d}x$.

c) Có nhận xét gì về giá trị của I và $6J$?

– *Mục đích*: Thông qua xét một trường hợp đơn giản cụ thể, HS khám phá "đưa hệ số ra ngoài dấu tích phân" (tính chất tuyến tính của tích phân).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $F(x) = x^6$; $I = \int_0^2 6x^5 \mathrm{d}x = x^6 \Big|_0^2 = 64$;

b) $J = \int_0^2 x^5 \mathrm{d}x = \dfrac{x^6}{6}\Bigg|_0^6 = \dfrac{64}{6} = \dfrac{32}{3}$;

c) $I = 6J$.

HĐTH 3

Tính các tích phân sau:

a) $\int_{-1}^{1} 4x^7 \mathrm{d}x$;

b) $\int_{-2}^{-1} \dfrac{-3}{10x} \mathrm{d}x$;

c) $\int_0^2 \dfrac{5^{x-1}}{2} \mathrm{d}x$.

– *Mục đích*: HS thực hành tính tích phân bằng cách áp dụng tính chất "đưa thừa số ra ngoài dấu tích phân", định nghĩa và công thức nguyên hàm của hàm số sơ cấp cơ bản.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int_{-1}^{1} 4x^7 \mathrm{d}x = 4\int_{-1}^{1} x^7 \mathrm{d}x = 4.\dfrac{x^8}{8}\Bigg|_{-1}^{1} = 4\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\right) = 0$;

b) $\int_{-2}^{-1} \dfrac{-3}{10x} \mathrm{d}x = -\dfrac{3}{10}\int_{-2}^{-1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = -\dfrac{3}{10}\ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = -\dfrac{3}{10}(\ln 1 - \ln 2) = \dfrac{3\ln 2}{10}$;

c) $\int_0^2 \dfrac{5^{x-1}}{2} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{10}\int_0^2 5^x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{10}.\dfrac{5^x}{\ln 5}\Bigg|_0^2 = \dfrac{1}{10\ln 5}(25 - 1) = \dfrac{12}{5\ln 5}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Tính chất 2

HĐKP 4

a) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^2+e^x$. Từ đó, tính $\int_0^1 (x^2+e^x)\mathrm{d}x$.

b) Tính $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$.

c) Có nhận xét gì về hai kết quả trên?

– *Mục đích*: Thông qua xét một trường hợp đơn giản cụ thể, HS khám phá tính chất tích phân của một tổng hay hiệu (tính chất tuyến tính của tích phân).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+e^x$; $\quad \int_0^1 (x^2+e^x)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}+e^x\right)\Bigg|_0^1=\left(\dfrac{1}{3}+e\right)-1=e-\dfrac{2}{3}$;

b) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+e^x\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}+(e-1)=e-\dfrac{2}{3}$;

c) Ta thấy $\int_0^1 (x^2+e^x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$.

HĐTH 4

Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 \dfrac{x-1}{x^2}\mathrm{d}x$; $\quad$ b) $\int_0^\pi \left(1+2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$; $\quad$ c) $\int_{-2}^1 (x-2)^2\mathrm{d}x+\int_{-2}^1 (4x-x^2)\,\mathrm{d}x$.

– *Mục đích*: HS thực hành sử dụng tính chất tích phân của tổng, hiệu để tính tích phân.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int_1^2 \dfrac{x-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^2+\dfrac{1}{x}\Bigg|_1^2=\ln 2-\ln 1+\dfrac{1}{2}-1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$;

b) $\int_0^\pi \left(1+2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^\pi (1+1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi (2-\cos x)\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^\pi \mathrm{d}x-\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x=2.x\Big|_0^\pi-\sin x\Big|_0^\pi=2\pi;$$

c) $\int_{-2}^1 (x-2)^2\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^1 (4x-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^1 \left[(x-2)^2+(4x-x^2)\right]\mathrm{d}x=\int_{-2}^1 4\,\mathrm{d}x=4.x\Big|_{-2}^1=12.$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐVD 2

Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x tấn sản phẩm trong một tuần. Khi đó, đạo hàm $P'(x)$, gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$P'(x) = 16 - 0{,}02x \text{ với } 0 \le x \le 100.$$

Tính lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 90 tấn sản phẩm trong tuần. Biết rằng nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

– *Mục đích*: HS vận dụng tích phân vào giải bài toán thực tế đơn giản trong lĩnh vực kinh tế (ở đó cần tính tích phân của đạo hàm).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, thảo luận, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Theo giả thiết, $P(0) = -25$.

$$P(90) = P(0) + \int_0^{90} P'(x)\mathrm{d}x = -25 + \int_0^{90} (16 - 0{,}02x)\mathrm{d}x$$

$$= -25 + (16x - 0{,}01x^2)\Big|_0^{90} = 1\,334 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu trong tuần nhà máy bán được 90 tấn sản phẩm thì thu được lợi nhuận là 1 334 000 000 đồng.

Tính chất 3

HĐKP 5

Cho hàm số $f(x) = 2x$. Tính và so sánh kết quả:

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ và } \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

– *Mục đích*: Thông qua xét một trường hợp đơn giản cụ thể, HS khám phá tính chất "cộng đoạn" của tích phân.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng* dẫn, đáp án: $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^2 = 4 - 0 = 4;$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^1 + x^2\Big|_1^2 = (1-0) + (4-1) = 4.$$

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x.$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐTH 5

5 Tính:

a) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)\,dx-\int_{1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)\,dx$; b) $\int_{0}^{3}|x-1|\,dx$; c) $\int_{0}^{\pi}|\cos x|\,dx$.

– *Mục đích*: HS thực hành sử dụng tính chất "cộng đoạn" của tích phân để tính tích phân, bao gồm tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)dx-\int_{1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(4x^3-5)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4x^3-5)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(4x^3-5)dx=(x^4-5x)\Big|_{-1}^{1}=(1-5)-(1+5)=-10;$$

b) $\int_{0}^{3}|x-1|dx=\int_{0}^{1}|x-1|dx+\int_{1}^{3}|x-1|dx=\int_{0}^{1}(1-x)dx+\int_{1}^{3}(x-1)dx$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{3}=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2};$$

c) $\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$

$$=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(1-0)-(0-1)=2.$$

HĐVD 3

3 Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases}0,5t, & 0\le t<2,\\ 1, & 2\le t<15,\\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20.\end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 phút.

Hình 6

– *Mục đích*: HS vận dụng tích phân vào giải bài toán thực tế liên quan đến chuyển động cơ học.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, thảo luận, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

$$s=\int_0^{20} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 0,5t\,\mathrm{d}t+\int_2^{15}\mathrm{d}t+\int_{15}^{20}(4-0,2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}t^2\Big|_0^2+t\Big|_2^{15}+\left(4t-\frac{1}{10}t^2\right)\Bigg|_{15}^{20}=1+13+\frac{5}{2}=16,5\ \text{(km)}.$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) $S=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2=\dfrac{8}{3}$; b) $S=\int_1^3\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^3=\ln 3$.

2. a) $\int_1^2 x^4\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{5}\Big|_1^2=\dfrac{1}{5}(2^5-1)=\dfrac{31}{5}$; b) $\int_1^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_1^2=2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1$; d) $\int_0^2 3^x\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^2=\dfrac{1}{\ln 3}(3^2-1)=\dfrac{8}{\ln 3}$.

3. a) $\int_{-2}^4(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-2}^4(x^2-1)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^4=18$;

b) $$\int_1^2\frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right)\Bigg|_1^2$$

$$=2-4+\ln 2-\left(\frac{1}{2}-2+0\right)=\ln 2-\frac{1}{2};$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x-2)\mathrm{d}x=(-3\cos x-2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2.\frac{\pi}{2}-(-3)=3-\pi;$$

d) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}x=(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

4. a) $\int_{-2}^{1}|2x+2|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}|2x+2|\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}|2x+2|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}(-2x-2)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(2x+2)\mathrm{d}x$

$$=(-x^2-2x)\Big|_{-2}^{-1}+(x^2+2x)\Big|_{-1}^{1}=1+4=5;$$

b) $\int_{0}^{4}|x^2-4|\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}|x^2-4|\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}|x^2-4|\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}(x^2-4)\mathrm{d}x$

$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{16}{3}+\frac{32}{3}=16;$$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$=\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=(1-0)-(0-1)=2.$$

5. $T(8)=T(6)+\int_{6}^{8}T'(x)\mathrm{d}x=150+\int_{6}^{8}\left(-\frac{30}{x}\right)\mathrm{d}x$

$$=150-30\int_{6}^{8}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=150-30\ln x\Big|_{6}^{8}=150-30(\ln 8-\ln 6)\approx 141,4\ (^\circ\mathrm{C}).$$

Vậy mặt ngoài của ống có nhiệt độ khoảng 141,4 °C.

6. Quãng đường chuyển động của thang máy:

$$s=\int_{0}^{24}v(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}t\,\mathrm{d}t+\int_{2}^{20}2\mathrm{d}t+\int_{20}^{24}(12-0,5t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^2\Big|_{0}^{2}+2t\Big|_{2}^{20}+\left(12t-\frac{1}{4}t^2\right)\Bigg|_{20}^{24}=42\ (\mathrm{m}).$$

Tốc độ trung bình của thang máy: $\overline{v}=\frac{42}{24}=1,75\ (\mathrm{m/s})$.

BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Sử dụng được tích phân để tính diện tích của một số hình phẳng, thể tích của một số hình khối (bao gồm khối tròn xoay).

2. Năng lực cần chú trọng

– *Năng lực tư duy và lập luận toán học* trong quá trình khám phá, hình thành kiến thức, thực hành và vận dụng các công thức tích phân để tính diện tích hình phẳng, thể tích hình khối.

– *Năng lực giao tiếp toán học* thông qua sử dụng các thuật ngữ, khái niệm, công thức, kí hiệu toán học trong trình bày, thảo luận, làm việc nhóm.

– *Năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học* thông qua vận dụng tích phân để thiết lập công thức tính diện tích hình phẳng, thể tích hình khối, giải quyết những bài toán thực tế đơn giản liên quan đến tính diện tích hình phẳng, thể tích hình khối.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp với các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Tích phân có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, một số ứng dụng đơn giản đã được giới thiệu trong bài học trước. Bài học này chỉ xét ứng dụng hình học của tích phân. Nhờ phép tính tích phân, HS có thể tính được diện tích của nhiều hình phẳng, thể tích của nhiều hình khối khác nhau, trong đó có một số công thức tính thể tích quen thuộc đã được công nhận ở các lớp dưới.

2. Lưu ý không chọn các bài toán tính diện tích, thể tích mà việc tính tích phân đòi hỏi sử dụng công thức đổi biến số hay tích phân từng phần (chẳng hạn, không chọn bài toán tính diện tích hình tròn bằng cách sử dụng tích phân).

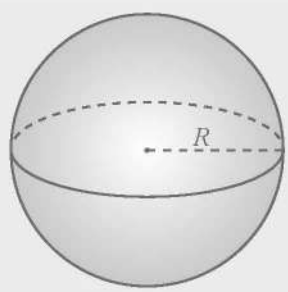
III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Ta đã biết công thức tính thể tích của khối cầu bán kính R là

$$V=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Làm thế nào để tìm ra công thức đó?



xemthemtaichiasetailieuhay.com

– *Mục đích*: Thông qua sự kiện vừa quen vừa lạ (HS đã biết công thức tính thể tích của khối cầu nhưng chưa biết cách để nhận được công thức đó), GV đặt vấn đề nhằm kích thích sự tò mò, thu hút sự chú ý của HS để bước vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm hoặc cả lớp, trình bày ý kiến của mình, lắng nghe ý kiến của bạn. GV có thể đặt những câu hỏi phụ như: Công thức này có quen thuộc không? Đã học ở lớp nào? …

– *Hướng dẫn, đáp án*: Xem Ví dụ 6.

1. Tính diện tích hình phẳng

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

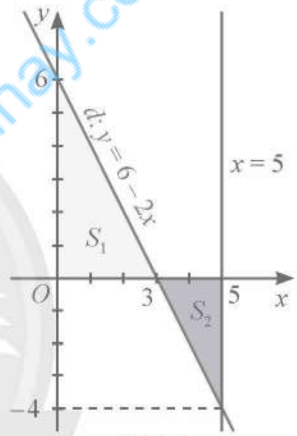
HĐKP 1

1 Gọi d là đồ thị của hàm số $y = f(x) = 6 - 2x$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, trục hoành và trục tung; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, trục hoành và đường thẳng $x = 5$ (Hình 1).

a) Tính S_1 và so sánh với $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b) Tính S_2 và so sánh với $\int_3^5 f(x)\,dx$.

c) So sánh $\int_0^5 |f(x)|\,dx$ với $S_1 + S_2$.



Hình 1

– *Mục đích*: Thông qua việc xét một trường hợp đơn giản, HS trải nghiệm và khám phá công thức tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $S_1 = \frac{1}{2}.3.6 = 9$; $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (6-2x)dx = (6x - x^2)\Big|_0^3 = 9$. Vậy $S_1 = \int_0^3 f(x)dx$.

b) $S_2 = \frac{1}{2}.2.4 = 4$; $\int_3^5 f(x)dx = \int_3^5 (6-2x)dx = (6x - x^2)\Big|_3^5 = -4$. Vậy $S_2 = -\int_3^5 f(x)dx$.

c) $\int_0^5 |f(x)|dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 [-f(x)]dx = S_1 + S_2$.

HĐTH 1

1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

– *Mục đích*: HS thực hành sử dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (cần tìm hoành độ giao điểm, tách thành tích phân trên từng đoạn).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Diện tích cần tìm là $S = \int_{-1}^{2} |2x - x^2| \mathrm{d}x$.

Ta có $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^{0} |2x - x^2| \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |2x - x^2| \mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^{0} (2x - x^2)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{2} (2x - x^2)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2}\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Lưu ý: HS có thể xét dấu hàm số $y = 2x - x^2$ trên các đoạn $[-1; 0]$ và $[0; 2]$ để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

HĐTH 2

2 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$.

– *Mục đích*: HS thực hành sử dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (nhận xét về dấu của hàm số trên đoạn lấy tích phân).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Ta có $y = \cos x - 2 < 0$ với mọi x nên diện tích cần tìm là

$$S = \int_{0}^{\pi} |\cos x - 2| \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} (2 - \cos x)\mathrm{d}x = (2x - \sin x)\Big|_{0}^{\pi} = 2\pi.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

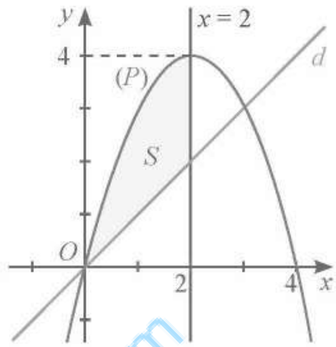
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

HĐKP 2

Cho hai hàm số $y = 4x - x^2$ và $y = x$ lần lượt có đồ thị (P) và d như Hình 4.

a) Tính diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

b) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P), d và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.



Hình 4

– *Mục đích*: Thông qua việc xét một trường hợp cụ thể với hình vẽ trực quan, HS trải nghiệm và khám phá công thức tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, thảo luận, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án*:

a) $S_1 = \int_0^2 (4x - x^2)\mathrm{d}x = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là $S_2 = \frac{1}{2}.2.2 = 2$.

Do đó $S = S_1 - S_2 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$.

HĐTH 3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 2x - 1, y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

– *Mục đích:* HS thực hành sử dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Diện tích cần tìm là $S = \int_1^4 \left|(x^2 - 2x - 1) - (x - 1)\right|\mathrm{d}x = \int_1^4 \left|x^2 - 3x\right|\mathrm{d}x$.

Ta có $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$.

Hàm số $y = x^2 - 3x$ không dương trên đoạn [1; 3] và không âm trên đoạn [3; 4] nên

$$S = \int_1^4 \left|x^2 - 3x\right| dx = \int_1^3 (3x - x^2)dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_3^4 = \frac{10}{3} + \frac{11}{6} = \frac{31}{6}.$$

HĐTH 4

4 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = 5x - x^2$, $y = x^2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

– *Mục đích:* HS thực hành sử dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Diện tích cần tìm là $S = \int_0^2 \left|(5x - x^2) - (x^2 - x)\right| dx = \int_0^2 \left|6x - 2x^2\right| dx.$

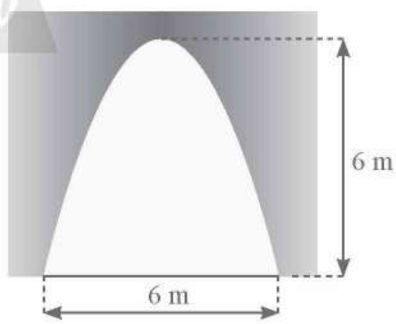
Ta có $6x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 3$. Phương trình chỉ có một nghiệm thuộc đoạn [0; 2] là $x = 0$.

Vì $y = 6x - 2x^2 \geq 0$ với mọi $x \in [0; 2]$ nên

$$S = \int_0^2 (6x - 2x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{20}{3}.$$

HĐVD 1

1 Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như Hình 7. Tính diện tích của cửa hầm.



Hình 7

– *Mục đích:* HS vận dụng tích phân vào giải bài toán thực tế liên quan đến tính diện tích hình phẳng, trong đó cần mô hình hoá (lập phương trình của parabol).

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Chọn hệ trục *Oxy* có trục hoành dọc chân cửa hầm, trục tung đi qua đỉnh của hầm. Khi đó, phương trình của parabol có dạng $y = 6 - ax^2$ ($a > 0$).

Hoành độ giao điểm của parabol và trục hoành là $x = \sqrt{\frac{6}{a}}$ và $x = -\sqrt{\frac{6}{a}}$.

Đáy hầm rộng 6 m nên $2\sqrt{\frac{6}{a}} = 6 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$. Từ đó, phương trình của parabol là $y = 6 - \frac{2}{3}x^2$.

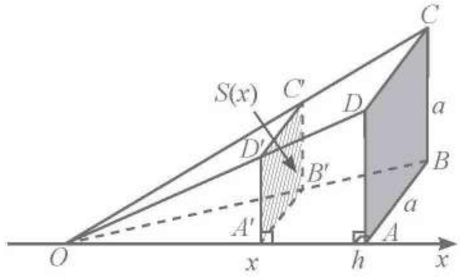
Vậy diện tích của cửa hầm là $S = \int_{-3}^{3} \left(6 - \frac{2}{3}x^2\right)dx = \left(6x - \frac{2x^3}{9}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 24$ (m^2).

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

2. Tính thể tích hình khối

HĐKP 3

Trong không gian, cho hình chóp $O.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $OA \perp (ABCD)$, $OA = h$. Đặt trục số Ox như Hình 8. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 < x \leq h)$, cắt hình chóp $O.ABCD$ theo mặt cắt là hình vuông $A'B'C'D'$. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích của hình vuông $A'B'C'D'$.



Hình 8

a) Tính $S(x)$ theo a, h và x.

b) Tính $\int_0^h S(x)\,dx$ và so sánh với thể tích của khối chóp $O.ABCD$.

– *Mục đích:* Thông qua việc xét một trường hợp liên quan đến thể tích khối chóp, HS trải nghiệm và khám phá công thức tích phân tính thể tích hình khối.

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn. GV có thể đặt những câu hỏi phụ để gợi ý HS sử dụng kiến thức hình học để giải bài toán.

– *Hướng dẫn, đáp án*:

a) Ta có $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{x}{h} \Rightarrow A'B' = \dfrac{xa}{h}$. Suy ra $S(x) = \dfrac{x^2a^2}{h^2}$.

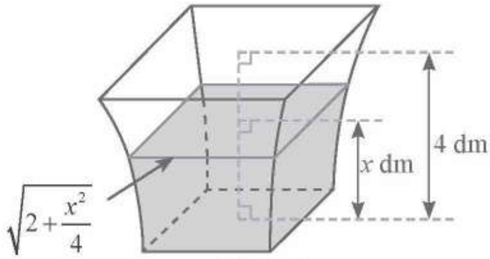
b) $\displaystyle\int_0^h S(x)\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{x^2a^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{h^2}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}a^2h.$

Thể tích của khối chóp $O.ABCD$ là $V_{O.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.h = \dfrac{1}{3}a^2h.$

Vậy $\displaystyle\int_0^h S(x)\mathrm{d}x = V_{O.ABCD}$.

HĐTH 5

Một bình chứa nước có hình dạng như Hình 11. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) $(0 \leq x \leq 4)$ thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\dfrac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



Hình 11

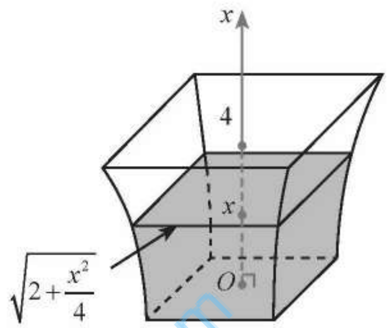
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– *Mục đích*: HS thực hành sử dụng tích phân để tính thể tích hình khối trong trường hợp đơn giản (dễ dàng tính diện tích các thiết diện).

– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Đặt trục Ox thẳng đứng, có gốc O nằm trên mặt phẳng chứa đáy của bình như hình bên. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(0 \le x \le 4)$ cắt bình theo mặt cắt là hình vuông có diện tích

$$S(x) = \left(\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}\right)^2 = 2+\frac{x^2}{4} \text{ (dm}^2\text{)}.$$



Dung tích của bình là

$$V = \int_0^4 S(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(2+\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \left(2x+\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{40}{3} \text{ (dm}^3\text{)}.$$

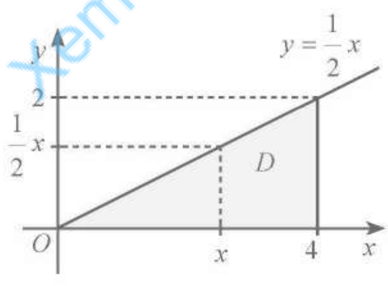
Thể tích khối tròn xoay

HĐKP 4

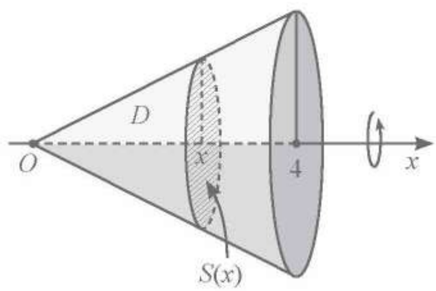
Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$ (Hình 12a). Quay hình D xung quanh trục Ox thì được một khối nón, kí hiệu là N (Hình 12b).

a) Cắt khối N bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 4)$ thì mặt cắt là hình gì? Tính diện tích $S(x)$ của mặt cắt đó.

b) Sử dụng công thức tính thể tích hình khối, tính thể tích của khối nón N.



a)



b)

– *Mục đích*: Thông qua bài toán tính thể tích của khối nón bằng cách sử dụng tích phân, HS trải nghiệm và khám phá công thức tích phân tính thể tích khối tròn xoay.

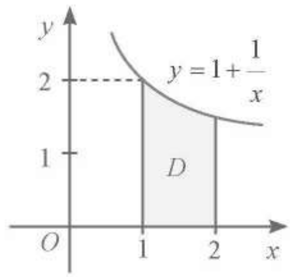
– *Gợi ý tổ chức*: HS làm việc theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn. GV có thể đặt những câu hỏi gợi ý giúp HS nhận ra đặc điểm của mặt cắt và sử dụng tích phân để tính thể tích hình khối vừa học.

– *Hướng dẫn, đáp án*:

Thể tích của khối nón là $V = \int_0^4 S(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^4 x^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{16\pi}{3}$.

HĐTH 6

6 Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ (Hình 15). Tính thể khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



Hình 15

– *Mục đích:* HS thực hành sử dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay.

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

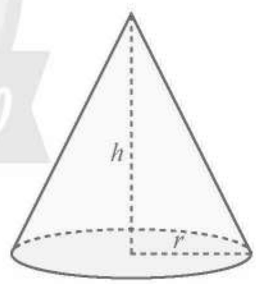
– *Hướng dẫn, đáp án:*

Thể tích của khối tròn xoay là

$$V = \pi\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(x + 2\ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{3}{2} + 2\ln 2\right)\pi.$$

HĐVD 2

2 Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h (Hình 16).



Hình 16

– *Mục đích:* HS vận dụng tích phân để tính thể tích khối nón bằng cách coi khối nón là khối tròn xoay (cần mô hình hoá).

– *Gợi ý tổ chức:* HS làm việc cá nhân, thảo luận theo nhóm, trình bày lời giải của mình và nhận xét lời giải của bạn.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Xét hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{r}{h}x$, trục hoành và đường thẳng $x = h$. Hình D quay quanh trục Ox tạo thành khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h. Do đó, thể tích của khối nón là

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_{-1}^{1} e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}.$$

b) Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_{1}^{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{3}{2} + \ln 2.$$

2. Ta có $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 1$. Phương trình chỉ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$ là $x = 0$, $x = 1$.

Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_0^2 \left|x^3 - x\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|x^3 - x\right|\mathrm{d}x + \int_1^2 \left|x^3 - x\right|\mathrm{d}x = \left|\int_0^1 (x^3 - x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{9}{4}\right| = \frac{5}{2}.$$

3. Diện tích hình phẳng là

$$S = \int_1^4 \left|\frac{x^2+1}{x} - (-x)\right|\mathrm{d}x = \int_1^4 \left|2x + \frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= (x^2 + \ln x)\Big|_1^4 = (16 + \ln 4) - 1 = 15 + 2\ln 2.$$

4. Diện tích cần tìm là $S = \int_{-1}^{2} \left|x^3 + 1 - 2\right|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left|x^3 - 1\right|\mathrm{d}x.$

Ta có $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 2]$.

Vậy $S = \int_{-1}^{1}\left|x^3 - 1\right|\mathrm{d}x + \int_1^2 \left|x^3 - 1\right|\mathrm{d}x = \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 1)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 1)\mathrm{d}x\right|$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Bigg|_{-1}^{1}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Bigg|_1^2\right| = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4}.$$

5. Thể tích của vật thể là

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(4 - x^2)\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\ (\mathrm{dm}^3).$$

6. Thể tích khối tròn xoay là

$$V = \pi\int_0^4 (4 - x)\mathrm{d}x = \pi\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 8\pi.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

7. Đường thẳng AB là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{2}+1$.

$$V=\pi\int_0^2\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(\frac{x^2}{4}+x+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{14\pi}{3}.$$

8. Chọn trục Ox song song với đường cao sao cho O trùng với đỉnh của hình chóp, mặt phẳng đáy vuông góc với trục Ox tại điểm $x=h$.

Khi đó, mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm x cắt hình chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh bằng $\dfrac{ax}{h}$ có diện tích $S(x)=\dfrac{a^2x^2}{h^2}$.

Thể tích của hình chóp tứ giác đều là

$$V=\int_0^h\frac{a^2x^2}{h^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{h^2}.\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}a^2h.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. C **2.** B **3.** A **4.** A **5.** A **6.** A **7.** C **8.** B **9.** B **10.** C **11.** D **12.** A

BÀI TẬP TỰ LUẬN

13. a) $\int[4(2-3x)^2-3\cos x]\mathrm{d}x=4\int(4-12x+9x^2)\mathrm{d}x-3\int\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=4(4x-6x^2+3x^3)-3\sin x+C$$
$$=12x^3-24x^2+16x-3\sin x+C.$$

b) $\int\left(3x^3-\dfrac{1}{2x^3}\right)\mathrm{d}x=3\int x^3\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\int x^{-3}\mathrm{d}x=3.\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right)+C=\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{1}{4x^2}+C.$

c) $\int\left(\dfrac{2}{\sin^2x}-\dfrac{1}{3\cos^2x}\right)\mathrm{d}x=2\int\dfrac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\int\dfrac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=-2\cot x-\dfrac{1}{3}\tan x+C.$

d) $\int(3^{2x-2}+4\cos x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}\int9^x\mathrm{d}x+4\int\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{9^x}{\ln9}+4\sin x+C=\frac{9^x}{18\ln3}+4\sin x+C.$$

e) $\int\left(4\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x=4\int x^{\frac{4}{5}}\mathrm{d}x+3\int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=4.\dfrac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}}+3.\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=\dfrac{20}{9}x\sqrt[5]{x^4}+9\sqrt[3]{x}+C.$

g) $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int(1-\sin x)\mathrm{d}x=x+\cos x+C.$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

14. Ta có $F'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=f(x).$$

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$

15. Ta có $f'(x)=(x^2\ \ln x)'=2x\ln x+x^2.\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x.$

Suy ra $f'(x)=2g(x)+x$ nên $g(x)=\dfrac{1}{2}[f'(x)-x].$

Vậy $\int g(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int[f'(x)-x]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{2}\right)+C$

$$=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

16. a) $\displaystyle\int_0^1(4x^3+x)\mathrm{d}x=\left(x^4+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

b) $\displaystyle\int_1^2\frac{x-2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x-2\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_1^2+\frac{2}{x}\Bigg|_1^2=\ln 2+2\left(\frac{1}{2}-1\right)=\ln 2-1.$

c) $\displaystyle\int_0^4 2^{2x}\mathrm{d}x=\int_0^4 4^x\mathrm{d}x=\frac{4^x}{\ln 4}\Bigg|_0^4=\frac{1}{\ln 4}(4^4-1)=\frac{255}{2\ln 2}.$

d) $\displaystyle\int_1^2(e^{x-1}+2^{x+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{e}\int_1^2 e^x\mathrm{d}x+2\int_1^2 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{e}e^x\Big|_1^2+2.\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_1^2$

$$=\frac{1}{e}(e^2-e)+\frac{2}{\ln 2}(2^2-2)=e-1+\frac{4}{\ln 2}.$$

17. a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\left(\cot\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{6}\right)=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0-1)=1.$

18. Ta có $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(3t+4)\mathrm{d}t=3.\dfrac{t^2}{2}+4t+C.$

Vì $s(0)=0$ nên $C=0$, suy ra $s(t)=\dfrac{3}{2}t^2+4t.$

Vậy $s(5)=\dfrac{3}{2}.5^2+4.5=\dfrac{115}{2}=57{,}5$ (m).

19. Ta có $v(t)=\int a\,\mathrm{d}t=\int 3\,\mathrm{d}t=3t+C$.

Vì $v(0)=1$ nên $C=1$, suy ra $v(t)=3t+1$.

Vậy $v(10)=31$ m/s.

20. a) Đầu năm 2020 ứng với $t=5$.

Ta có $P(5)-P(0)=\int_0^5 P'(t)\mathrm{d}t=\int_0^5 20.(1,106)^t\,\mathrm{d}t=20.\dfrac{1}{\ln 1,106}(1,106)^t\Big|_0^5\approx 130$ (nghìn người).

Suy ra $P(5)\approx P(0)+130=1\,008+130=1\,138$ (nghìn người).

Vậy dân số của thành phố đầu năm 2020 là khoảng 1 138 nghìn người.

b) Tốc độ tăng dân số trung bình của thành phố trong giai đoạn từ đầu năm 2015 đến đầu năm 2020 là $\dfrac{P(5)-P(0)}{5}\approx\dfrac{130}{5}=26$ (nghìn người/năm).

21. a) $s(t)=\int_0^t v(s)\mathrm{d}s=\int_0^t 10s\,\mathrm{d}s=5s^2\Big|_0^t=5(t^2-0)=5t^2$ (m) $(0\le t\le 2\sqrt{5})$.

b) Vật chạm đất khi $s(t)=100\Leftrightarrow 5t^2=100\Leftrightarrow t^2=20\Leftrightarrow t=2\sqrt{5}\approx 4,5$ (s).

Tốc độ rơi trung bình của vật là $\overline{v}=\dfrac{100}{2\sqrt{5}}=10\sqrt{5}\approx 22,4$ (m/s).

22. $S_1=\int_0^3|-x^2+4x-x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$; $S_1+S_2=\int_0^4\left|-x^2+4x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$; suy ra $S_2=\dfrac{32}{3}-\dfrac{9}{2}=\dfrac{37}{6}$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{37}{6}}=\dfrac{27}{37}$.

23. Dung tích của chậu là: $V=\int_0^{16}\pi\left(10+\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{16}\left(100+20\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x$

$$=\pi\left(100x+20.\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{16}=\frac{7\,744\pi}{3}\ (\text{cm}^3).$$

24. Thể tích của lều là: $V=\int_0^3(9-x^2)\mathrm{d}x=\left(9x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=18$ (m^3).

25. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^{1}(4-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{22\pi}{3}.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương V

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

A. MỤC TIÊU

1. Năng lực toán học

Phát triển cho HS một số năng lực toán học qua các yêu cầu cần đạt:

– Nhận biết được phương trình tổng quát của mặt phẳng; phương trình chính tắc, phương trình tham số của đường thẳng; phương trình tổng quát của mặt cầu.

– Thiết lập được điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc với nhau; điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.

– Tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ; góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.

– Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Phát triển năng lực chung

– Năng lực tự chủ và tự học trong tìm tòi, khám phá.

– Năng lực giao tiếp và hợp tác trong trình bày, thảo luận và làm việc nhóm.

– Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo trong thực hành và vận dụng.

3. Hình thành các phẩm chất

– Yêu nước, nhân ái.

– Chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm.

B. HƯỚNG DẪN DẠY HỌC

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được phương trình tổng quát của mặt phẳng.

– Thiết lập được phương trình tổng quát của mặt phẳng trong hệ trục toạ độ *Oxyz* theo một trong ba cách cơ bản: qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến; qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương (suy ra vectơ pháp tuyến nhờ vào việc tìm vectơ vuông góc với cặp vectơ chỉ phương); qua ba điểm không thẳng hàng.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– Thiết lập được điều kiện để hai mặt phẳng song song hoặc vuông góc với nhau.

– Tính được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.

– Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt phẳng để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Cần giải thích cho HS hiểu ý nghĩa của việc xác định mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.

2. Cần giúp HS nắm vững cách sử dụng tích có hướng của hai vectơ để xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng từ một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

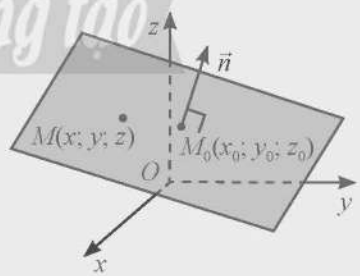
3. Cần tạo nhiều cơ hội để HS có thể vận dụng phương trình mặt phẳng trong không gian *Oxyz* vào các tình huống thực tế mang tính hướng nghiệp.

4. Cần giảm bớt các bài tập thiên về tính toán, tăng cường các bài tập vận dụng phương pháp toạ độ trong không gian kết hợp với các hình khối HS đã học ở lớp 11.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Trong không gian *Oxyz*, làm thế nào để xác định một mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ?



Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội thảo luận về cách biểu diễn mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ. Cách đặt vấn đề này có khả năng thu hút HS vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

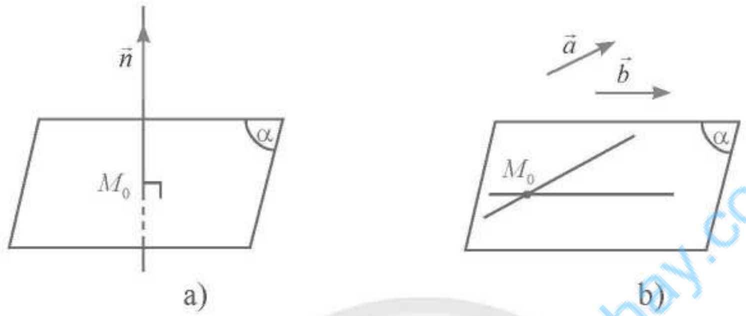
– *Hướng dẫn, đáp án:* Tìm toạ độ một điểm thuộc mặt phẳng và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (vectơ pháp tuyến khác vectơ-không và vuông góc với mặt phẳng).

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

HĐKP 1

a) Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$. Qua một điểm M_0 cố định trong không gian, có bao nhiêu mặt phẳng (α) vuông góc với giá của vectơ $\vec{n}$?

b) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Qua một điểm M_0 cố định trong không gian, có bao nhiêu mặt phẳng (α) song song hoặc chứa giá của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$?



Hình 1

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội khám phá cách xác định một mặt phẳng bằng một điểm và một vectơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vectơ chỉ phương.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) Có duy nhất một mặt phẳng.

b) Có duy nhất một mặt phẳng.

HĐTH 1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 5)$.

a) Tìm toạ độ của một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

b) Tìm toạ độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

– *Mục đích:* HS thực hành tìm một vectơ pháp tuyến và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Nhận xét: $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$.

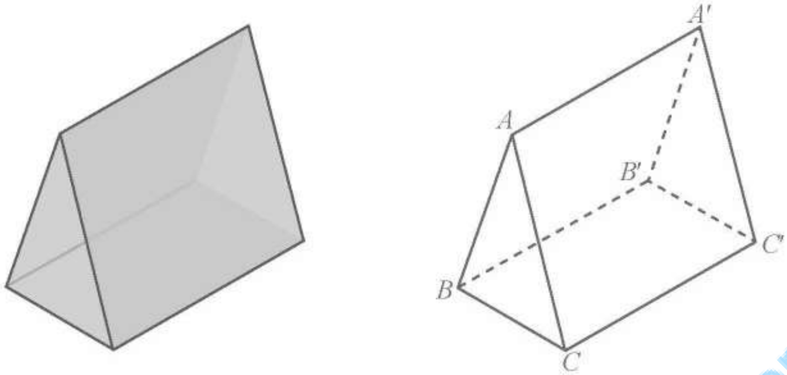
a) Một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 5)$.

b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) là $\overrightarrow{OC} = (0; 0; 5)$.

xemthemtaichiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐVD 1

Một lăng kính có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều ở Hình 3a được vẽ lại như Hình 3b. Tìm một cặp vectơ chỉ phương và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$.



a) b)

Hình 3

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế tìm vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của các mặt đáy của một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\overrightarrow{AA'}$.

2. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương

HĐKP 2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Xét vectơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

a) Vectơ $\vec{n}$ có khác $\vec{0}$ hay không?

b) Tính $\vec{a}.\vec{n}$; $\vec{b}.\vec{n}$.

c) Vectơ $\vec{n}$ có phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) không?

– *Mục đích:* Giúp HS làm quen với khái niệm và ý nghĩa của tích có hướng trong việc xác định vectơ pháp tuyến khi biết một cặp vectơ chỉ phương.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* a) $\vec{n} \neq \vec{0}$; b) $\vec{a}.\vec{n} = \vec{0}$; $\vec{b}.\vec{n} = \vec{0}$;

c) $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐTH 2

Cho mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(10; 7; -1)$. Tìm một cặp vectơ chỉ phương và một vectơ pháp tuyến của (Q).

– *Mục đích:* HS thực hành xác định cặp vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng để luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

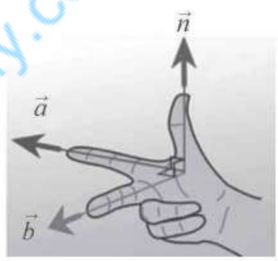
– *Hướng dẫn, đáp án:*

Một cặp vectơ chỉ phương của (Q) là $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (9; 6; -2)$.

Một vectơ pháp tuyến của (Q) là $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-24; 32; -12)$.

HĐVD 2

Cho biết hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; 0)$ có giá lần lượt song song với ngón trỏ và ngón giữa của bàn tay trong Hình 5. Tìm một vectơ $\vec{n}$ có giá song song với ngón cái. (Xem như ba ngón tay nói trên tạo thành ba đường thẳng đôi một vuông góc.)



Hình 5

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng khái niệm vectơ pháp tuyến vào thực tế quan sát phương của các ngón tay trong quy tắc bàn tay phải của môn Vật lí.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

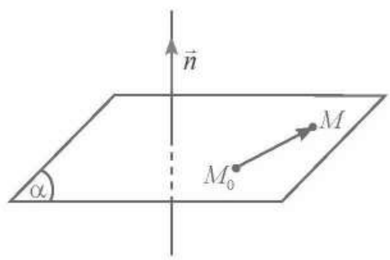
– *Hướng dẫn, đáp án:* $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (2; 1; -5)$.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

HĐKP 3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và nhận $\vec{n} = (7; 5; 2)$ làm vectơ pháp tuyến. Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm tuỳ ý trong không gian. Tính tích vô hướng $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M}$ theo x, y, z.



Hình 6

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá cách biểu diễn mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (x-1;\ y-2;\ z-3)$;

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 7(x-1)+5(y-2)+2(z-3) = 7x+5y+2z-23.$$

HĐTH 3

3 Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình tổng quát là

$$(\alpha): 2x + 2y - 3z - 4 = 0 \text{ và } (\beta): x + 4z - 12 = 0.$$

a) Tìm một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng (α), (β).

b) Tìm điểm thuộc mặt phẳng (α) trong số các điểm: $M(1;\ 0;\ 1)$, $N(1;\ 1;\ 0)$.

– *Mục đích:* HS thực hành xác định vectơ pháp tuyến và các điểm của mặt phẳng khi biết phương trình của mặt phẳng đó để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

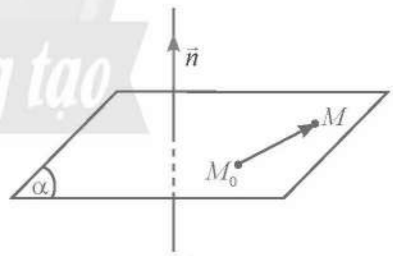
a) Mặt phẳng (α), (β) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2;\ 2;\ -3)$, $\vec{n}_2 = (1;\ 0;\ 4)$.

b) Thế lần lượt toạ độ hai điểm M, N vào phương trình mặt phẳng (α), ta thấy $N \in (\alpha)$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

HĐKP 4

4 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ làm vectơ pháp tuyến. Gọi $M(x;\ y;\ z)$ là một điểm tuỳ ý trong không gian.



Hình 7

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{M_0M}$.

b) Tính tích vô hướng $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M}$.

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α).

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá cách viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$;

b) $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$;

c) $(\alpha): A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$.

xem thêm tại chiasetailieunay.com

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

HĐKP 5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0; 2; 1)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 3; 1)$, $\vec{b} = (2; 0; 1)$.

a) Tìm toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

b) Lập phương trình của mặt phẳng (α).

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá cách viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (3; 1; -6)$.

b) $3(x - 0) + 1(y - 2) - 6(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6z + 4 = 0$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

HĐKP 6

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(2; 4; 3)$, $C(5; 3; 1)$.

a) Tìm toạ độ một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

b) Tìm toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

c) Lập phương trình của mặt phẳng (α).

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá cách viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Một cặp vectơ chỉ phương của (α) là: $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (5; 2; 0)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-4; 10; -11)$.

c) $-4(x - 0) + 10(y - 1) - 11(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -4x + 10y - 11z + 1 = 0$.

HĐTH 4

Viết phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $A(2; 0; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -2; 7)$.

b) (P) đi qua điểm $B(-2; 3; 0)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 2; -1)$, $\vec{v} = (3; 1; 0)$.

c) (P) đi qua ba điểm $A(2; 1; 5)$, $B(3; 2; 7)$, $C(4; 1; 6)$.

d) (P) đi qua ba điểm $M(7; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$, $P(0; 0; 9)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* HS thực hành lập phương trình tổng quát của mặt phẳng trong ba tình huống cơ bản để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) (P) đi qua $A(2; 0; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -2, 7)$ nên phương trình của (P) là

$$5(x-2) - 2(y-0) + 7(z+1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + 7z - 3 = 0.$$

b) (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 2; -1)$ và $\vec{v} = (3; 1; 0)$, suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (1; -3; -4)$. Phương trình của (P) là

$$1(x+2) - 3(y-3) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 4z + 11 = 0.$$

c) (P) đi qua ba điểm $A(2; 1; 5)$, $B(3; 2; 7)$, $C(4; 1; 6)$ nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 0; 1)$, suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1; 3; -2)$.

Phương trình của (P) là

$$1(x-2) + 3(y-1) - 2(z-5) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2z + 5 = 0.$$

d) *Cách 1:* (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (-7; -2; 0)$, $\overrightarrow{MP} = (-7; 0; 9)$, suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-18; 63; -14)$.

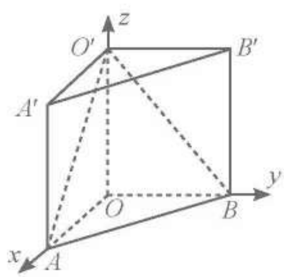
Phương trình của (P) là:

$$-18(x-7) + 63(y-0) - 14(z-0) = 0 \Leftrightarrow 18x - 63y + 14z - 126 = 0.$$

Cách 2: Phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{9} = 1$.

HĐVD 3

3 Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $OAB.O'A'B'$. Biết O là gốc toạ độ, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $O'(0; 0; 5)$. Viết phương trình các mặt phẳng $(O'AB)$ và $(O'A'B')$.



Hình 11

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế viết phương trình mặt đáy và mặt chéo của hình lăng trụ đứng trong không gian $Oxyz$.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Phương trình mặt phẳng $(O'AB)$ là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{5} = 1$ hay $15x + 10y + 6z - 30 = 0$.

Mặt phẳng $(O'A'B')$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OO'} = (0; 0; 5)$ và đi qua $O'(0; 0; 5)$ nên có phương trình là $z - 5 = 0$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song

HĐKP 7

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình là

$$(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0 \text{ và } (\beta): 2x - 4y + 6z + 1 = 0.$$

a) Nêu nhận xét về các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên.

b) Cho điểm $M(-1; 0; 0)$. Hãy cho biết các mặt phẳng (α), (β) có đi qua M không.

c) Giải thích tại sao (α) song song với (β).

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá các điều kiện để hai mặt phẳng song song thông qua việc nhận xét về phương của các vectơ pháp tuyến.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_1 = (1; -2; 3)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\vec{n}_2 = (2; -4; 6)$. Ta thấy $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$ nên hai vectơ cùng phương.

b) $M \in (\alpha)$; $M \notin (\beta)$.

c) Hai mặt phẳng có hai vectơ pháp tuyến cùng phương nên có thể song song hoặc trùng nhau, do $M \in (\alpha)$; $M \notin (\beta)$ nên ta kết luận được hai mặt phẳng song song.

HĐTH 5

Mặt phẳng (E): $2x - y + 8z + 1 = 0$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

a) (F): $8x - 4y + 32z + 7 = 0$;

b) (H): $6x - 3y + 24z + 3 = 0$;

c) (G): $10x - 5y + 41z + 1 = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành xác định tính song song của hai mặt phẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Các mặt phẳng (E), (F), (G), (H) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (2; -1; 8)$, $\vec{n}_1 = (8; -4; 32)$, $\vec{n}_2 = (6; -3; 24)$, $\vec{n}_3 = (10; -5; 41)$.

a) Ta có $\vec{n}_1 = 4\vec{n}$ và $7 \neq 4 \,.\, 1$. Vậy $(E) \,//\, (F)$.

b) Ta có $\vec{n}_2 = 3\vec{n}$ và $3 = 3 \,.\, 1$. Vậy $(E) \equiv (H)$.

c) Ta có $\dfrac{2}{10} \neq \dfrac{8}{41}$ suy ra $\vec{n}$ và $\vec{n}_3$ không cùng phương. Vậy (E) cắt (G).

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐVD 4

Trên bản thiết kế đồ hoạ 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng (P): $6x + 5y + z + 2 = 0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và song song với (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q).

Hình 14

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế biểu diễn các mặt phẳng song song chứa các tấm pin năng lượng mặt trời.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Vì $(Q) // (P)$ nên (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (6; 5; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$6(x-1) + 5(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 6x + 5y + z - 12 = 0.$$

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

HĐKP 8

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình là

$$(\alpha): 3x + 2y + z + 1 = 0 \text{ và } (\beta): 5x - 10y + 5z + 9 = 0.$$

a) Chỉ ra hai vectơ $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α) và (β).

b) Tính tích vô hướng $\vec{n}_1.\vec{n}_2$ và nêu nhận xét về hai mặt phẳng (α) và (β).

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc thông qua việc nhận xét về phương của các vectơ pháp tuyến.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$; $\vec{n}_2 = (5; -10; 5)$;

b) $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$, hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau.

HĐTH 6

Tìm các cặp mặt phẳng vuông góc trong các mặt phẳng sau:

(F): $3x + 2y + 5z + 3 = 0$, (H): $x - 4y + z + 23 = 0$, (G): $x - y + 3z + 24 = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành xác định tính vuông góc của hai mặt phẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

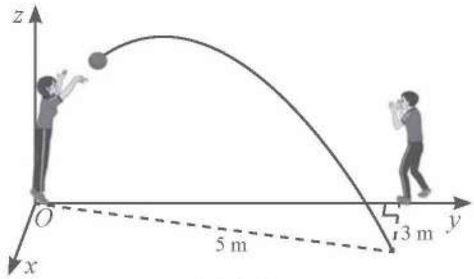
– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Ba vectơ pháp tuyến của ba mặt phẳng (F), (H), (G) lần lượt là $\vec{n}_1 = (3; 2; 5)$, $\vec{n}_2 = (1; -4; 1)$, $\vec{n}_3 = (1; -1; 3)$. Ta có duy nhất $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ nên $(F) \perp (H)$.

xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐVD 5

5 Hai học sinh đang chuyền bóng. Bạn nữ ném bóng cho bạn nam. Quả bóng bay trên không, lệch sang phải và rơi xuống tại vị trí cách bạn nam 3 m, cách bạn nữ 5 m (Hình 16). Cho biết quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt đất. Hãy viết phương trình của (P) trong không gian $Oxyz$ được mô tả như trong hình vẽ.



Hình 16

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế viết phương trình chứa quỹ đạo của quả bóng vuông góc với mặt đất trong hoạt động thể thao.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Gọi M là điểm mà quả bóng rơi trên mặt đất.

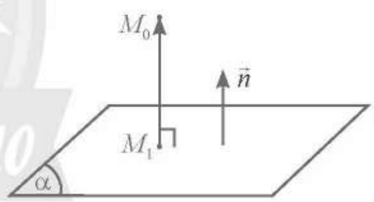
Khi đó $M(3; 4; 0)$. Mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$ và $\overrightarrow{OM} = (3;\ 4;\ 0)$ nên mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-4;\ 3;\ 0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $-4x + 3y = 0$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

HĐKP 9

9 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Gọi $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên (α) (Hình 17).



Hình 17

a) Nêu nhận xét về phương của hai vectơ:

$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$ và $\vec{n} = (A; B; C)$.

b) Tính $\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}$ theo A, B, C, D và toạ độ của M_0.

c) Giải thích tại sao ta lại có đẳng thức $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}\right|$.

d) Từ các kết quả trên suy ra cách tính $d(M_0, (\alpha)) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$.

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá cách xây dựng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thông qua việc sử dụng tích vô hướng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Hai vectơ cùng phương.

b) $\overrightarrow{M_1M_0}\ .\ \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

c) $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\,.\,\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right|\cos 0^\circ = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right|$.

d) $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\,.\,\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\,.\,\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$, do M_1 là hình chiếu của M_0 lên mặt phẳng (α) nên $d(M_0, (\alpha)) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\,.\,\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$.

HĐTH 7

7 a) Tính chiều cao của hình chóp $O.MNP$ với toạ độ các đỉnh là $O(0;\,0;\,0)$, $M(2;\,1;\,2)$, $N(3;\,3;\,3)$, $P(4;\,5;\,6)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (R): $8x + 6y + 70 = 0$ và (S): $16x + 12y - 2 = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Mặt phẳng (MNP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (1;\,2;\,1)$ và $\overrightarrow{MP} = (2;\,4;\,4)$ nên mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;\,-1;\,0)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $2(x-2) - (y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$.

Chiều cao của hình chóp $O.MNP$ là

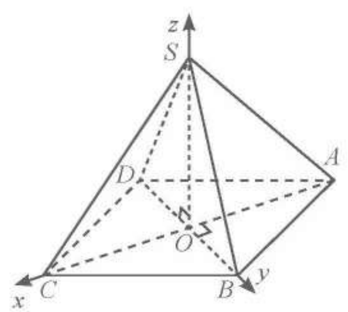
$$d(O, (MNP)) = \frac{|2.0 - 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (R) và (S) là khoảng cách từ điểm $M\left(0;\,\dfrac{1}{6};\,0\right)$ thuộc (S) đến mặt phẳng (R):

$$d((R), (S)) = d(M, (R)) = \frac{\left|8.0 + 6.\dfrac{1}{6} + 70\right|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{71}{10} = 7{,}1.$$

HĐVD 6

6 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục toạ độ $Oxyz$ như Hình 18, tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).



Hình 18

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:* Dựa vào hệ trục toạ độ như hình vẽ, ta có $O(0;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 2a)$, $A(-a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$ và $C(a;\ 0;\ 0)$.

Khi đó (SAB) có phương trình là $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{2a}=1$ hay $-2x+2y+z-2a=0$.

Vậy $d(C,\ (SAB))=\dfrac{|-2.a-2a|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{4a}{3}$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) $2x+y-z-4=0$; b) $2x-7y+4z=0$; c) $4x+2y+z-4=0$.

2. a) Mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm $O(0;\ 0;\ 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;\ 0;\ 1)$ nên có phương trình là $z=0$.

Mặt phẳng (Oyz) đi qua điểm $O(0;\ 0;\ 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;\ 0;\ 0)$ nên có phương trình là $x=0$.

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;\ 0;\ 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$ nên có phương trình là $y=0$.

b) Mặt phẳng đi qua điểm $A(-1;\ 9;\ 8)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) thì có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;\ 0;\ 1)$ nên có phương trình là $z-8=0$.

Mặt phẳng đi qua điểm $A(-1;\ 9;\ 8)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) thì có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;\ 0;\ 0)$ nên có phương trình là $x+1=0$.

Mặt phẳng đi qua điểm $A(-1;\ 9;\ 8)$ và song song với mặt phẳng (Oxz) thì có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$ nên có phương trình là $y-9=0$.

3. a) Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-4;\ 5;\ -1)$, $\overrightarrow{AC}=(0;\ -1;\ 1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]=(4;\ 4;\ 4)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$4(x-4)+4(y-0)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+z-6=0.$$

Mặt phẳng (ABD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(-4;\ 5;\ -1)$, $\overrightarrow{AD}=(-1;\ -1;\ 3)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right]=(14;\ 13;\ 9)$.

Phương trình mặt phẳng (ABD) là

$$14(x-4)+13(y-0)+9(z-2)=0 \Leftrightarrow 14x+13y+9z-74=0.$$

b) Phương trình mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AD}=(-1;\ -1;\ 3)$, $\overrightarrow{BC}=(4;\ -6;\ 2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC}\right]=(16;\ 14;\ 10)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$16(x-0)+14(y-5)+10(z-1)=0 \Leftrightarrow 8x+7y+5z-40=0.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

4. Vì $(Q) // (P)$ nên mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -5; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$3(x-1) - 5(y+5) + 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + 4z - 28 = 0.$$

5. Mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 2)$, $\vec{n}_\beta = (2; -1; 1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_\beta\right] = (4; 0; -8)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là

$$4(x-1) + 0(y-0) - 8(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 1 = 0.$$

6. Mặt phẳng (R) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_P = (4; -2; 6)$, $\vec{n}_Q = (2; 2; 2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right] = (-16; 4; 12)$.

Phương trình mặt phẳng (R) là

$$-16(x-1) + 4(y-2) + 12(z+1) = 0 \Leftrightarrow -4x + y + 3z + 5 = 0.$$

7. Ta có $d(O, (P)) = \dfrac{|3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 1$ và $d(M, (P)) = \dfrac{|2.1 - 2.(-2) - 13 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{3}$.

8. Ta thấy hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nên ta lấy điểm $M(2; 0; 0)$ thuộc (P). Kí hiệu $d((P), (Q))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có

$$d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|2-8|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 6.$$

9. Theo Hình 19, ta có $A(0; 0; 0)$, $S(0; 0; 3a)$, $B(2a; 0; 0)$, $D(0; 5a; 0)$ và $C(2a; 5a; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB} = (2a; 0; -3a)$, $\overrightarrow{SC} = (2a; 5a; -3a)$, suy ra $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (15a^2; 0; 10a^2)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 0; 2)$.

Vậy mặt phẳng (SBC) có phương trình là

$$3(x-0) + 2(z-3a) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2z - 6a = 0.$$

Khi đó $d(A, (SBC)) = \dfrac{|-6a|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}}a$.

10. $(P) // (Q)$; (P) vuông góc với (R); (Q) vuông góc với (R).

xem thêm tại chiasetailieuhay.com

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được phương trình chính tắc, phương trình tham số, vectơ chỉ phương của đường thẳng trong không gian.

– Thiết lập được phương trình của đường thẳng trong hệ trục toạ độ theo một trong hai cách cơ bản: đi qua một điểm và biết một vectơ chỉ phương, đi qua hai điểm.

– Xác định được điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.

– Thiết lập được công thức tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.

– Vận dụng được kiến thức về phương trình đường thẳng trong không gian để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. GV cần giới thiệu cho HS cách xây dựng phương trình tham số của đường thẳng trong không gian tương tự như cách xây dựng trong mặt phẳng.

2. GV cần tạo nhiều cơ hội để HS có thể vận dụng phương trình tham số của đường thẳng vào các tình huống thực tế mang tính hướng nghiệp.

3. Cần giảm bớt các bài tập thiên về tính toán và tăng cường các bài tập vận dụng về đường thẳng có liên quan đến các hình khối quen thuộc của hình học không gian.

4. GV có thể kết hợp phương trình đường thẳng và phương trình mặt phẳng đã học trong bài trước để tạo các cơ hội phong phú trong vận dụng và củng cố kiến thức.

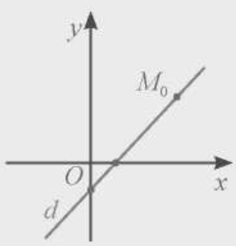
III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

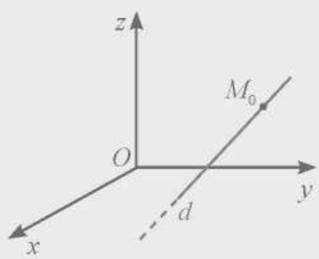
Ta đã biết trong mặt phẳng *Oxy*, phương trình tham số của đường thẳng có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} (a_1^2 + a_2^2 \neq 0, t \in \mathbb{R}).$$

Trong không gian *Oxyz*, phương trình tham số của đường thẳng có dạng như thế nào?



a) Đường thẳng trong mặt phẳng *Oxy*



b) Đường thẳng trong không gian *Oxyz*

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội thảo luận về cách biểu diễn đường thẳng trong không gian dựa vào kinh nghiệm trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Cách đặt vấn đề này có khả năng thu hút HS vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Phương trình đường thẳng d trong không gian có dạng

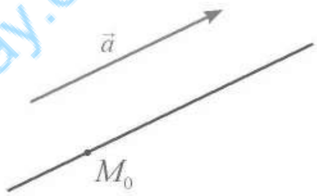
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0,\ t \in \mathbb{R}).$$

1. Phương trình đường thẳng trong không gian

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

HĐKP 1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M_0 cố định và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Có bao nhiêu đường thẳng d đi qua M_0 và song song hoặc trùng với giá của $\vec{a}$?



Hình 1

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá ý nghĩa của vectơ chỉ phương của đường thẳng trong không gian.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Có duy nhất một đường thẳng d đi qua M_0 và song song hoặc trùng với giá của $\vec{a}$.

HĐTH 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ với $A(1; 2; 1)$, $B(7; 5; 3)$, $C(4; 2; 0)$, $A'(4; 9; 9)$. Tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của mỗi đường thẳng AB, $A'C'$ và BB'.

– *Mục đích:* HS thực hành tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

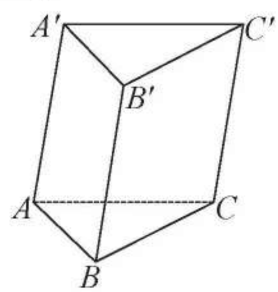
– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (6; 3; 2)$;

Đường thẳng $A'C'$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (3; 0; -1)$;

Đường thẳng BB' có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AA'} = (3; 7; 8)$.



xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Phương trình tham số của đường thẳng

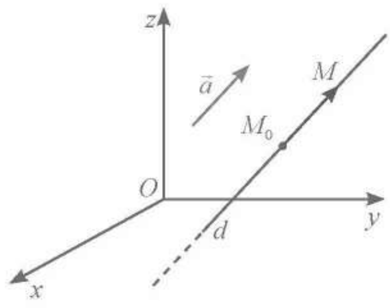
HĐKP 2

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ cố định và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ khác $\vec{0}$.

a) Giải thích tại sao ta có thể viết:

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \ (t \in \mathbb{R}).$$

b) Với $M(x; y; z)$ thuộc d, hãy tính x, y, z theo x_0, y_0, z_0 và a_1, a_2, a_3.



Hình 3

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá cách biểu diễn đường thẳng dưới dạng phương trình tham số.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ nên $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$.

b) $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$; $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \\ z - z_0 = ta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$

HĐTH 2, 3

Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -4t \\ z = 3 + 12t. \end{cases}$

a) Tìm hai vectơ chỉ phương của d.

b) Tìm ba điểm trên d.

Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(5; 0; -7)$ và nhận $\vec{v} = (9; 0; -2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d có đi qua điểm $M(-4; 0; -5)$ không?

– *Mục đích:* HS thực hành xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng, tìm điểm thuộc đường thẳng, viết phương trình tham số để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

HĐTH 2:

a) Hai vectơ chỉ phương của d là $\vec{a} = (8; -4; 12)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$.

b) Thay t lần lượt bằng -1; 0; 1 vào phương trình tham số của d, ta được 3 điểm trên d là $A(-9; 4; -9)$, $B(-1; 0; 3)$, $C(7; -4; 15)$.

xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐTH 3:

Ta có phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 5 + 9t \\ y = 0 \\ z = -7 - 2t. \end{cases}$

Thay toạ độ của M vào phương trình tham số của d, ta được

$$\begin{cases} -4 = 5 + 9t \\ 0 = 0 \\ -5 = -7 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \end{cases} \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm M.

Phương trình chính tắc của đường thẳng

HĐKP 3

Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ với a_1, a_2, a_3 đều khác 0.

Lấy điểm $M(x; y; z)$ bất kì thuộc d. So sánh các biểu thức: $\dfrac{x - x_0}{a_1}; \dfrac{y - y_0}{a_2}; \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá cách viết phương trình chính tắc của đường thẳng từ phương trình tham số.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$.

HĐTH 4

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(5; 0; -6)$ và nhận $\vec{a} = (3; 2; -4)$ làm vectơ chỉ phương.

– *Mục đích:* HS thực hành viết phương trình chính tắc của đường thẳng trong không gian để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(5; 0; -6)$ và nhận $\vec{a} = (3; 2; -4)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc: $\dfrac{x - 5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z + 6}{-4}$.

Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm

HĐKP 4

Cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2; 2; 1)$ và $B(4; 5; 3)$.

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d.

b) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của d.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá cách viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{AB} = (2;\ 3;\ 2)$.

b) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của d là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

HĐTH 5

5 Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng MN, biết $M(2;\ 0;\ -1)$ và $N(4;\ 3;\ 1)$.

– *Mục đích:* HS thực hành viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Đường thẳng d đi qua hai điểm M, N nên d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = (2;\ 3;\ 2)$.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc của d là: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$.

HĐVD 1

1 Một mô hình cầu treo được thiết kế trong không gian $Oxyz$ như Hình 4. Viết phương trình tham số của đường thẳng d biểu diễn làn đường đi qua hai điểm $M(4;\ 3;\ 20)$ và $N(4;\ 1000;\ 20)$.

Hình 4

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng phương trình tham số vào thực tế thiết kế xây dựng.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Ta có $\overrightarrow{MN} = (0;\ 997;\ 0)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm M, N nên d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \dfrac{1}{997}\overrightarrow{MN} = (0;\ 1;\ 0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 + t \\ z = 20. \end{cases}$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Điều kiện để hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

HĐKP 5

5 Cho ba đường thẳng

d: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t; \end{cases}$ d': $\begin{cases} x = 2t' \\ y = 7 + 4t' \\ z = 2 + 6t' \end{cases}$ và d'': $\begin{cases} x = 5 + 2t'' \\ y = 3 + 4t'' \\ z = 4 + 6t''. \end{cases}$

a) Nêu nhận xét về ba vectơ chỉ phương của d, d' và d''.

b) Xét điểm $M(4; 1; 1)$ nằm trên d. Điểm M có nằm trên d' hoặc d'' không?

c) Từ các kết quả trên, ta có thể kết luận gì về vị trí tương đối giữa d và d', d và d''?

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá cách xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng khi biết phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc của hai đường thẳng đó.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Ba vectơ chỉ phương của d, d' và d'' cùng phương.

b) $M \notin d'$; $M \in d''$.

c) $d \,//\, d'$; $d \equiv d''$.

HĐTH 6

6 Kiểm tra tính song song hoặc trùng nhau của các cặp đường thẳng sau:

a) d: $\begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ và d': $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-4}{-1}$;

b) d: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ và d': $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-5}{4}$.

– *Mục đích:* HS thực hành kiểm tra tính song song hoặc trùng nhau của hai đường thẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(7; 3; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -2; -2)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (2; -1; -1) = \dfrac{1}{2}\vec{a}$.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình của d', ta được: $\dfrac{7-3}{2} = \dfrac{3-5}{-1} = \dfrac{2-4}{-1}$.

Phương trình nghiệm đúng, suy ra M thuộc d'. Vậy $d \equiv d'$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;\ 0;\ 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3;\ 3;\ 4)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (3;\ 3;\ 4) = \vec{a}$.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình của d', ta được: $\dfrac{0-2}{3} = \dfrac{0-9}{3} = \dfrac{1-5}{4}$ (không thoả mãn).

Suy ra M không thuộc d'. Vậy $d \,//\, d'$.

HĐVD 2

Trên một máy khoan bàn đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ. Nêu nhận xét về vị trí giữa trục d của mũi khoan và trục d' của giá đỡ có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 5 + 5t'. \end{cases}$$

Hình 6

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào thực tế nghiên cứu cấu tạo máy khoan.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\ 1;\ 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (0;\ 0;\ 1)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (0;\ 0;\ 5) = 5\vec{a}$.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình của d', ta được $\begin{cases} 1 = 10 \\ 1 = 20 \\ 1 = 5 + 5t' \end{cases}$ (không thoả mãn).

Suy ra M không thuộc d'. Vậy $d \,//\, d'$.

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau

HĐKP 6

Cho ba đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t; \end{cases} \qquad d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -2 + t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} \qquad \text{và} \qquad d'': \begin{cases} x = 2 - 2t'' \\ y = -2 + t'' \\ z = 3 + 3t''. \end{cases}$$

a) Đường thẳng d' và đường thẳng d'' có song song hay trùng với đường thẳng d không?

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t' \\ 2 + 3t = -2 + t' \\ 3 - t = 1 + 3t' \end{cases}$ (ẩn t và t').

Từ đó nhận xét vị trí tương đối giữa d và d'.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t'' \\ 2 + 3t = -2 + t'' \\ 3 - t = 3 + 3t'' \end{cases}$ (ẩn t và t'').

Từ đó nhận xét vị trí tương đối giữa d và d''.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá cách xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng khi biết phương trình tham số hoặc chính tắc của hai đường thẳng đó.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. Có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) d', d'' không song song, không trùng với d vì các vectơ chỉ phương không cùng phương.

b) $\begin{cases} 1+t=2-2t' \\ 2+3t=-2+t' \\ 3-t=1+3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t'=1 \\ t+3t'-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t'=1. \end{cases}$

Vậy d và d' cắt nhau tại một điểm.

c) $\begin{cases} 1+t=2-2t'' \\ 2+3t=-2+t'' \\ 3-t=3+3t'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t''=1 \\ t+3t''=0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Hệ phương trình vô nghiệm và hai đường thẳng d, d' không song song, không trùng nhau nên d và d' chéo nhau.

HĐTH 7

Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) d: $\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2-3t \end{cases}$ và d': $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z+1}{11}$;

b) d: $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và d': $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{9}$.

– *Mục đích:* HS thực hành xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(2;-1;-3)$ và $\vec{a}'=(4;7;11)$.

Ta có $\dfrac{2}{4}\neq\dfrac{-1}{7}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

d' có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2+4t' \\ y=7t' \\ z=-1+11t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2t=2+4t' & (1) \\ 1-t=7t' & (2) \\ 2-3t=-1+11t'. & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $t = 1$; $t' = 0$. Thay vào (3) ta thấy phương trình thoả mãn.

Vậy d cắt d' tại điểm $M(2; 0; -1)$.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; 2)$ và $\vec{a}' = (3; 2; 9)$.

Ta có $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{2}{2}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

d và d' có phương trình tham số lần lượt là $d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 + 3t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 1 + 9t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 4 + t = 2 + 3t' & (1) \\ 1 + 2t = 1 + 2t' & (2) \\ 1 + 2t = 1 + 9t'. & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $t = 1$; $t' = 1$. Thay vào (3) ta thấy phương trình không thoả mãn $(3 \neq 10)$.

Vậy d và d' chéo nhau.

HĐVD 3

Trên phần mềm thiết kế chiếc cầu treo, cho đường thẳng d trên trụ cầu và đường thẳng d' trên sàn cầu có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 50 + t \end{cases} \quad \text{và } d': \begin{cases} x = 20 \\ y = t' \\ z = 50. \end{cases}$$

Xét vị trí tương đối giữa d và d'.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Hình 8

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng việc xác định vị trí tương đối của đường thẳng nhờ phương trình tham số vào thực tế thiết kế xây dựng.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (0; 0; 1)$ và $\vec{a}' = (0; 1; 0)$.

Ta có $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 0 = 20 & (1) \\ 0 = t' & (2) \\ 50 + t = 50. & (3) \end{cases}$

Ta thấy phương trình (1) vô nghiệm nên d và d' chéo nhau.

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

HĐKP 7

Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = t' \\ y = 7 + 4t' \\ z = 9t'. \end{cases}$

a) Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ lần lượt của d và d'.

b) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}'$. Từ đó, có nhận xét gì về hai đường thẳng d và d'?

– *Mục đích:* Giúp HS khám phá cách tìm điều kiện để hai đường thẳng vuông góc từ toạ độ vectơ chỉ phương của chúng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\vec{a} = (1; 2; -1)$; $\vec{a}' = (1; 4; 9)$

b) $\vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$ nên d và d' vuông góc với nhau.

HĐTH 8

Kiểm tra tính vuông góc của các cặp đường thẳng sau:

a) d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{1}$ và d': $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -6 + 2t; \end{cases}$

b) d: $\dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{1}$ và d': $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-5}{2}$.

– *Mục đích:* HS thực hành kiểm tra tính vuông góc của hai đường thẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1; -3; 1)$ và $\vec{a}' = (1; 1; 2)$.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{a}' = 1 - 3 + 2 = 0$. Vậy d và d' vuông góc với nhau.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (7; 3; 1)$ và $\vec{a}' = (2; 2; 2)$.

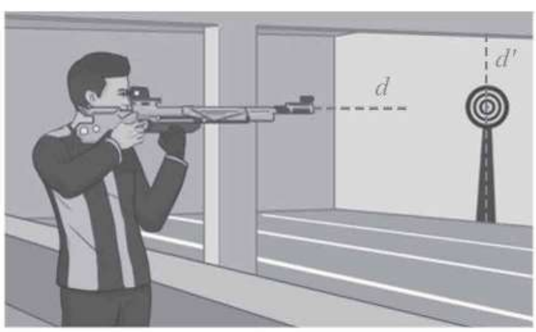
Ta có $\vec{a} \cdot \vec{a}' = 14 + 6 + 2 = 22 \neq 0$. Vậy d và d' không vuông góc với nhau.

HĐVD 4

Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' có phương trình lần lượt là:

d: $\begin{cases} x = t \\ y = 20 \\ z = 9 \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 1 + 3t'. \end{cases}$

Xét vị trí tương đối giữa d và d', chúng có vuông góc với nhau không?



Hình 9

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng kiến thức vừa học vào hoạt động thực tế tích hợp giữa toán học và thể thao trong huấn luyện bắn súng nhằm tạo hứng thú cho HS.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1;\ 0;\ 0)$ và $\vec{a}' = (0;\ 0;\ 3)$.

Ta có $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Suy ra d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Vì d và d' cùng đi qua điểm $M(10;\ 20;\ 9)$ nên d và d' cắt nhau.

Ta lại có $\vec{a}.\vec{a}' = 0 + 0 + 0 = 0$. Vậy d và d' vuông góc với nhau tại $M(10;\ 20;\ 9)$.

3. Góc

Góc giữa hai đường thẳng

HĐKP 8

Cho hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (2;\ 1;\ 3)$ và $\vec{a}' = (3;\ 2;\ -8)$.

a) Nhắc lại định nghĩa góc giữa hai đường thẳng d và d' trong không gian.

b) Vectơ $\vec{b} = (-2;\ -1;\ -3)$ có phải là một vectơ chỉ phương của d không?

c) Giải thích tại sao ta lại có đẳng thức $\cos(d,\ d') = \left|\cos(\vec{a},\ \vec{a}')\right| = \left|\cos(\vec{b},\ \vec{a}')\right|$.

d) Nêu cách tìm côsin của góc giữa hai đường thẳng theo côsin của góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá công thức tính góc giữa hai đường thẳng bằng cách sử dụng tích vô hướng của các vectơ chỉ phương.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Góc giữa hai đường thẳng d và d' trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với d và d'.

b) Vectơ $\vec{b}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d vì $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$.

c) Góc giữa hai đường thẳng có độ lớn từ 0° đến 90° nên $\cos(d,\ d') \geq 0$.

Do đó, $\cos(d, d') = \left|\cos(\vec{a}, \vec{a}')\right| = \left|\cos(\vec{b}, \vec{a}')\right|$.

d) Côsin của góc giữa hai đường thẳng bằng giá trị tuyệt đối của côsin của góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

HĐTH 9

Tính góc giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) d: $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-11}{4}$ và d': $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+6}{5} = \dfrac{z-1}{-4}$;

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) d: $\dfrac{x+9}{3}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z+1}{6}$ và d': $\begin{cases} x=9-10t \\ y=7-10t \\ z=15+5t; \end{cases}$

c) d: $\begin{cases} x=23+2t \\ y=57+t \\ z=19-5t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x=24+t' \\ y=6+t' \\ z=t'. \end{cases}$

– *Mục đích:* HS thực hành tính góc giữa hai đường thẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(3;\,5;\,4)$ và $\vec{a}'=(2;\,5;\,-4)$.

Ta có $\cos(d,d')=\dfrac{|3.2+5.5+4.(-4)|}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}.\sqrt{2^2+5^2+(-4)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Suy ra $(d,\,d')\approx 71^\circ34'$.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(3;\,6;\,6)$ và $\vec{a}'=(-10;\,-10;\,5)$.

Ta có $\cos(d,d')=\dfrac{|3.(-10)+6.(-10)+6.5|}{\sqrt{3^2+6^2+6^2}.\sqrt{(-10)^2+(-10)^2+5^2}}=\dfrac{4}{9}$. Suy ra $(d,\,d')\approx 63^\circ37'$.

c) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(2;\,1;\,-5)$ và $\vec{a}'=(1;\,1;\,1)$.

Ta có $\cos(d,d')=\dfrac{|2.1+1.1+(-5).1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{15}$. Suy ra $(d,\,d')\approx 77^\circ50'$.

HĐVD 5

5 Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính góc giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là:

d: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và d': $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{9}$.

Hình 11

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng công thức tính góc giữa hai đường thẳng vào hoạt động thiết kế ánh sáng cho sân khấu nhằm tạo hứng thú cho HS.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

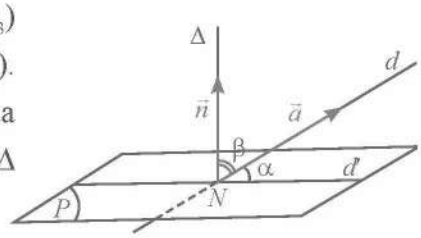
d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(2;\,1;\,-1)$ và $\vec{a}'=(3;\,3;\,9)$.

Ta có $\cos(d,d')=\dfrac{|2.3+1.3+(-1).9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+3^2+9^2}}=0$. Suy ra $(d,\,d')=90^\circ$.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

HĐKP 9

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$. Biết d cắt (P) tại điểm N và hình chiếu vuông góc của d lên (P) là đường thẳng d'. Qua N vẽ đường thẳng Δ vuông góc với (P) (Hình 12).



Hình 12

a) Nhắc lại định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

b) Có nhận xét gì về số đo hai góc $\alpha = (d, d')$; $\beta = (\Delta, d)$?

c) Giải thích tại sao ta lại có đẳng thức:

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})|.$$

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng cách sử dụng tích vô hướng của vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng) là góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

b) α và β là hai góc phụ nhau.

c) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn, hơn nữa do hai góc phụ nhau nên sin góc này bằng côsin góc kia.

Ta có: $\sin(d, (P)) = \sin(d, d') = \cos(d, \Delta) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})|$.

HĐTH 10

Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) d: $\begin{cases} x = 11 + 3t \\ y = -11 + t \\ z = -21 - 2t \end{cases}$ và (P): $6x + 2y - 4z + 7 = 0$;

b) d: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z-5}{2}$ và (P): $2x + 2y - 4z + 1 = 0$;

c) d: $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z+11}{2}$ và (P): $2y - 4z + 7 = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3;\ 1;\ -2)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (6;\ 2;\ -4)$.

Ta có $\sin(d,(P)) = \dfrac{|3.6 + 1.2 + (-2).(-4)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}.\sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 1$. Suy ra $(d,\ (P)) = 90^\circ$.

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;\ 4;\ 2)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;\ 2;\ -4)$.

Ta có $\sin(d,(P)) = \dfrac{|2.2 + 4.2 + 2.(-4)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2}.\sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{6}$. Suy ra $(d,\ (P)) \approx 9^\circ 36'$.

c) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;\ 4;\ 2)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;\ 2;\ -4)$.

Ta có $\sin(d,(P)) = \dfrac{|4.0 + 4.2 + 2.(-4)|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}.\sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$. Suy ra $(d,\ (P)) = 0^\circ$.

HĐVD 6

6 Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt sàn sân khấu có phương trình $z = 0$.

Hình 13

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng vào hoạt động thiết kế ánh sáng cho sân khấu nhằm tạo hứng thú cho HS.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (0;\ 1;\ 1)$. Mặt sàn sân khấu (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;\ 0;\ 1)$.

Ta có $\sin(d,(P)) = \dfrac{|0.0 + 1.0 + 1.1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $(d,\ (P)) = 45^\circ$.

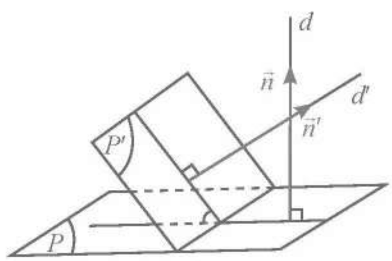
Góc giữa hai mặt phẳng

HĐKP 10

10 Cho hai mặt phẳng (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (n_1;\ n_2;\ n_3)$, $\vec{n}' = (n'_1;\ n'_2;\ n'_3)$ (Hình 14).

Gọi d và d' là hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (P) và (P'). Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') là góc giữa hai đường thẳng d và d'.

So sánh $\cos((P),\ (P'))$ và $\cos(\vec{n},\ \vec{n}')$.



Hình 14

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* Hướng dẫn HS khám phá công thức tính góc giữa hai mặt phẳng bằng cách sử dụng tích vô hướng của các vectơ pháp tuyến.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\cos((P),(P')) = |\cos(\vec{n},\vec{n}')|$.

HĐTH 11

Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') trong mỗi trường hợp sau:

a) (P): $3x + 7y - z + 4 = 0$ và (P'): $x + y - 10z + 2025 = 0$;

b) (P): $x + y - 2z + 9 = 0$ và (P'): $3x - 5y + z + 2024 = 0$;

c) (P): $x + z + 3 = 0$ và (P'): $3y + 3z + 5 = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành tính góc giữa hai mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (3; 7; -1)$, $\vec{n}' = (1; 1; -10)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = \dfrac{|3.1+7.1+(-1).(-10)|}{\sqrt{3^2+7^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-10)^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{6018}}$.

Suy ra $((P), (P')) \approx 75^\circ 4'$.

b) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (1; 1; -2)$, $\vec{n}' = (3; -5; 1)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = \dfrac{|1.3+1.(-5)+(-2).1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{3^2+(-5)^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{210}}$.

Suy ra $((P), (P')) \approx 73^\circ 59'$.

c) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (1; 0; 1)$, $\vec{n}' = (0; 3; 3)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = \dfrac{|1.0+0.3+1.3|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}.\sqrt{0^2+3^2+3^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $((P), (P')) = 60^\circ$.

HĐTH 12

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Cho biết $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 5; 0)$, $A'(0; 0; 3)$. Tính góc giữa:

a) hai đường thẳng AC và BA';

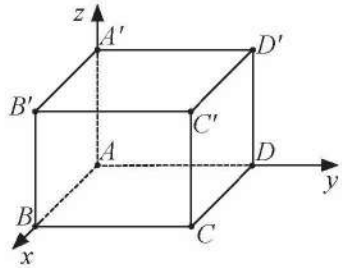
b) hai mặt phẳng $(BB'D'D)$ và $(AA'C'C)$;

c) đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

– *Mục đích:* HS thực hành tính các loại góc trong không gian bằng phương pháp toạ độ để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.



– *Hướng dẫn, đáp án:*

Trong không gian $Oxyz$, ta có $C(1;\ 5;\ 0)$, $B'(1;\ 0;\ 3)$, $C'(1;\ 5;\ 3)$, $D'(0;\ 5;\ 3)$.

a) Đường thẳng AC và BA' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{AC}=(1;\ 5;\ 0)$ và $\overrightarrow{BA'}=(-1;\ 0;\ 3)$.

Ta có $\cos(AC, BA') = |\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA'})| = \dfrac{|1.(-1)+5.0+0.3|}{\sqrt{1^2+5^2+0^2}.\sqrt{(-1)^2+0^2+3^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{260}}$.

Suy ra $(AC, BA') \approx 86^\circ 27'$.

b) Mặt phẳng $(BB'D'D)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BB'}=(0;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{BD}=(-1;\ 5;\ 0)$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BD}\right]=(-15;\ -3;\ 0)$.

Mặt phẳng $(AA'C'C)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AA'}=(0;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\ 5;\ 0)$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right]=(-15;\ 3;\ 0)$.

Ta có $\cos((BB'D'D), (AA'C'C)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$

$$= \frac{|(-15).(-15)+(-3).3+0.0|}{\sqrt{(-15)^2+(-3)^2+0^2}.\sqrt{(-15)^2+3^2+0^2}} = \frac{12}{13}.$$

Suy ra $((BB'D'D), (AA'C'C)) \approx 22^\circ 37'$.

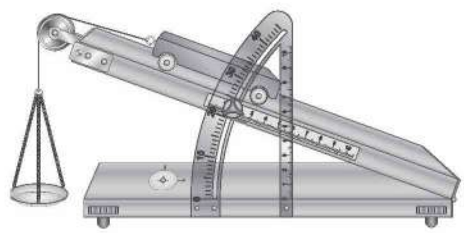
c) Đường thẳng AC' có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC'}=(1;\ 5;\ 3)$. Mặt phẳng $(A'BD)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B}=(1;\ 0;\ -3)$, $\overrightarrow{A'D}=(0;\ 5;\ -3)$ nên có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(15;\ 3;\ 5)$.

Ta có $\sin(AC', (A'BD)) = \left|\cos(\overrightarrow{AC'}, \vec{n})\right| = \dfrac{|1.15+5.3+3.5|}{\sqrt{1^2+5^2+3^2}.\sqrt{15^2+3^2+5^2}} = \dfrac{45}{7\sqrt{185}}$.

Suy ra $(AC', (A'BD)) \approx 28^\circ 12'$.

HĐVD 7

Để làm thí nghiệm về chuyển động trong mặt phẳng nghiêng, người làm thí nghiệm đã thiết lập sẵn một hệ toạ độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng nghiêng (P): $4x + 11z + 5 = 0$ và mặt sàn (Q): $z - 1 = 0$.



Hình 16

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng vào một thí nghiệm về mặt phẳng nghiêng nhằm tạo hứng thú cho HS.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:* (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (4;\ 0;\ 11)$, $\vec{n}' = (0;\ 0;\ 1)$.

Ta có $\cos((P),(Q)) = \dfrac{|4.0+0.0+11.1|}{\sqrt{4^2+0^2+11^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{137}}$. Suy ra $((P),(Q)) \approx 20^\circ$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Ta có phương trình tham số của a là: $\begin{cases} x = t \\ y = -2-5t \\ z = -3. \end{cases}$

b) Đường thẳng a đi qua hai điểm A, B nên a có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (3;\ -2;\ 3)$.

Ta có phương trình tham số của a là: $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 2+3t. \end{cases}$

2. a) Ta có phương trình chính tắc của b là: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$.

b) Đường thẳng b đi qua hai điểm A, B nên b có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;\ -3;\ 2)$.

Ta có phương trình chính tắc của b là: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$.

3. a) d có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;\ 3;\ 7)$ và d đi qua điểm $M(3;\ -3;\ 2)$.

b) Đặt $t = x-3 = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-2}{7}$ ta có phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -3+3t \\ z = 2+7t. \end{cases}$

4. Đường thẳng MN đi qua hai điểm M, N nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (0;\ 1;\ 0)$.

Ta có phương trình tham số của MN là: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3+t \\ z = 1,5. \end{cases}$

5. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\ -1;\ -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;\ 2;\ 1)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (2;\ 4;\ 2) = 2\vec{a}$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ cùng phương, suy ra d *và* d' hoặc song song hoặc trùng nhau.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình của d' ta được: $\begin{cases} 1 = 2+2t' \\ -1 = 3+4t' \\ -2 = 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\dfrac{1}{2} \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Suy ra M không thuộc d'. Vậy $d \,//\, d'$.

b) d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (1;\ 2;\ 2)$, $\vec{a}' = (1;\ 5;\ 1)$.

Ta có $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{5}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Vậy d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, d': $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 + 5t' \\ z = 1 + t'. \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 2 + t' & (1) \\ 2 + 2t = 1 + 5t' & (2) \\ 3 + 2t = 1 + t'. & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $t = 2$, $t' = 1$. Thay vào (3) ta thấy phương trình không thoả mãn $(7 \neq 2)$.

Vậy d và d' chéo nhau.

6. d' có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'} = (3; 2; 4)$.

Vì d song song với d' nên d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \vec{u}_{d'} = (3; 2; 4)$.

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$

7. a) a và b có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (0; 0; 3)$, $\vec{b} = (4; 2; 0)$.

Ta có $\vec{a} \neq k\vec{b}$, suy ra $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Vậy a và b hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1 = 1 + 4t' \\ 2 = 2 + 2t' \\ 3t = 6. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $t = 2$; $t' = 0$. Vậy a và b cắt nhau.

Mặt khác $\vec{a}.\vec{b} = 0$, suy ra a và b vuông góc với nhau.

Vậy đường thẳng a vuông góc và cắt đường thẳng b.

b) Thay $t = 2$ vào phương trình đường thẳng a ta được giao điểm là $M(1; 2; 6)$.

8. d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (2; 4; 2)$ và $\vec{a}' = (3; 3; 6)$.

Ta có $\cos(d, d') = |\cos(\vec{a}, \vec{a}')| = \dfrac{|2.3 + 4.3 + 2.6|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2}.\sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2}} = \dfrac{5}{6}$.

Vậy $(d, d') \approx 33^\circ 33'$.

9. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 2; 1)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 3; -3)$.

Ta có $\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \dfrac{|2.0 + 2.3 + 1.(-3)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $(d, (P)) \approx 13^\circ 38'$.

10. (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là là $\vec{n} = (0; 4; 4)$, $\vec{n}' = (7; 0; 7)$.

Ta có $\cos((P), (P')) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \dfrac{|0.7 + 4.0 + 4.7|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2}.\sqrt{7^2 + 0^2 + 7^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $((P), (P')) = 60^\circ$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

11. a) (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (2;\ 0;\ 2)$, $\vec{n}' = (1;\ 0;\ 1)$.

Ta có $\cos((P),(P')) = \left|\cos(\vec{n},\vec{n}')\right| = \dfrac{|2.1+0.0+2.1|}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}.\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = 1.$

Vậy $((P),(P')) = 0^\circ$.

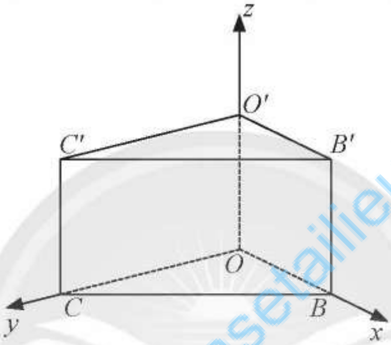
b) (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (2;\ 0;\ 2)$, $\vec{m} = (0;\ 0;\ 1)$.

Ta có $\cos((P),(Q)) = \left|\cos(\vec{n},\vec{m})\right| = \dfrac{|2.0+0.0+2.1|}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Vậy $((P),(Q)) = 45^\circ$.

Vì (P) và (P') song song với nhau nên $((P'),(Q)) = 45^\circ$.

12. Trong không gian $Oxyz$, ta có $B'(3;\ 0;\ 2)$, $C'(0;\ 1;\ 2)$.



a) BO' và $B'C$ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{BO'} = (-3;\ 0;\ 2)$ và $\overrightarrow{B'C} = (-3;\ 1;\ 2)$.

Ta có $\cos(BO',B'C) = \left|\cos\left(\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{B'C}\right)\right| = \dfrac{\left|(-3).(-3)+0.1+2.(-2)\right|}{\sqrt{(-3)^2+0^2+2^2}.\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{182}}.$

Vậy $(d, d') \approx 68^\circ15'$.

b) Mặt phẳng $(O'BC)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{O'B} = (3;\ 0;\ -2)$; $\overrightarrow{O'C} = (0;\ 1;\ -2)$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{O'B},\overrightarrow{O'C}\right] = (2;\ -6;\ 3)$.

Mặt phẳng (OBC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = \overrightarrow{OO'} = (0;\ 0;\ 2)$.

Ta có $\cos((O'BC),(OBC)) = \left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \dfrac{|2.0+(-6).0+3.2|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}.\sqrt{0^2+0^2+2^2}} = \dfrac{3}{7}.$

Vậy $((O'BC),(OBC)) \approx 64^\circ37'$.

c) Đường thẳng $B'C$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{B'C} = (-3;\ 1;\ -2)$.

Mặt phẳng $(O'BC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2;\ -6;\ 3)$.

Ta có $\sin(B'C,(O'BC)) = \left|\cos(\overrightarrow{B'C},\ \vec{n}_1)\right|$

$$= \dfrac{|(-3).2+1.(-6)+2.3|}{\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \dfrac{6}{7\sqrt{14}}.$$

Vậy $(B'C, (O'BC)) \approx 13^\circ15'$.

Xem thêm tài chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được phương trình mặt cầu.

– Xác định được tâm, bán kính của mặt cầu khi biết phương trình của nó.

– Thiết lập được phương trình của mặt cầu khi biết tâm và bán kính.

– Vận dụng được kiến thức về phương trình mặt cầu để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Năng lực cần chú trọng: tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. Do chương trình lớp 11 chưa giới thiệu về mặt cầu nên GV cần trình bày bổ sung khái niệm mặt cầu trước khi xây dựng phương trình mặt cầu trong không gian *Oxyz*.

2. GV cần giới thiệu cho HS cách xây dựng phương trình mặt cầu trong không gian *Oxyz* tương tự như cách viết phương trình đường tròn trên mặt phẳng *Oxy*.

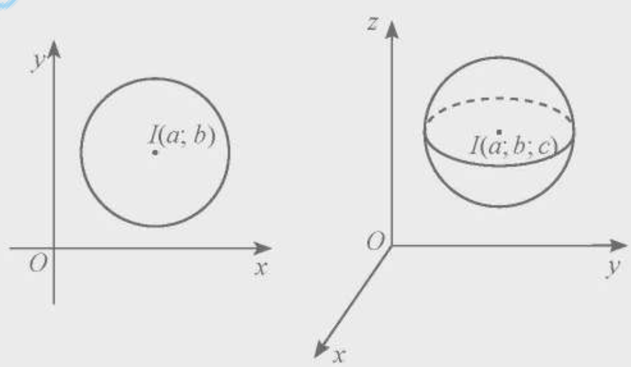
3. GV cần tạo nhiều cơ hội để HS có thể vận dụng phương trình mặt cầu vào các hoạt động thực tiễn.

4. Cần giảm bớt các bài tập thiên về tính toán, tập trung vào các tình huống giải quyết vấn đề trong thực tế.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ



Ta đã biết trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, phương trình đường tròn tâm *I*(*a*; *b*), bán kính *R* có dạng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Trong không gian *Oxyz*, phương trình mặt cầu có dạng như thế nào?

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội thảo luận về cách mở rộng kiến thức từ phương trình đường tròn trong mặt phẳng toạ độ Oxy sang phương trình mặt cầu trong không gian $Oxyz$. Cách đặt vấn đề này có khả năng thu hút HS vào bài học.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV sử dụng cơ hội để giới thiệu bài.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Phương trình mặt cầu có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

1. Phương trình mặt cầu trong không gian

Phương trình của mặt cầu

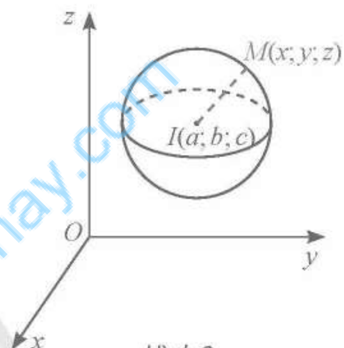
HĐKP 1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S(I;\ R)$ có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và bán kính R.

Xét một điểm $M(x;\ y;\ z)$ thay đổi.

a) Tính khoảng cách IM theo x, y, z và a, b, c.

b) Nêu điều kiện cần và đủ của x, y, z để điểm $M(x;\ y;\ z)$ nằm trên mặt cầu $S(I;\ R)$.



Hình 2

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội khám phá cách biểu diễn mặt cầu bằng phương pháp toạ độ.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) $\overrightarrow{IM} = (x-a;\ y-b;\ z-c)$; $IM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

b) Điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên mặt cầu $S(I;\ R)$ là

$$IM = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

HĐTH 1

Viết phương trình mặt cầu (S):

a) Có tâm $I(3;\ -2;\ -4)$, bán kính $R = 10$;

b) Có đường kính EF với $E(3;\ -1;\ 8)$ và $F(7;\ -3;\ 0)$;

c) Có tâm $M(-2;\ 1;\ 3)$ và đi qua điểm $N(2;\ -3;\ -4)$.

– *Mục đích:* HS thực hành viết phương trình mặt cầu trong nhiều tình huống khác nhau để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 100$.

Xem thêm tại chiasetailieuthay.com

b) Gọi I là trung điểm của EF, suy ra $I(5; -2; 4)$ là tâm của mặt cầu (S).

Mặt cầu (S) có đường kính EF nên có bán kính $R = \frac{EF}{2}$.

Ta có $R^2 = \frac{EF^2}{4} = \frac{4^2 + (-2)^2 + (-8)^2}{4} = 21$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 21$.

c) Mặt cầu (S) có tâm $M(-2; 1; 3)$ và đi qua điểm $N(2; -3; -4)$ nên có bán kính $R = MN$.

Ta có $R^2 = MN^2 = 4^2 + (-4)^2 + (-7)^2 = 81$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 81$.

HĐVD 1

1 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục toạ độ là mét), các nhà nghiên cứu khí tượng dùng một phần mềm mô phỏng bề mặt của một quả bóng thám không có dạng hình cầu bằng phương trình $(x-300)^2 + (y-400)^2 + (z-2\,000)^2 = 1$. Tìm toạ độ tâm, bán kính của quả bóng và tính khoảng cách từ tâm của quả bóng đến mặt đất có phương trình $z = 0$.

Hình 3

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng phương trình mặt cầu vào thực tế mô tả bóng thám không trong nghiên cứu khí tượng bằng phương pháp toạ độ trong không gian.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Mặt cầu có tâm là $I(300; 400; 2\,000)$, bán kính là $R = 1$.

Khoảng cách từ tâm I của quả bóng đến mặt đất là $d = 2\,000$ m.

HĐKP 2

2 a) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x; y; z)$ thay đổi có toạ độ luôn thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. (*)

i) Biến đổi (*) về dạng: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

ii) Chứng tỏ $M(x; y; z)$ luôn thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của (S).

b) Bằng cách biến đổi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 15 = 0$ (**) về dạng $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = -1$, hãy cho biết phương trình (**) có thể là phương trình mặt cầu hay không.

– *Mục đích:* Giúp HS có cơ hội nhận biết các điều kiện để một phương trình theo x, y, z có thể là phương trình của một mặt cầu.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu câu hỏi, HS trả lời, lớp nhận xét, GV đánh giá. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) - 25 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

ii) $IM = 5 = R$ với $I(1; 2; 3)$ nên M luôn thuộc mặt cầu (S), tâm I, bán kính $R = 5$.

b) Không là phương trình mặt cầu.

HĐTH 2

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 32 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z + 4 = 0$.

– *Mục đích:* HS thực hành nhận biết phương trình mặt cầu để rèn luyện kĩ năng theo yêu cầu cần đạt.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 32 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = 0$; $b = 0$; $c = -2$; $d = -32$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 4 + 32 = 36 > 0$.

Suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(0; 0; -2)$, bán kính $R = 6$.

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z + 4 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = -1$; $b = -1$; $c = 1$; $d = 4$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 1 - 4 = -1 < 0$.

Suy ra phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

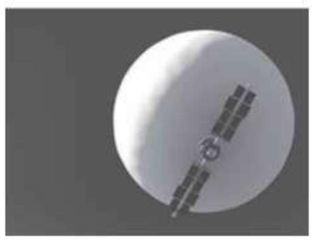
2. Vận dụng của phương trình mặt cầu

HĐVD 2

Bề mặt của một bóng thám không dạng hình cầu có phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 - 200x - 600y - 4\,000z + 4\,099\,900 = 0$.

Tìm toạ độ tâm và bán kính mặt cầu.



Hình 7

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng phương trình mặt cầu vào thực tế xác định toạ độ tâm của bóng thám không trong hoạt động nghiên cứu khí tượng.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 200x - 600y - 4\,000z + 4\,099\,900 = 0$ có dạng

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = 100$; $b = 300$; $c = 2\,000$; $d = 4\,099\,900$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 100^2 + 300^2 + 2\,000^2 - 4\,099\,900 = 100 > 0$.

Vậy mặt cầu có tâm $I(100; 300; 2\,000)$, bán kính $R = 10$.

HĐVD 3

3 Đầu in phun của một máy in 3D đang in bề mặt của một mặt cầu có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y - z + \frac{1}{16} = 0.$$

Tính khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu.

Hình 8

– *Mục đích:* HS có cơ hội vận dụng phương trình mặt cầu vào thực tế tính khoảng cách trong máy in 3D.

– *Gợi ý tổ chức:* HS trả lời yêu cầu vào vở, GV sửa chung trước lớp. GV có thể tổ chức cho HS làm việc nhóm hoặc thuyết trình.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu chính là bán kính của mặt cầu.

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y - z + \frac{1}{16} = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

với $a = -\frac{1}{16}$; $b = \frac{1}{16}$; $c = \frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{16}$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{25}{128} > 0$.

Suy ra mặt cầu đã cho có tâm $I\left(-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{5\sqrt{2}}{16}$.

Vậy khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu là $\frac{5\sqrt{2}}{16}$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Phương trình mặt cầu (S) là $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 64$.

b) Mặt cầu (S) có tâm $M(3; 1; -4)$ và đi qua điểm $N(1; 0; 1)$ nên có bán kính $R = MN$.

Ta có $R^2 = MN^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 5^2 = 30$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 30$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

c) Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $I(3; 5; 6)$ là tâm của mặt cầu.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Ta có $R^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-4)^2}{4} = 6$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 6$.

2. a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 7y + z - 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = -\frac{5}{2}; b = \frac{7}{2}; c = -\frac{1}{2}; d = -1$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{25}{4} + \frac{49}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{79}{4} > 0$. Suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{79}}{2}$.

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 100 = 0$ có dạng

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = -2$; b $= -3$; $c = 1$; $d = 100$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = 4 + 9 + 1 - 100 = -86 < 0$. Suy ra phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

c) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{1}{2} = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{2}; d = \frac{1}{2}$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0$. Suy ra phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

3. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(3; 0; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB = MI = 2.$$

Vậy điểm M thuộc mặt cầu tâm $I(3; 0; 0)$, bán kính $R = 2$.

4. Phương trình mặt cầu là $(x - 360)^2 + (y - 200)^2 + (z - 400)^2 = 4$.

5. a) Mặt cầu (S) có tâm $I(6; 6; 6)$, bán kính $R = 5$.

b) Ta có $d(I, (P)) = 4$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. D **2.** B **3.** C **4.** A **5.** C **6.** C **7.** B **8.** A **9.** A **10.** A **11.** C

BÀI TẬP TỰ LUẬN

12. a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow x+y+z-1=0$.

Ta thấy điểm D không thuộc mặt phẳng (ABC) nên A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chóp.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;\ 1;\ 0)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;\ 1;\ -2)$.

Khi đó ta có $\cos(AB,CD)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\right|=\frac{|(-1).(-2)+1.1+0.(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}.\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $(AB, CD)=45^\circ$.

c) Mặt phẳng (BCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC}=(0;\ -1;\ 1)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;\ 0;\ -1)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(1;\ -2;\ -2)$.

Phương trình mặt phẳng (BCD) là

$$1(x-0)-2(y-1)-2(z-0)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z+2=0.$$

Độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$ là $d(A,(BCD))=\frac{|1-2.0-2.0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=1$.

13. a) Mặt phẳng (BCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC}=(-1;2;-7)$, $\overrightarrow{BD}=(0;4;-6)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(16;-6;-4)$.

Phương trình mặt phẳng (BCD) là

$$16(x-1)-6(y-0)-4(z-6)=0 \Leftrightarrow 8x-3y-2z+4=0.$$

Ta thấy điểm A không thuộc mặt phẳng (BCD) nên $ABCD$ là một tứ diện.

b) Chiều cao AH của tứ diện $ABCD$ là

$$AH=d(A,(BCD))=\frac{|8.(-2)-3.6-2.3+4|}{\sqrt{8^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{36}{\sqrt{77}}.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

c) Mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (3;\ -6;\ 3)$, $\overrightarrow{CD} = (1;\ 2;\ 1)$ nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (-12;\ 0;\ 12)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là

$$-12(x+2) + 0(y-6) + 12(z-3) = 0 \Leftrightarrow -x + z - 5 = 0.$$

14. Khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in là $\dfrac{|24-4|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 20$ (cm).

15. Mặt phẳng (P), (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (1;\ -1;\ 0)$, $\overrightarrow{OH} = (2;\ -1;\ -2)$.

Ta có $\cos((P),(Q)) = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{OH}\right)\right| = \dfrac{|1.2+(-1).(-1)+0.(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $((P), (Q)) = 45^\circ$.

16. a) Toạ độ các điểm: $A(70;\ 0;\ 0)$, $B(70;\ 0;\ -60)$, $C(70;\ 80;\ 0)$, $D(50;\ 0;\ 0)$.

b) Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0;\ 0;\ -60)$, $\overrightarrow{AC} = (0;\ 80;\ 0)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (4800;\ 0;\ 0)$.

Phương trình của mặt phẳng (ABC) là

$$4\,800(x-70) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 70 = 0.$$

Mặt phẳng (ACD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (0;\ 80;\ 0)$, $\overrightarrow{AD} = (-20;\ 0;\ 0)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = (0;\ 0;\ 1600)$.

Phương trình của mặt phẳng (ACD) là

$$0(x-70) + 0(y-0) + 1600(z-0) = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

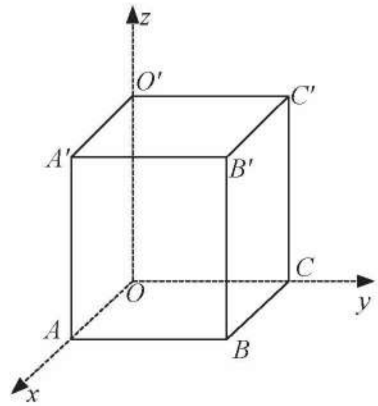
c) Đường thẳng AC có một vectơ chỉ phương là $\dfrac{1}{80}\overrightarrow{AC} = (0;\ 1;\ 0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 70 \\ y = t \\ z = 0. \end{cases}$

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) là $d(M,(ABC)) = \dfrac{|0-70|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = 70$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

17. Gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình bên.



Toạ độ các điểm: $O(0; 0; 0)$; $A(2; 0; 0)$; $B(2; 6; 0)$; $C(0; 6; 0)$; $O'(0; 0; 4)$; $A'(2; 0; 4)$; $B'(2; 6; 4)$; $C'(0; 6; 4)$.

a) Mặt phẳng $(O'AC)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{O'A} = (2; 0; -4)$, $\overrightarrow{O'C} = (0; 6; -4)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'C}\right] = (24; 8; 12)$.

Phương trình mặt phẳng $(O'AC)$ là

$24(x-0) + 8(y-0) + 12(z-4) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y + 3z - 12 = 0$.

b) Đường thẳng CO' có vectơ chỉ phaương là $\overrightarrow{CO'} = (0; -6; 4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng CO' là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6t \\ z = 4 + 4t. \end{cases}$

c) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có tâm I là trung điểm của $A'C$ nên $I(1; 3; 2)$ và bán kính là $R = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$.

Phương trình mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 14$.

18. Ta có $MA^2 = (1-x)^2 + y^2 + z^2$; $MB^2 = x^2 + (2-y)^2 + z^2$; $MC^2 = x^2 + y^2 + (3-z)^2$.

$MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (2-y)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (3-z)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 12 = 0.$

Vậy điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 12 = 0$ có tâm $I(-1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

xemthemtai chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương VI

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A. MỤC TIÊU

1. Năng lực toán học

Phát triển cho HS một số năng lực toán học qua các yêu cầu cần đạt:

– Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện.

– Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.

– Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ hình cây.

– Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn.

– Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

2. Năng lực chung

– Năng lực tự chủ và tự học trong tích cực tham gia các hoạt động, hoàn thành các nhiệm vụ học tập.

– Năng lực giao tiếp và hợp tác trong làm việc nhóm, trình bày và thảo luận.

– Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo trong thực hành và vận dụng kiến thức, kĩ năng vào giải quyết các bài toán (đặc biệt là các bài toán gắn với thực tế).

3. Hình thành phẩm chất

– Yêu nước, nhân ái.

– Chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm.

B. HƯỚNG DẪN DẠY HỌC

BÀI 1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện.

– Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.

– Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. Năng lực cần chú trọng: mô hình hoá toán học, giải quyết vấn đề toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

1. SGK sử dụng cách tiếp cận trực quan để xây dựng khái niệm xác suất có điều kiện. Cụ thể, xác suất của biến cố A với điều kiện B được tính dựa trên việc liệt kê các kết quả đồng khả năng của B và kiểm đếm số các kết quả thuận lợi cho A trong các kết quả đó.

2. Công thức $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ cũng được dùng để định nghĩa xác suất của A với điều kiện B.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Bạn Thuỷ gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Nếu biết rằng xuất hiện mặt chẵn chấm thì xác suất xuất hiện mặt 6 chấm là bao nhiêu?

– *Mục đích:* Đưa HS vào tình huống xuất hiện xác suất có điều kiện.

– *Gợi ý tổ chức:* GV dẫn dắt HS thông qua hệ thống các câu hỏi:

+ GV: Nếu xuất hiện mặt chẵn chấm thì các kết quả nào có thể xảy ra?

HS: Có 3 kết quả là xuất hiện mặt 2 chấm, 4 chấm, 6 chấm.

+ GV: Hãy so sánh khả năng xảy ra của 3 kết quả trên.

HS: Các kết quả có cùng khả năng xảy ra.

+ GV: Vậy xác suất xuất hiện mặt 6 chấm là bao nhiêu?

HS: Xác suất xuất hiện mặt 6 chấm là $\dfrac{1}{3}$.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Nếu biết rằng xuất hiện mặt chẵn chấm thì xác suất xuất mặt 6 chấm là $\dfrac{1}{3}$.

1. Xác suất có điều kiện

HĐKP 1

1 Hộp thứ nhất chứa 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra lần thứ nhất là bi xanh";

B là biến cố "Viên bi lấy ra lần thứ hai là bi đỏ".

a) Biết rằng biến cố A xảy ra, tính xác suất của biến cố B.

b) Biết rằng biến cố A không xảy ra, tính xác suất của biến cố B.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* HS làm quen với xác suất có điều kiện trong tình huống đơn giản.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Nếu biến cố A xảy ra thì bạn Thanh lấy viên bi xanh từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai. Khi đó hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Do đó, xác suất xảy ra biến cố B là $\frac{3}{6} = 0,5$.

b) Nếu biến cố A không xảy ra thì bạn Thanh lấy viên bi đỏ từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai. Khi đó hộp thứ hai có 2 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Do đó, xác suất xảy ra biến cố B là $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

HĐTH 1

1 Xét phép thử lấy thẻ ở Ví dụ 1. Gọi D là biến cố "Thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lớn hơn 1". Tính $P(D|A)$ và $P(D|B)$.

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng tính xác suất có điều kiện bằng cách liệt kê các kết quả có thể xảy ra.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $P(D|A) = 1$; $P(D|B) = \frac{1}{2}$.

HĐTH 2

2 Xét phép thử ở Ví dụ 2. Tính xác suất thành viên được chọn không biết chơi cờ tướng, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ vua.

– *Mục đích:* HS tính xác suất có điều kiện của biến cố có số kết quả thuận lợi lớn, khó liệt kê trực tiếp hết được.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Số thành viên của câu lạc bộ không biết chơi cờ tướng nhưng biết chơi cờ vua là $25 - 10 = 15$.

Xác suất thành viên được chọn không biết chơi cờ tướng, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ vua là $P(\overline{A}|B) = \frac{15}{25} = 0,6$.

HĐVD 1

1 Tính xác suất có điều kiện ở ▶ (trang 69).

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng tính xác suất có điều kiện.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân. HS cần gọi tên các biến cố và viết được biểu thức xác suất có điều kiện.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Gọi A là biến cố "Con xúc xắc xuất hiện mặt chẵn chấm", B là biến cố "Con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm". Xác suất cần tính là $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Xem thêm tại chiasetailieumay.com
Chân trời sáng tạo

2. Công thức tính xác suất có điều kiện

HĐKP 2

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm", B là biến cố "Tổng số chấm của hai mặt xuất hiện bằng 8" và C là biến cố "Xuất hiện ít nhất một mặt có 6 chấm".

Hình 1

a) Tính $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ và $P(A|B)$.

b) Tính $\dfrac{P(C \cap A)}{P(A)}$ và $P(C|A)$.

– *Mục đích:* HS trải nghiệm xây dựng công thức tính xác suất có điều kiện.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề. HS tính các xác suất theo yêu cầu, so sánh và khám phá công thức tính xác suất có điều kiện.

– *Hướng dẫn, đáp án:* $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) = \dfrac{1}{5}$; $\dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = P(C|A) = \dfrac{1}{6}$.

HĐTH 3

Một nhóm 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ tham gia lao động trên sân trường. Cô giáo chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 bạn trong nhóm đi tưới cây. Tính xác suất để hai bạn được chọn có cùng giới tính, biết rằng có ít nhất 1 bạn nam được chọn.

Hình 3

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng tính xác suất có điều kiện.

– *Gợi ý tổ chức:* Hoạt động này có thể cho HS thực hiện ngay sau kiến thức trọng tâm. GV nêu vấn đề, HS làm việc cá nhân. GV lưu ý cho HS từ khoá "có ít nhất một".

– *Hướng dẫn, đáp án:* Gọi A là biến cố "Hai bạn được chọn có cùng giới tính" và B là biến cố "Có ít nhất 1 bạn nam được chọn". Ta cần tính $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Biến cố $A \cap B$: "Hai bạn được chọn đều là nam". Do đó $P(A \cap B) = \dfrac{C_5^2}{C_9^2} = \dfrac{5}{18}$.

Biến cố $\overline{B}$ là "Hai bạn được chọn đều là nữ". Do đó $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{C_4^2}{C_9^2} = \dfrac{5}{6}$.

Vậy $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐVD 2

Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

– Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;

– Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;

– Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là 18%.

Hình 4

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu bao nhiêu lần?

– *Mục đích*: HS vận dụng xác suất có điều kiện để giải quyết một vấn đề thực tế liên quan đến an toàn giao thông.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Gọi A là biến cố "Bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn" và B là biến cố "Bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn".

Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80% nên $P(A) = 0,8$.

Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90% nên $P(B) = 0,9$.

Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách bị chấn thương vùng đầu là 18% nên $P(AB) = 0,18$.

Xác suất bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi đội mũ bảo hiểm đúng cách là

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,9} = 0,2.$$

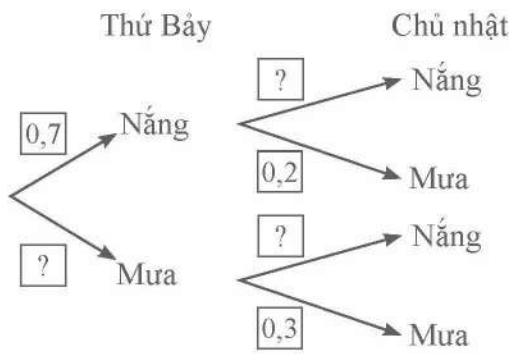
Vì $\dfrac{P(A \mid B)}{P(A)} = \dfrac{1}{4}$ nên việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu 4 lần.

3. Sơ đồ hình cây

HĐKP 3

Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7.

Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào $\boxed{?}$ ở sơ đồ hình cây sau:

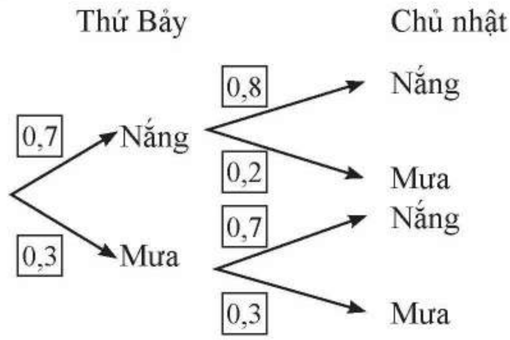


Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

– *Mục đích:* HS làm quen với kĩ năng sử dụng sơ đồ hình cây để phân tích các trường hợp có thể xảy ra, từ đó tính xác suất của biến cố.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề. HS thảo luận tìm giải pháp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*



HĐTH 4

Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

A: "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh và viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ";

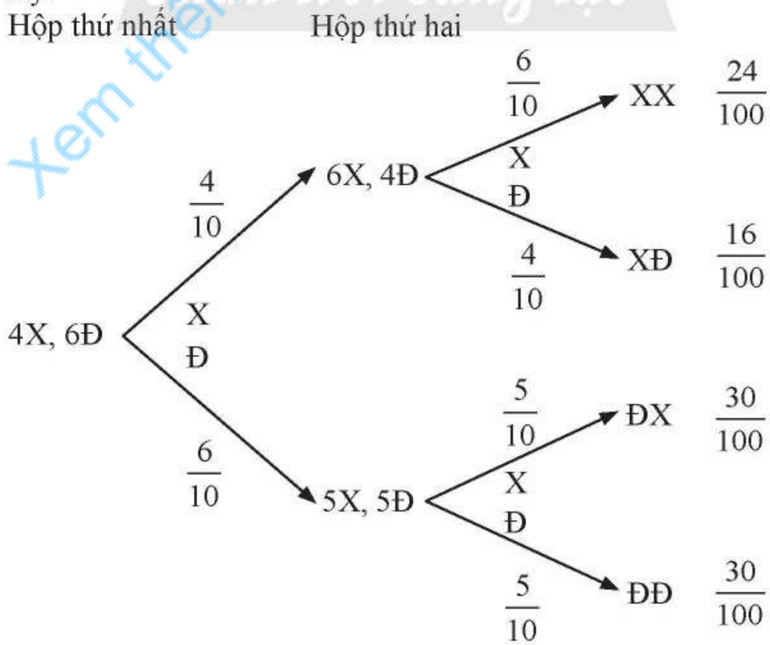
B: "Hai viên bi lấy ra có cùng màu".

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng sử dụng sơ đồ hình cây kết hợp với công thức nhân xác suất.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề. HS thảo luận nhóm, vẽ sơ đồ hình cây ra giấy khổ lớn và trình bày trước lớp.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Sơ đồ hình cây:



$$P(A)=\frac{16}{100}=0{,}16;\ P(B)=\frac{24}{100}+\frac{30}{100}=0{,}54.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HĐVD 3

3 Một trường đại học tiến hành khảo sát tình trạng việc làm sau khi tốt nghiệp của sinh viên. Kết quả khảo sát cho thấy tỉ lệ người tìm được việc làm đúng chuyên ngành là 85% đối với sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và 70% đối với sinh viên tốt nghiệp loại khác.

Tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp loại giỏi là 30%. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên đã tốt nghiệp của trường.

Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

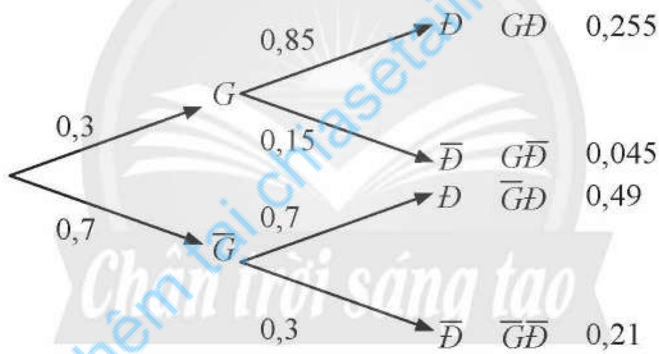
C: "Sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành";

D: "Sinh viên không tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành".

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề. HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:* Gọi G là biến cố "Sinh viên tốt nghiệp loại giỏi"; $Đ$ là biến cố "Sinh viên tìm được việc làm đúng chuyên ngành". Ta có sơ đồ hình cây:



$$P(C) = 0{,}255;\ P(D) = 0{,}49.$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. Gọi A là biến cố "Sách được chọn là sách khoa học" và B là biến cố "Sách được chọn là sách khoa học tự nhiên". Ta có $B \subset A$ nên $B \cap A = B$. Do đó

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,14}{0,35} = 0,4.$$

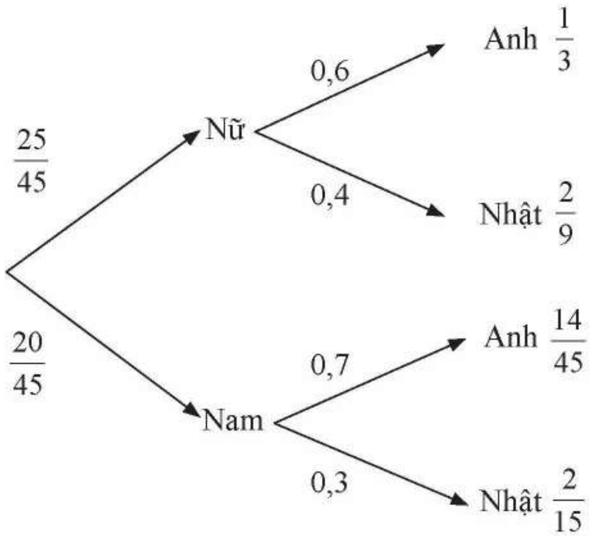
2. Ta có $P(B) = 0{,}8$ suy ra $P(\overline{B}) = 0,2$ và $P(A\overline{B}) = P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B}) = 0,2.0,5 = 0,1.$

Ta cũng có $P(AB) = P(A) - P(A\overline{B}) = 0,4 - 0,1 = 0,3$ nên

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

3. Sơ đồ hình cây:



Theo sơ đồ hình cây bên, ta có

$$P(A) = \frac{2}{15};$$

$$P(B) = \frac{1}{3}.$$

4. Gọi A là biến cố "UPS bị hỏng khi có sự cố điện" và B là biến cố "Máy tính bị hỏng khi có sự cố điện".

Ta có $P(A) = 0,02$; $P(B|A) = 0,1$; $P(B|\overline{A}) = 0$, suy ra $P(\overline{A}) = 0,98$; $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$.

a) $P(\overline{B}\,\overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,98 \,.\, 1 = 0,98$.

b) $P(BA) = P(A)P(B \mid A) = 0,02 \,.\, 0,1 = 0,002$.

BÀI 2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

I. MỤC TIÊU

1. Yêu cầu cần đạt

– Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2×2 và sơ đồ hình cây.

– Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn.

– Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

2. Năng lực cần chú trọng: mô hình hoá toán học, giải quyết vấn đề toán học, giao tiếp toán học.

3. Tích hợp: Toán học và cuộc sống, tích hợp các môn học khác.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

II. MỘT SỐ CHÚ Ý

Công thức xác suất toàn phần được phát biểu tổng quát như sau: Giải sử $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là dãy các biến cố đôi một xung khắc và $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$. Khi đó, với mọi biến cố A,

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Trong chương trình Trung học phổ thông, ta chỉ xét công thức xác suất toàn phần với $n = 2$.

III. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

HĐKĐ

Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với 76,2% các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với 99,1% các ca thực sự không nhiễm virus (*nguồn*: https://tapchiyhocvietnam.vn/index.php/vmj/article/view/2124/1921). Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong một cộng đồng là 1%. Một người trong cộng đồng đó làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Hỏi khả năng người đó thực sự nhiễm virus là cao hay thấp?

– *Mục đích:* HS được đặt vào tình huống có vấn đề. Nhìn vào các con số 76,2%; 99,1% HS thường cho rằng khả năng người khám thực sự nhiễm virus là cao.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận.

– *Hướng dẫn, đáp án:* GV yêu cầu HS tính xác suất này ở hoạt động Thực hành cuối bài học.

1. Công thức xác suất toàn phần

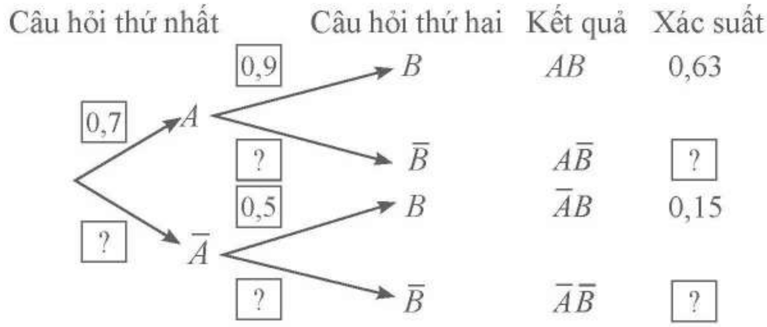
HĐKP 1

Chị An trả lời hai câu hỏi. Xác suất trả lời đúng câu hỏi thứ nhất là 0,7. Xác suất trả lời đúng câu hỏi thứ hai là 0,9 nếu chị An trả lời đúng câu hỏi thứ nhất và là 0,5 nếu chị An không trả lời đúng câu hỏi thứ nhất.

Gọi A là biến cố "Chị An trả lời đúng câu hỏi thứ nhất" và B là biến cố "Chị An trả lời đúng câu hỏi thứ hai".

Hình 1

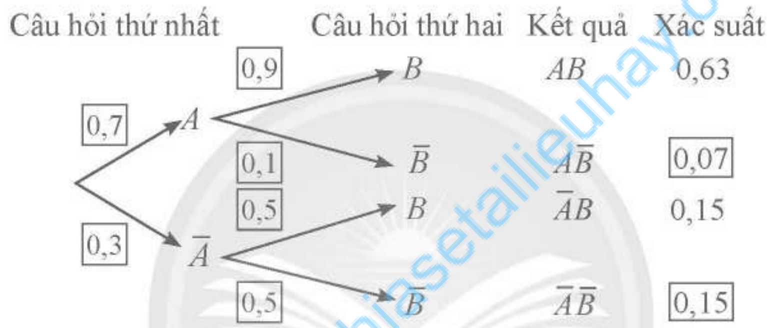
Hãy tìm các giá trị thích hợp điền vào các ô $\boxed{?}$ ở sơ đồ hình cây sau:



– *Mục đích:* Giúp HS hình thành công thức xác suất toàn phần thông qua sơ đồ hình cây.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận tìm lời giải.

– *Hướng dẫn, đáp án:*



HĐTH 1

Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố H, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là 0,7 và 0,2. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là 0,1. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường.

Hình 2

– *Mục đích:* HS làm quen với kĩ năng vận dụng công thức xác suất toàn phần.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Gọi M là biến cố "Sáng đó trời mưa", T là biến cố "Sáng đó tuyến phố H bị tắc đường".

Ta có

$$P(T|M)=0,7;\ P(T|\overline{M})=0,2;\ P(M)=0,1;\ P(\overline{M})=0,9.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường là

$$P(T)=P(M)P(T|M)+P(\overline{M})P(T|\overline{M})=0,1.0,7+0,9.0,2=0,25.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

2. Công thức Bayes

HĐKP 2

Khảo sát thị lực của 100 học sinh, ta thu được bảng số liệu sau:

Thị lực \ Giới tính	Nữ	Nam
Có tật khúc xạ	12	18
Không có tật khúc xạ	38	32

Chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong 100 học sinh trên.

a) Biết rằng bạn đó có tật khúc xạ, tính xác suất bạn đó là học sinh nam.

b) Biết rằng bạn đó là học sinh nam, tính xác suất bạn đó có tật khúc xạ.

– *Mục đích:* HS tìm hiểu cách xây dựng công thức Bayes thông qua bảng số liệu 2×2.

– *Gợi ý tổ chức:* GV nêu vấn đề, HS thảo luận tìm lời giải.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

a) Biết rằng bạn đó có tật khúc xạ, xác suất bạn đó là học sinh nam là $\frac{18}{30} = 0,6$.

b) Biết rằng bạn đó là học sinh nam, xác suất bạn đó có tật khúc xạ là $\frac{18}{50} = 0,36$.

HĐTH 2

Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là 0,9 nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là 0,05 nếu đó là mục tiêu giả. Có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Biết rằng hệ thống radar đang phát cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. Tính xác suất vật thể đó là mục tiêu thật.

Hình 3

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng vận dụng công thức Bayes để giải quyết bài toán thực tế.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Gọi C là biến cố "Radar phát cảnh báo", T là biến cố "Vật thể bay là mục tiêu thật".

Ta có $P(C|T) = 0,9$; $P(C|\overline{T}) = 0,05$; $P(\overline{T}) = 0,99$; $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 1 - 0,99 = 0,01$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có xác suất vật thể đó là mục tiêu thật là

$$P(T|C) = \frac{P(T)P(C|T)}{P(T)P(C|T) + P(\overline{T})P(C|\overline{T})} = \frac{0,01.0,9}{0,01.0,9 + 0,99.0,05} = \frac{2}{13}.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HĐVD

Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 2% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Trong các vụ tai nạn ở địa phương đó, người ta nhận thấy có 10% là do tài xế có sử dụng điện thoại khi lái xe gây ra. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần?

Hình 4

– *Mục đích:* HS củng cố kĩ năng vận dụng công thức Bayes để giải quyết bài toán thực tế.

– *Gợi ý tổ chức:* GV đặt vấn đề, HS làm việc cá nhân.

– *Hướng dẫn, đáp án:*

Gọi A là biến cố "Tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe", B là biến cố "Tài xế gây tai nạn".

Ta có $P(A) = 0{,}02$; $P(A|B) = 0{,}1$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có $\dfrac{P(B|A)}{P(B)} = \dfrac{P(A|B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}02} = 5$.

Do đó, việc sử dụng điện thoại khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên 5 lần.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP

1. a) Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi đỏ", khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi xanh".

Gọi B là biến cố "Hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ".

Ta có $P(A) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B|A) = \dfrac{C_8^2}{C_{11}^2} = \dfrac{28}{55}$, $P(B|\overline{A}) = \dfrac{C_7^2}{C_{11}^2} = \dfrac{21}{55}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ là

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{28}{55} + \frac{1}{3}\cdot\frac{21}{55} = \frac{7}{15}.$$

b) Ta cần tính $P(A|B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{28}{55}}{\frac{7}{15}} = \frac{8}{11}.$$

2. a) Gọi A là biến cố "Học sinh được chọn là nữ", khi đó biến cố $\overline{A}$ là "Học sinh được chọn là nam". Ta có $P(A) = 0{,}52$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$.

Gọi B là biến cố "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ nghệ thuật".

Ta có $P(B|A) = 0{,}18$ và $P(B|\overline{A}) = 0{,}15$. Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0{,}52.0{,}18 + 0{,}48.0{,}15 = \frac{207}{1250}.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

b) Ta cần tính $P(\overline{A} \mid B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{0,48.0,15}{\frac{207}{1250}}=\frac{10}{23}.$$

3. a) Gọi B là biến cố "Người được chọn đã tiêm phòng", khi đó $\overline{B}$ là biến cố "Người được chọn chưa tiêm phòng". Ta có $P(B) = 0,65$ và $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,65 = 0,35$.

Gọi H là biến cố "Người được chọn mắc bệnh A". Ta có $P(H|B) = 0,05$ và $P(H|\overline{B}) = 0,17$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(H) = P(B)P(H|B) + P(\overline{B})P(H|\overline{B}) = 0,65 \,.\, 0,05 + 0,35 \,.\, 0,17 = 0,092$.

b) Ta cần tính $P(\overline{B}|H)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(\overline{B}|H)=\frac{P(\overline{B})P(H|\overline{B})}{P(H)}=\frac{0,35.0,17}{0,092}=\frac{119}{184}.$$

4. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật", B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình là người nói thật".

a) Ta có $P(A)=\frac{4}{7}$; $P(\overline{A})=\frac{3}{7}$; $P(B|A) = 1$ và $P(B|\overline{A}) = 0,5$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{4}{7}\cdot 1+\frac{3}{7}\cdot 0,5=\frac{11}{14}.$$

b) Ta cần tính $P(A|B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{7}\cdot 1}{\frac{11}{14}}=\frac{8}{11}.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Chân trời sáng tạo

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. a) A	b) C	c) B	
2. a) C	b) A	c) C	
3. a) A	b) B	c) A	d) D

BÀI TẬP TỰ LUẬN

4. Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình. Gọi X là biến cố "Hộ đó sử dụng điện" và Y là biến cố "Hộ đó sử dụng ấm siêu tốc". Ta biết ấm siêu tốc dùng điện nên $Y \subset X$. Do đó ta có

$$P(Y \mid X)=\frac{P(YX)}{P(X)}=\frac{P(Y)}{P(X)}=\frac{21}{85}.$$

5. Vì $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ nên từ đề bài ta suy ra

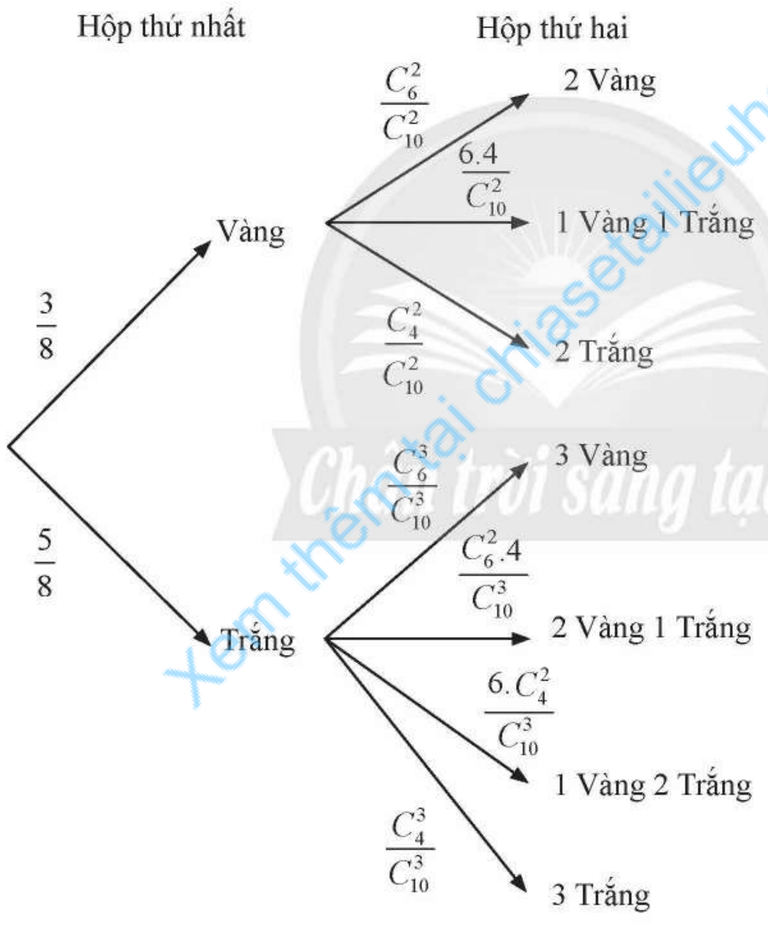
$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(B|A)} = 2.$$

6. Chọn ra 3 người từ 4 kĩ sư và 6 kĩ thuật viên. Gọi X là biến cố "Cả ba người được chọn là kĩ sư" và Y là biến cố "Trong 3 người được chọn ít nhất có 2 kĩ sư".

Ta có $P(X) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}$ và $P(Y) = \dfrac{C_4^3 + C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3}$.

Do X chỉ có thể xảy ra khi Y xảy ra nên ta có $P(X|Y) = \dfrac{P(XY)}{P(Y)} = \dfrac{P(X)}{P(Y)} = \dfrac{1}{10}$.

7. Ta có sơ đồ hình cây:



$$\frac{3}{8} \times \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{6.4}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{48}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{C_6^2.4}{C_{10}^3} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{6.C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{48}$$

a) Xác suất của biến cố có đúng 1 quả bóng màu vàng trong các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai là

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{16} = \frac{31}{80}.$$

Xem thêm tài chiasetailieuhay.com

b) Gọi A là biến cố "Các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai đều có màu trắng", B là biến cố "Quả bóng lấy ra từ hộp thứ nhất có màu vàng". Ta cần tính $P(B|A)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{36}{61}.$$

8. a) Gọi A là biến cố "Hai viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất đều là bi đỏ", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Có 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ trong 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất".

Ta có $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{3}$ và $P(\overline{A})=\dfrac{1}{3}$.

Gọi B là biến cố "Hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ".

Sau khi biến cố A xảy ra, hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Do đó

$$P(B|A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}.$$

Sau khi biến cố $\overline{A}$ xảy ra, hộp thứ hai có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Do đó

$$P(B|\overline{A})=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(B)=\frac{2}{3}.\frac{7}{15}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{19}{45}.$$

b) Ta cần tính $P(A|B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$P(A|B)=\frac{2}{3}.\frac{7}{15}:\frac{19}{45}=\frac{14}{19}.$$

9. a) Gọi A là biến cố "Nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ", B là biến cố "Nhân viên được chọn là nam", suy ra $\overline{B}$ là biến cố "Nhân viên được chọn là nữ".

Ta có $P(\overline{B})=0,45$ và $P(B)=1-0,45=0,55$.

Hơn nữa $P(A|\overline{B})=0,07$ và $P(A|B)=0,05$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=0,55\ .\ 0,05+0,45\ .\ 0,07=0,059.$$

b) Ta cần tính $P(B|A)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$P(B|A)=\frac{0,55\ .\ 0,05}{0,059}=\frac{55}{118}.$$

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Bài 1. Tính giá trị gần đúng tích phân bằng máy tính cầm tay

1. Mục tiêu

– Thực hành sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị gần đúng của tích phân xác định.

– Ôn tập và minh hoạ giá trị của tích phân xác định.

2. Chuẩn bị

– Máy tính cầm tay.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

3. Sản phẩm

– Gọi được phép toán tích phân xác định: .

– Nhập được vào máy tính cầm tay: hàm số $f(x)$; hai cận tích phân a, b.

– Tính được giá trị gần đúng của tích phân xác định: $\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{5}(x^3-3x)\,dx$$

120

$$\int_{0}^{5}\frac{x-1}{x+1}\,dx$$

1.416481062

$$\int_{-0.5}^{4}\frac{x^2-x-1}{x+1}\,dx$$

1.177585093

4. Tổ chức thực hiện

– Giao nhiệm vụ: GV trình bày cụ thể nội dung nhiệm vụ được giao cho HS (đọc/nghe/nhìn/làm) với thiết bị dạy học/học liệu cụ thể để tất cả HS đều hiểu rõ nhiệm vụ phải thực hiện.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

– Thực hiện nhiệm vụ: HS thực hiện (đọc/nghe/nhìn/làm) theo yêu cầu của GV.

– Biện pháp hỗ trợ: GV dự kiến những khó khăn mà HS có thể gặp phải kèm theo biện pháp hỗ trợ.

– Dự kiến các mức độ cần phải hoàn thành nhiệm vụ theo yêu cầu.

– Báo cáo, thảo luận: GV tổ chức, điều hành; HS báo cáo, thảo luận.

– Làm việc nhóm theo hướng dẫn của SGK.

5. Kết luận, nhận định

Phân tích cụ thể về sản phẩm học tập mà HS phải hoàn thành theo yêu cầu (làm căn cứ để nhận xét, đánh giá các mức độ hoàn thành của HS trên thực tế tổ chức dạy học); làm rõ những nội dung/yêu cầu về kiến thức, kĩ năng để HS ghi nhận, thực hiện.

Lưu ý:

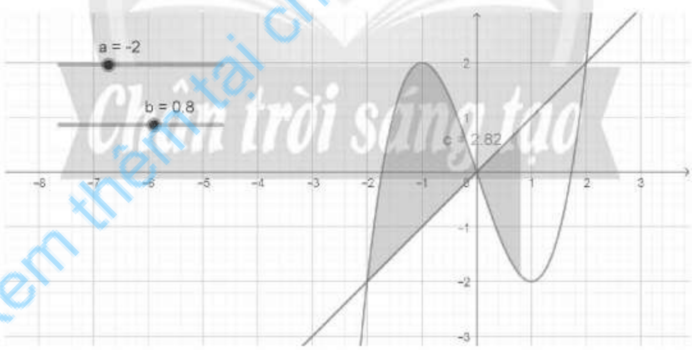
– GV có thể sử dụng phần mềm mô phỏng máy tính cầm tay trên máy tính xách tay kết hợp với bảng chiếu để minh hoạ.

– GV có thể yêu cầu mỗi nhóm tính tích phân một loại hàm số khác nhau.

– GV yêu cầu mỗi nhóm giới thiệu về sản phẩm của nhóm để lớp thảo luận.

– GV có thể yêu cầu HS sử dụng máy tính cầm tay để tìm kết quả gần đúng một số bài toán vận dụng tích phân ở cuối Chương IV để tăng tính trải nghiệm thực tế.

Bài 2. Minh hoạ và tính tích phân bằng phần mềm GeoGebra



Chân trời sáng tạo
Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

1. Mục tiêu

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để minh hoạ và tính tích phân xác định.

– Xem xét, mô phỏng các bài toán tích phân xác định.

– Ôn tập và minh hoạ các khái niệm đã học về tích phân.

2. Chuẩn bị

– Máy tính xách tay hoặc máy tính bảng có cài đặt phần mềm GeoGebra.

– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

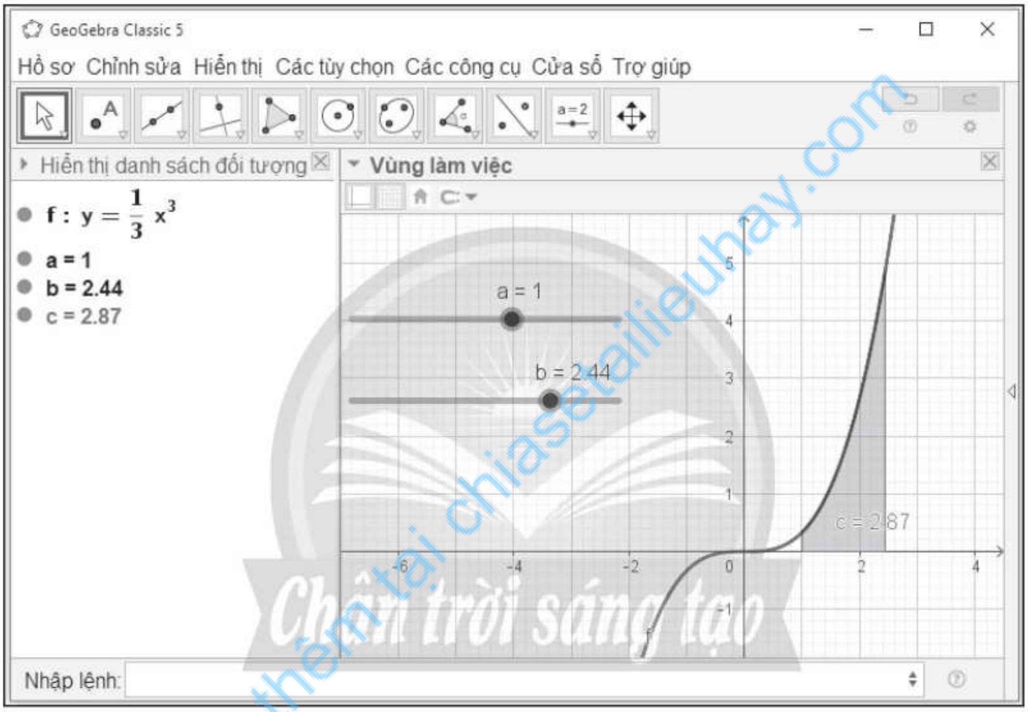
3. Sản phẩm

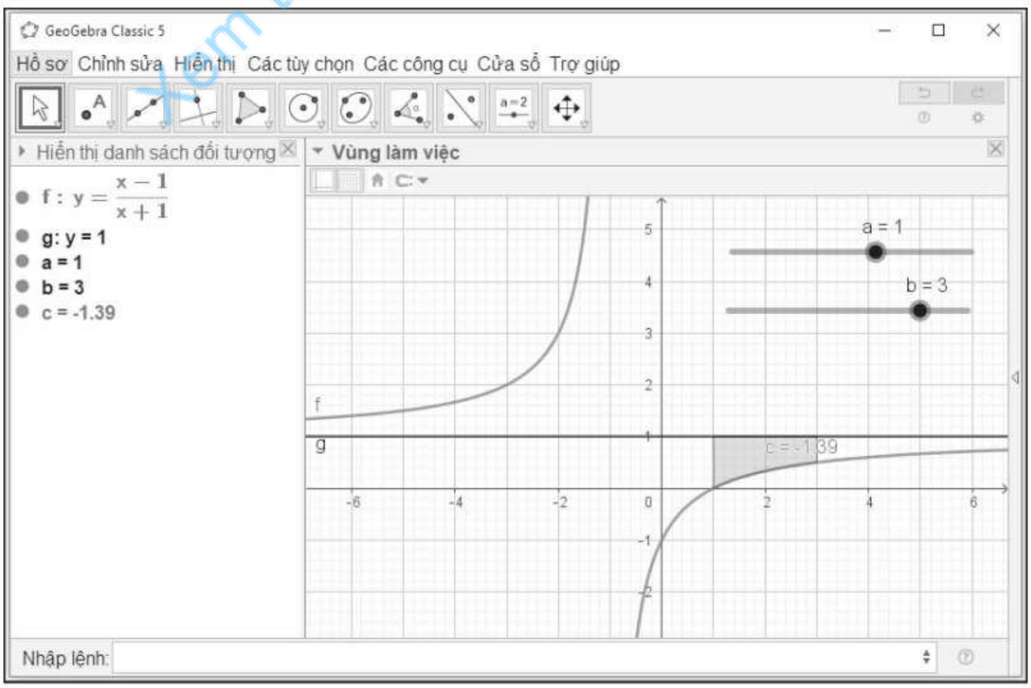
– Sử dụng được phần mềm GeoGebra để minh hoạ và tính tích phân xác định một số hàm số sơ cấp trong Chương trình Toán 12:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y = \frac{ax+b}{cx+d};\ y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}.$$

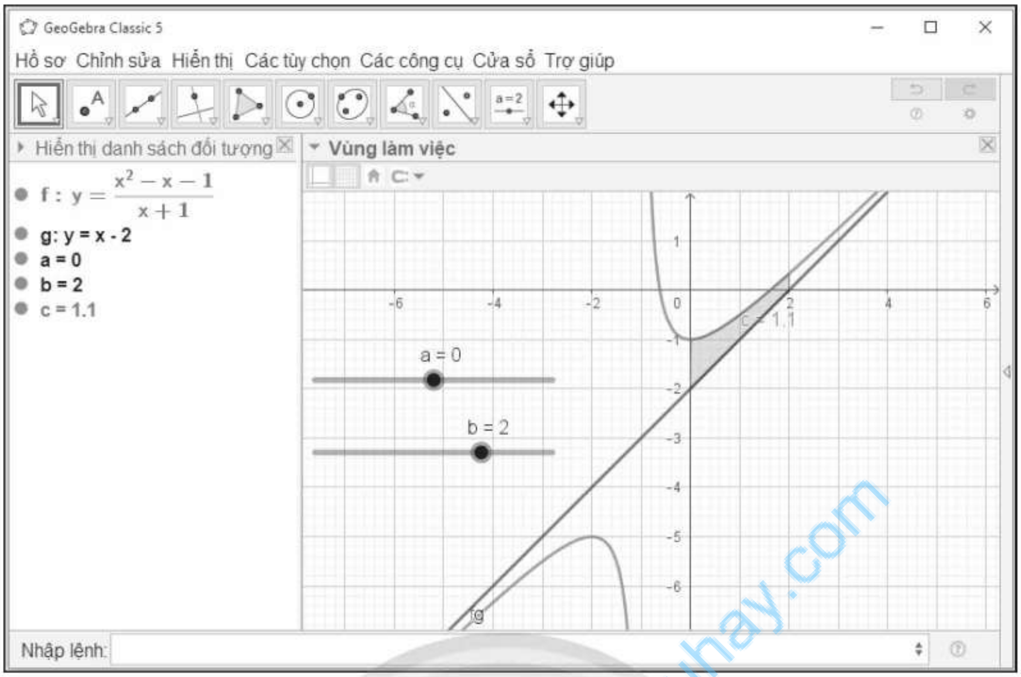
– Sử dụng được phần mềm GeoGebra để minh hoạ các bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số trong Chương trình Toán 12.

– Sử dụng được con chạy để thay đổi hai cận tích phân a, b trong bài toán tích phân xác định: $\int_a^b f(x)dx$.





Xem thêm tại chiasetailieuhay.com



4. Tổ chức thực hiện

– Giao nhiệm vụ: GV trình bày cụ thể nội dung nhiệm vụ được giao cho HS (đọc/nghe/nhìn/làm) với thiết bị dạy học/học liệu cụ thể để tất cả HS đều hiểu rõ nhiệm vụ phải thực hiện.

– Thực hiện nhiệm vụ: HS thực hiện (đọc/nghe/nhìn/làm) theo yêu cầu của GV.

– Biện pháp hỗ trợ: GV dự kiến những khó khăn mà HS có thể gặp phải kèm theo biện pháp hỗ trợ.

– Dự kiến các mức độ cần phải hoàn thành nhiệm vụ theo yêu cầu.

– Báo cáo, thảo luận: GV tổ chức, điều hành; HS báo cáo, thảo luận.

– Làm việc nhóm theo hướng dẫn của SGK.

5. Kết luận, nhận định

Phân tích cụ thể về sản phẩm học tập mà HS phải hoàn thành theo yêu cầu (làm căn cứ để nhận xét, đánh giá các mức độ hoàn thành của HS trên thực tế tổ chức dạy học); làm rõ những nội dung/yêu cầu về kiến thức, kĩ năng để HS ghi nhận, thực hiện.

Lưu ý:

– GV có thể yêu cầu mỗi nhóm vẽ đồ thị và minh hoạ tích phân một loại hàm số khác nhau.

– GV yêu cầu mỗi nhóm giới thiệu về sản phẩm của nhóm để lớp thảo luận.

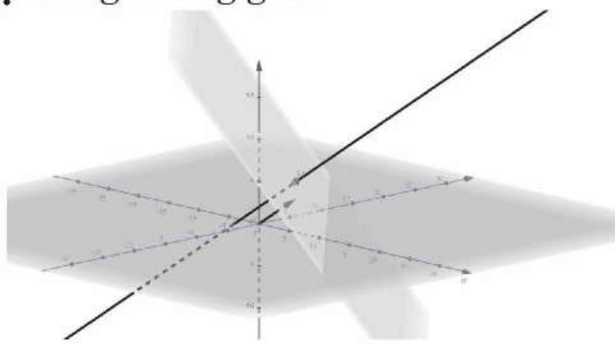
– Có thể kết hợp với bài hoạt động trải nghiệm Tính giá trị gần đúng tích phân bằng máy tính cầm tay để so sánh và kiểm tra kết quả.

– Có thể yêu cầu HS dùng phần mềm GeoGebra để minh hoạ một số bài vận dụng tích phân trong SGK.

– GV nên cài đặt GeoGebra sang tiếng Việt và sử dụng các câu lệnh bằng tiếng Việt để tạo thuận lợi cho HS.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Bài 3. Sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian



1. Mục tiêu

– Thực hành sử dụng phần mềm GeoGebra để biểu diễn hình học toạ độ trong không gian.

– Xem xét, mô phỏng các bài toán toạ độ không gian.

– Xem xét sự thay đổi hình dạng khi thay đổi các yếu tố trong phương trình của chúng.

– Ôn tập và minh hoạ các khái niệm của hình học toạ độ.

2. Chuẩn bị

– Máy tính xách tay hoặc máy tính bảng có cài đặt phần mềm GeoGebra.

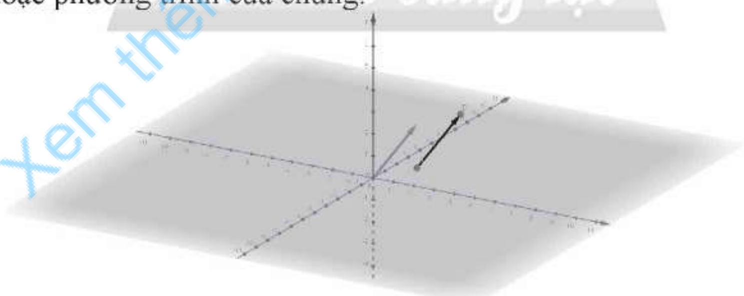
– Máy chiếu hoặc màn hình ti vi lớn.

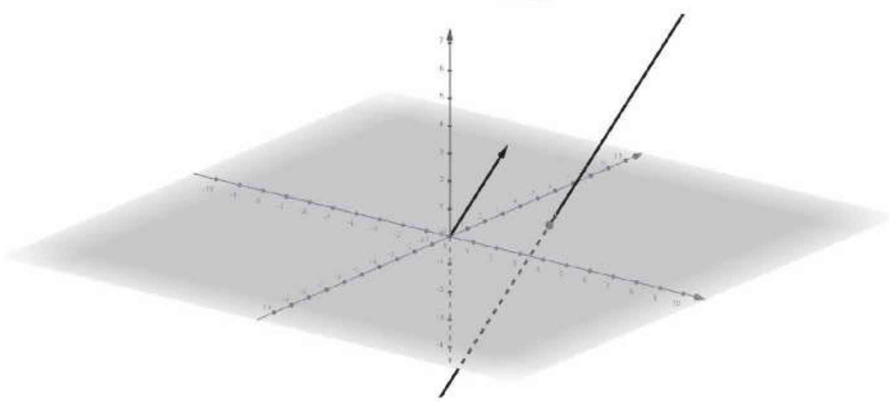
– Thực hành trong phòng máy nếu các trường có điều kiện.

– Sách giáo khoa Toán 12, tập hai – bộ sách Chân trời sáng tạo.

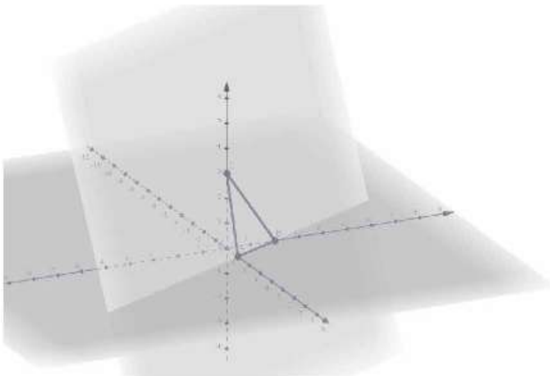
3. Sản phẩm

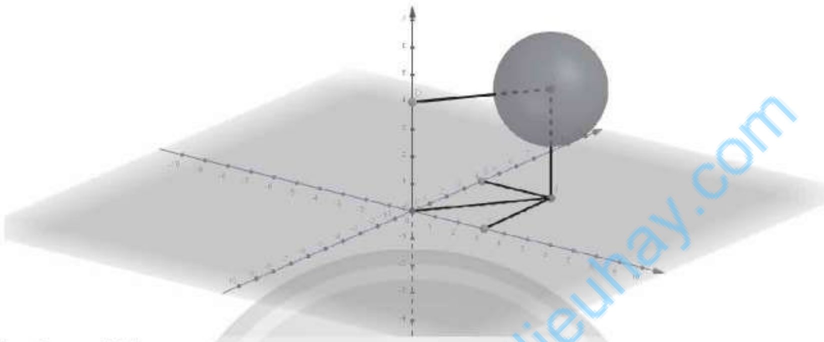
– Biểu diễn được: Điểm, vectơ, đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong không gian *Oxyz* khi biết toạ độ hoặc phương trình của chúng.





Xem thêm tại chiasetailieuhay.com





4. Tổ chức thực hiện

– Giao nhiệm vụ: GV trình bày cụ thể nội dung nhiệm vụ được giao cho HS (đọc/nghe/nhìn/làm) với thiết bị dạy học/học liệu cụ thể để tất cả HS đều hiểu rõ nhiệm vụ phải thực hiện.

– Thực hiện nhiệm vụ: HS thực hiện (đọc/nghe/nhìn/làm) theo yêu cầu của GV.

– Biện pháp hỗ trợ: GV dự kiến những khó khăn mà HS có thể gặp phải kèm theo biện pháp hỗ trợ.

– Dự kiến các mức độ cần phải hoàn thành nhiệm vụ theo yêu cầu.

– Báo cáo, thảo luận: GV tổ chức, điều hành; HS báo cáo, thảo luận.

– Làm việc nhóm theo hướng dẫn của SGK.

5. Kết luận, nhận định

Phân tích cụ thể về sản phẩm học tập mà HS phải hoàn thành theo yêu cầu (làm căn cứ để nhận xét, đánh giá các mức độ hoàn thành của HS trên thực tế tổ chức dạy học); làm rõ những nội dung/yêu cầu về kiến thức, kĩ năng để HS ghi nhận, thực hiện.

Lưu ý:

– GV có thể yêu cầu mỗi nhóm biểu diễn một trong các đối tượng: vectơ, mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu.

– GV yêu cầu mỗi nhóm chia sẻ kinh nghiệm và giới thiệu về sản phẩm của nhóm để lớp thảo luận.

– Có thể yêu cầu HS dùng phần mềm GeoGebra để minh hoạ một số bài vận dụng tổng hợp cuối Chương V.

– GV nên cài đặt GeoGebra sang tiếng Việt và sử dụng các câu lệnh bằng tiếng Việt để tạo thuận lợi cho HS.

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ
NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – HOÀNG THỊ THU DUNG
Thiết kế sách: TRẦN THỊ THANH THẢO – LÂM NGUYỄN LAN TRINH
Trình bày bìa: ĐẶNG NGỌC HÀ – TỐNG THANH THẢO
Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ
NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – HOÀNG THỊ THU DUNG
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

TOÁN 12 – SÁCH GIÁO VIÊN (CHÂN TRỜI SÁNG TẠO)
Mã số: G2HGZT001M24
In .... bản, (QĐ ....) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: .... địa chỉ ....
Cơ sở in: .... địa chỉ ....
Số ĐKXB: 06-2024/CXBIPH/96-2346/GD
Số QĐXB: .../QĐ- ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: 978-604-0-40391-9

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com
Chân trời sáng tạo

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO VIÊN LỚP 12 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. TOÁN 12 - Sách giáo viên
2. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 12 - Sách giáo viên
3. NGỮ VĂN 12, TẬP MỘT - Sách giáo viên
4. NGỮ VĂN 12, TẬP HAI - Sách giáo viên
5. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP NGỮ VĂN 12 - Sách giáo viên
6. TIẾNG ANH 12
   Friends Global - Teacher's Guide
7. LỊCH SỬ 12 - Sách giáo viên
8. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP LỊCH SỬ 12 - Sách giáo viên
9. ĐỊA LÍ 12 - Sách giáo viên
10. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP ĐỊA LÍ 12 - Sách giáo viên
11. GIÁO DỤC KINH TẾ VÀ PHÁP LUẬT 12 - Sách giáo viên
12. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
    GIÁO DỤC KINH TẾ VÀ PHÁP LUẬT 12 - Sách giáo viên
13. VẬT LÍ 12 - Sách giáo viên
14. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP VẬT LÍ 12 - Sách giáo viên
15. HOÁ HỌC 12 - Sách giáo viên
16. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP HOÁ HỌC 12 - Sách giáo viên
17. SINH HỌC 12 - Sách giáo viên
18. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP SINH HỌC 12 - Sách giáo viên
19. TIN HỌC 12
    Định hướng Tin học ứng dụng - Sách giáo viên
20. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TIN HỌC 12
    Định hướng Tin học ứng dụng - Sách giáo viên
21. TIN HỌC 12
    Định hướng Khoa học máy tính - Sách giáo viên
22. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TIN HỌC 12
    Định hướng Khoa học máy tính - Sách giáo viên
23. ÂM NHẠC 12 - Sách giáo viên
24. CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP ÂM NHẠC 12 - Sách giáo viên
25. HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM,
    HƯỚNG NGHIỆP 12 (1) - Sách giáo viên
26. HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM,
    HƯỚNG NGHIỆP 12 (2) - Sách giáo viên
27. GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG VÀ AN NINH 12 -
    Sách giáo viên

Xem thêm tại chiasetailieuhay.com

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

ISBN 978-604-0-40391-9

9 786040 403919

Giá: 48.000đ